Wykład 8: Układy dynamiczne 2

Fizyka komputerowa 2005/2006
Katarzyna Weron,

kweron@ift.uni.wroc.pl

Równanie logistyczne

Verhulst, 1845:

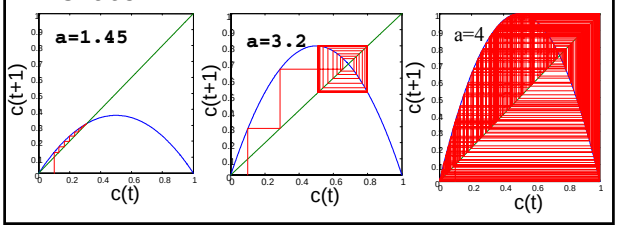
$$\frac{c_{n+1}-c_n}{c_n} = r(1-c_n)$$

$$c_{n+1} = c_n + rc_n(1-c_n)$$

$$x_n = \frac{r}{r+1}c_n \Rightarrow x_{n+1} = \underbrace{(1+r)}_{a}x_n(1-x_n)$$

Co możemy otrzymać?

- Punkty stałe
- Cykle
- Chaos

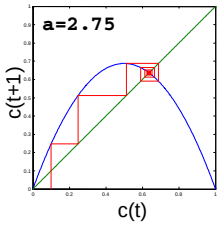


Punkty stałe

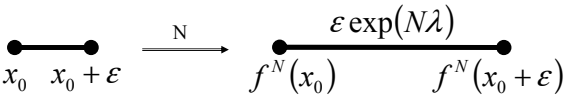
$$x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n = x^*$$

$$x^* = 0, x^{**} = \frac{a-1}{a}$$



Definicja wykładnika Lapunowa



$$\varepsilon\exp(N\lambda) = \left|f^N(x_0+\varepsilon) - f^N(x_0)\right|$$

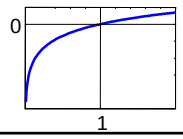
$$\lambda = \lim_{N\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{N}\ln\left|\frac{f^N(x_0+\varepsilon)-f^N(x_0)}{\varepsilon}\right| = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln\left|\frac{df^N(x_0)}{dx_0}\right|$$

Inna postać wykładnika Lapunowa

Reguła różniczkowania funkcji złożonej:

$$\frac{d}{dx}f^2(x)\Big|_{x_0} = \frac{d}{dx}f[f(x)]\Big|_{x_0} = f'[f(x_0)]f'(x_0) = f'(x_1)f'(x_0)$$

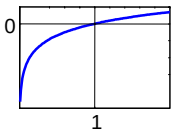
$$\lambda = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln\left|\frac{df^N(x_0)}{dx_0}\right| = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\ln\left|f'(x_i)\right|$$



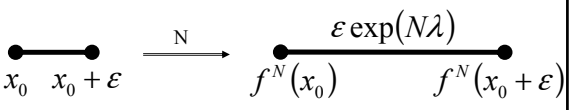
$$\left|f'(x^*)\right| < 1 \Rightarrow \lambda < 0$$

$$\left|f'(x^*)\right| > 1 \Rightarrow \lambda > 0$$

Co mierzy wykładnik Lapunowa?



$$|f'(x^*)| < 1 \Rightarrow \lambda < 0$$
$$|f'(x^*)| > 1 \Rightarrow \lambda > 0$$



Typy punktów stałych

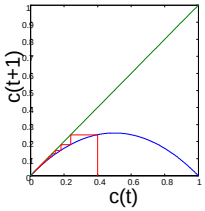
$\lvert f'(x^*)\rvert < 1$	przyciągający (stabilny)
$\lvert f'(x^*)\rvert > 1$	odpychający (niestabilny)
$1 < f'$	odpychający schodkowo
$0 < f' < 1$	przyciągajacy schodkowo
$-1 < f' < 0$	przyciągający spiralnie
$f' < -1$	odpychający spiralnie

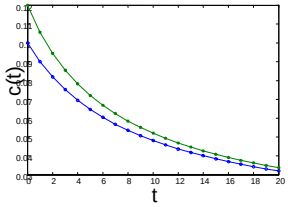
Typy punktów stałych równania logistycznego

$$f = ax(1-x), f(x^*) = x^*$$
$$x^* = 0, x^* = \frac{a-1}{a}$$
$$f' = a(1-2x), f'(0) = a, f'\left(\frac{a-1}{a}\right) = 2-a$$

$0 \le a < 1$	odpychający schodkowo
$1 < a < 2$	przyciągający schodkowo
$2 < a < 3$	przyciągający spiralnie
$3 < a \le 4$	odpychający spiralnie

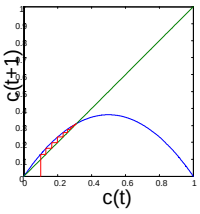
a=1

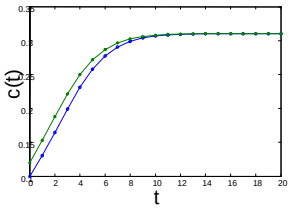




$0 \le a < 1$	odpychający schodkowo
$1 < a < 2$	przyciągający schodkowo
$2 < a < 3$	przyciągający spiralnie
$3 < a \le 4$	odpychający spiralnie

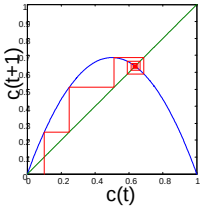
a=1.45

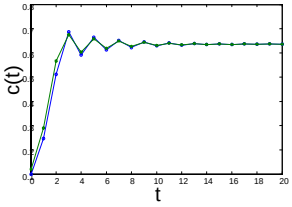




$0 \le a < 1$	odpychający schodkowo
$1 < a < 2$	przyciągający schodkowo
$2 < a < 3$	przyciągający spiralnie
$3 < a \le 4$	odpychający spiralnie

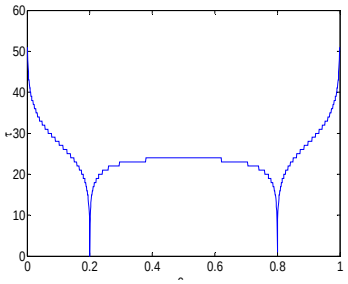
a=2.75



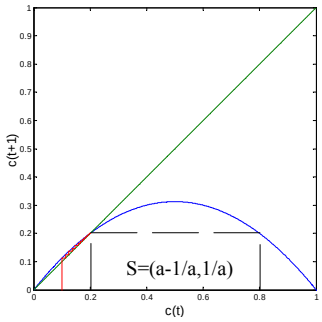


$0 \le a < 1$	odpychający schodkowo
$1 < a < 2$	przyciągający schodkowo
$2 < a < 3$	przyciągający spiralnie
$3 < a \le 4$	odpychający spiralnie

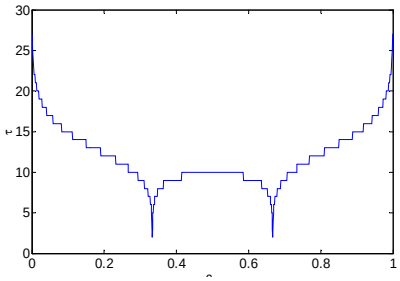
Profil czasowy dla a=1.25



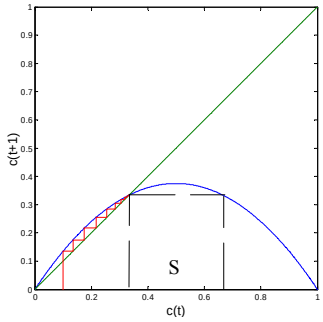
Iteracja graficzna dla a=1.25



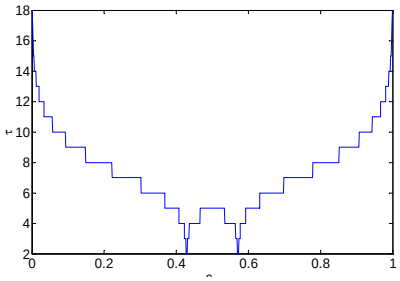
Profil czasowy dla a=1.5



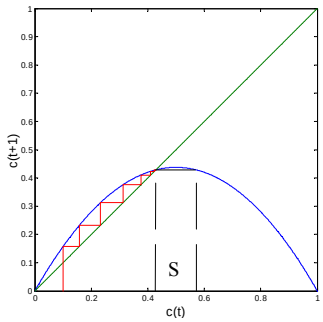
Iteracja graficzna dla a=1.5



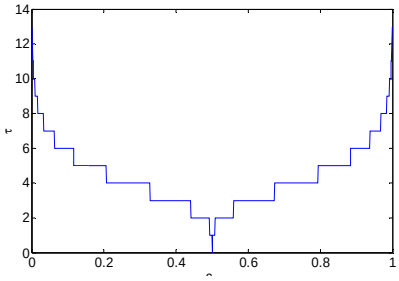
Profil czasowy dla a=1.75



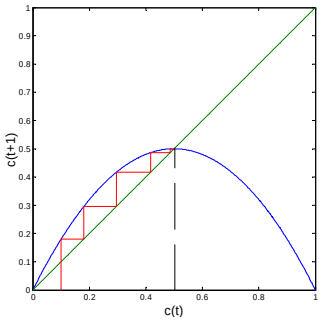
Iteracja graficzna dla a=1.75



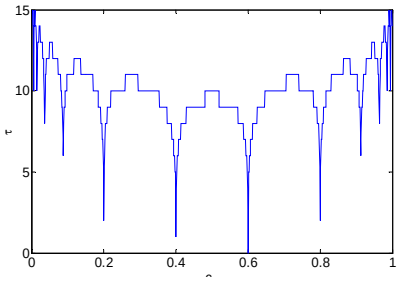
Profil czasowy dla a=2



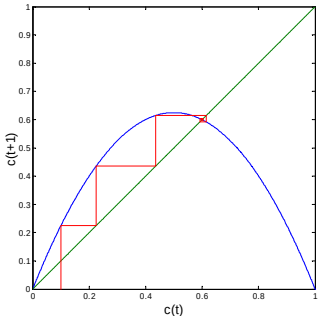
Iteracja graficzna dla a=2



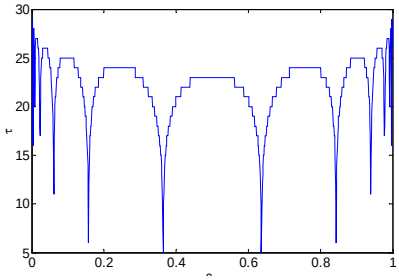
Profil czasowy dla a=2.5



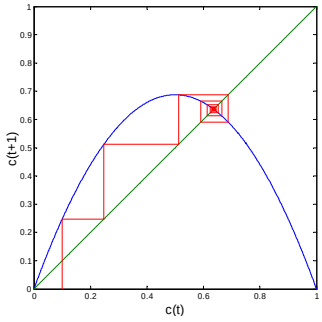
Iteracja graficzna dla a=2.5



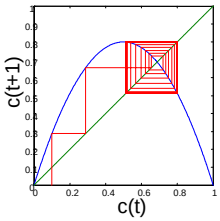
Profil czasowy dla a=2.75

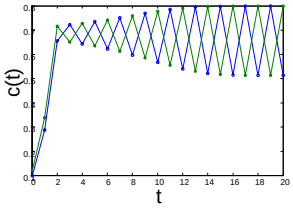


Iteracja graficzna dla a=2.75



a=3.2





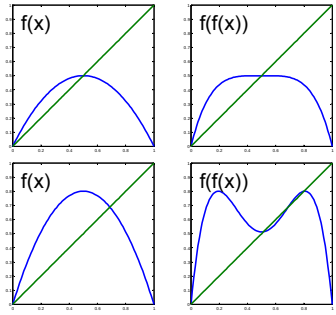
$0 \le a < 1$ odpychający schodkowo

$1 < a < 2$ przyciągający schodkowo

$2 < a < 3$ przyciągający spiralnie

$3 < a \le 4$ odpychający spiralnie

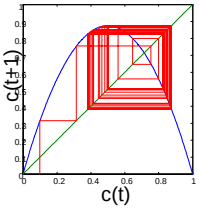
Jak znaleźć cykl?

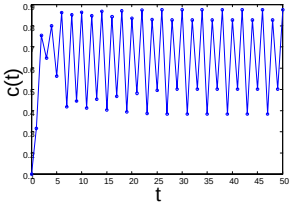


a=2

a=3.2

a=3.5





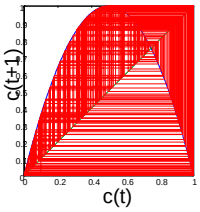
$0 \le a < 1$ odpychający schodkowo

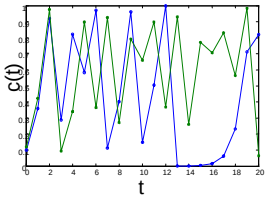
$1 < a < 2$ przyciągający schodkowo

$2 < a < 3$ przyciągający spiralnie

$3 < a \le 4$ odpychający spiralnie

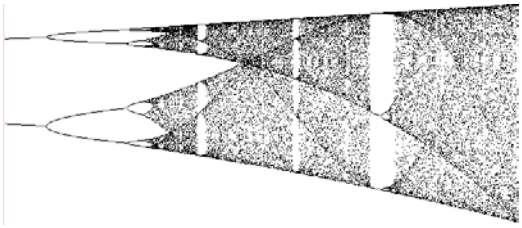
a=4



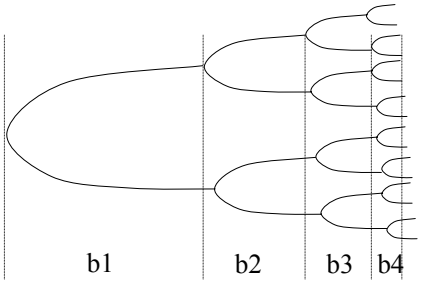


Chaos deterministyczny

Drzewo podwajania okresu,diagram Feigenbauma, bifurkacyjny

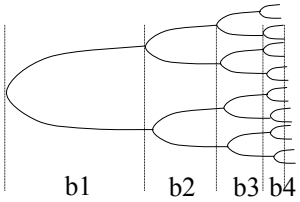


Ciąg bifurkacji podwajania okresu



Stała Feigenbauma

(b2-b1)/(b3-b2)=(b3-b2)/(b4-b3)
=d=4.669202



Punkt Feigenbauma

Koniec podwajania okresu – i co dalej?

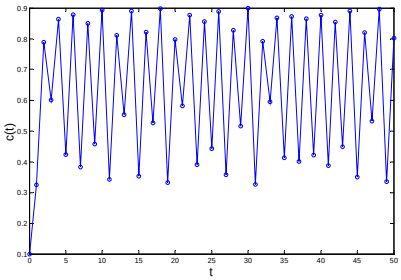
S=3.5699456

zbiór Cantora
-to jeszcze nie jest chaos

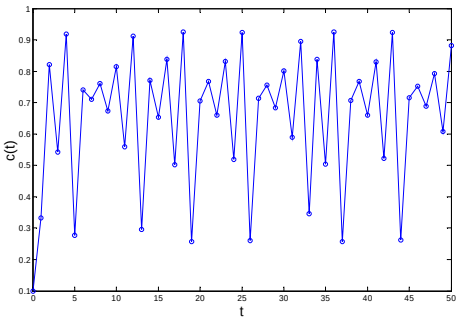
Zbiór Cantora

Pierwszy Fraktal na krawędzi chaosu

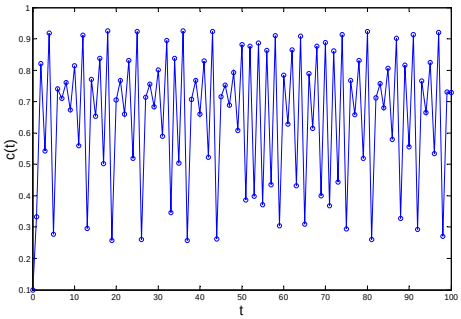
Iteracja dla a=3.6



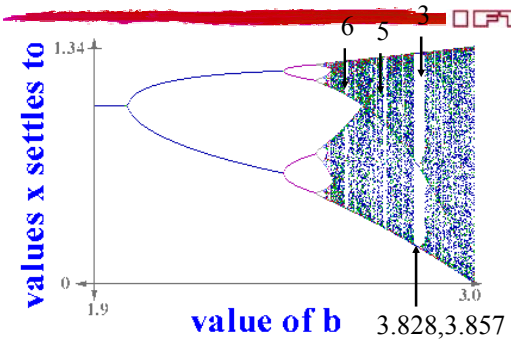
Iteracja dla a=3.7 i t=50



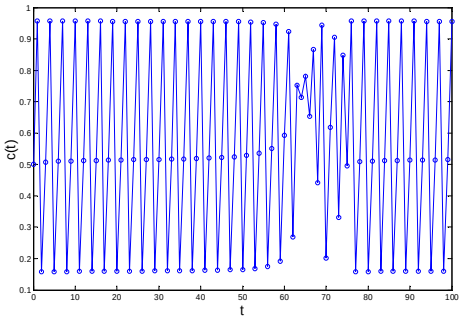
Iteracja dla a=3.7 i t=100



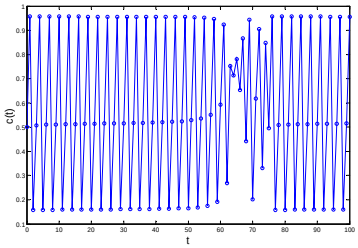
Okienka okresowe



Oszustwa koło okienek: cykl czy nie?



Intermitencja= fazy laminarności na przemian z chaosem



Iteracja równania logistycznego

$$c_{t+1} = ac_t(1-c_t)$$

koncentracja początkowa

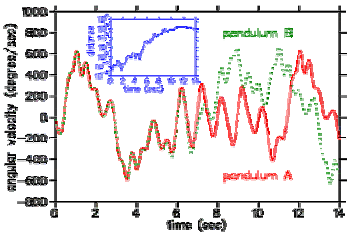
liczba iteracji

```
function[c,t]=logist(c0,a,n)
t=0:1:n;
c(1)=c0;
for i=1:n
   c(i+1)=a*c(i)*(1-c(i));
end
```

Diagram Feigenbauma

```
for i=1:1000
    a=0.004*i;
    n=500;
    [c,t]=log(0.1,a,n);
    x=ones(100,1)*a;
    plot(x,c(n-99:n),'.');
    hold on;
end
```

```
function[c,t]=log(c0,a,n)
t=0:1:n;
c(1)=c0;
for i=1:n
   c(i+1)=a*c(i)*(1-c(i));
end
```

Wymuszane wahadło

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin\theta = A\cos(\omega t)$$