Mechanika teoretyczna A

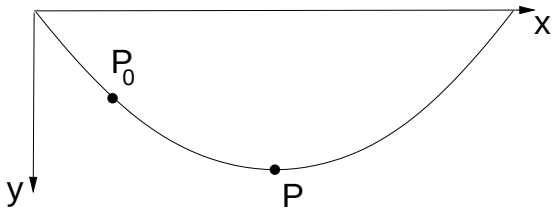
Lista 7

5 grudnia 2005 roku

Zad. 1 Rozważmy tor w kształcie cykloidy przedstawiony na rys. 1 (patrz również rozwiązanie zad. 5 z listy 5). Znajdujące się w punkcie P_0 toru ciało puszczono w chwili początkowej t_0. Pokaż, że czas potrzebny na przebycie drogi od P_0 do P dany jest wzorem

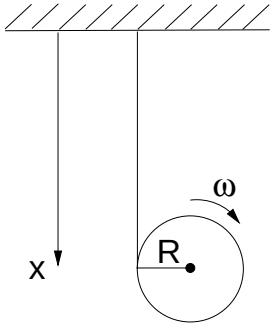
$$t(P_0 \to P) = \sqrt{\frac{a}{q}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_0 - \cos\theta}} \mathrm{d}\theta,$$

gdzie a to parametr cykloidy. Oblicz powyższą całkę. Jak czas ruchu ciała zależy od odległości między punktami P_0 i P?



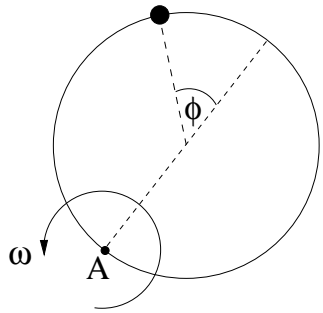
Rysunek 1: Ilustracja do zadania 1.

Zad. 2 Na rys. 2 przedstawiony jest prosty model popularnej zabawki yoyo. Zakładając, że promień krążka wynosi R, a jego masa m, zapisz lagrangian układu, a następnie znajdź przyspieszenie krążka.



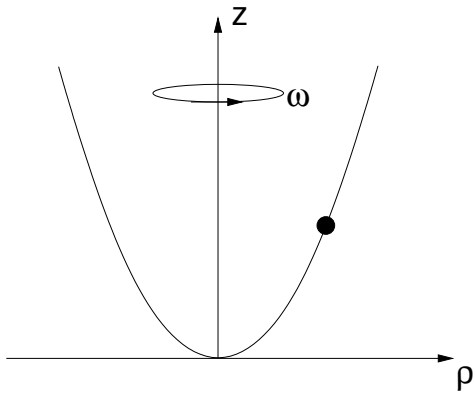
Rysunek 2: Ilustracja do zadania 2.

Zad. 3 Obręcz z drutu w kształcie okręgu obraca się dookoła punktu A ze stałą prędkością kątową ω (rys. 3). Po obręczy może swobodnie poruszać się koralik o masie m. Zapisz lagrangian układu. Znajdź równania ruchu koralika.



Rysunek 3: Ilustracja do zadania 3.

Zad. 4 Wygięty w kształcie paraboli o równaniu $z = k\rho^2$ drut obraca się ze stałą prędkością ω względem swej osi (rys. 4). Na drut nawleczony jest koralik, który może poruszać się bez tarcia. Zapisz lagrangian układu. Znajdź równanie ruchu koralika. Sprawdź, czy istnieją takie położenia koralika, przy których nie poruszałby się on ani w górę, ani w dół. Przedyskutuj stabilność znalezionych położeń równowagi.



Rysunek 4: Ilustracja do zadania 4.

Zad. 5 We współrzędnych uogólnionych wyprowadź zasadę zachowania

- pędu,
- momentu pędu,
- energii.