Mechanika Teoretyczna A
Lista nr 8

Zadanie 1.

Po powierzchni stożka o kącie wierzchołka 2Θ porusza się, bez tarcia, koralik o masie m. Oś obrotu stożka jest równoległa do kierunku siły ciążenia, a wierzchołek wskazuje jej kierunek. Wyznaczyć:

- hamiltonian układu oraz odpowiednie równania Hamiltona,
- wyznaczyć równania ruchu,
- udowodnić, że dla każdego rozwiązania równań Hamiltona istnieje para wartości z_{min} i z_{max}, dla których ruch w tej osi jest ograniczony, tzn. $z \in [z_{min}, z_{max}]$,
- porównaj otrzymane rozwiązanie z rozwiązaniem zadania 2 z listy 6.

Zadanie 2.

Obecnie bardzo popularne są skoki na bungee. Liny, na jakich są zwieszeni śmiałkowie, są bardzo sprężyste i z tego też względu prędkość jest wytracana stopniowo, nie zabijając skoczków. Tuż po skoku skoczek zaczyna wpadać w oscylacje na takiej linie. Proszę wyznaczyć okres tych oscylacji dla skoczka o masie m, skaczącego na linie o długości L (lina ma stałą materiałową równą k i zakładamy jedynie oscylacje w osi pionowej tzn. góra-dół). Jednak w obawie o bezpieczeństwo skoczka uwzględnimy masę liny. Zakładamy, że lina ma masę M rozłożoną równomiernie na całej swojej długości oraz rozciąga się również równomiernie. Wyznaczyć hamiltonian układu oraz równania Hamiltona.

Załóżmy, że przeciętny człowiek ($m = 75kg$) potrafi znieść bez kłopotów żołądkowych i z determinacją do skoku, przeciążenie do $4g$. Wyznaczyć stałą materiałową k jaką musi mieć lina o długości $L = 8m$, aby śmiałek wrócił po skoku z obiadem w żołądku.

Zadanie 3.

Sprawdź, że nawias Poissona

$$[f, g] = \sum_j \Big(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \Big)$$

spełnia tożsamość Jacobiego:

$$\big[[f, g], h\big] + \big[[g, h], f\big] + \big[[h, f], g\big] = 0$$

oraz że zachodzą związki przemienności

$$[q_i, q_k] = 0, \qquad\qquad [p_i, p_k] = 0$$

i podstawowe nawiasy Poissona (NP):

$$[q_i, p_k] = \delta_{ik}.$$

Udowodnij, że przekształcenie

$$Q_i = \ln(1 + \sqrt{q}_i \cos p_i), \qquad P_k = 2(1 + \sqrt{q}_k \cos p_k)\sqrt{q}_k \sin p_k$$

jest kanoniczne, tzn. że Q_i, P_k spełniają podstawowe NP.

Zadanie 4.

Przekształcenie zmiennych q i p dane jest wzorami

$$Q = \sqrt{1 + q^\kappa}, \qquad P = p\sqrt{1 + q^{-\lambda}}.$$

Dla jakich wartości parametrów $\kappa > 0$, $\lambda > 0$ jest ono przekształceniem kanonicznym?

Zadanie 5. Czy przekształcenie o funkcji tworzącej

$$F(q, P, t) = qP - \frac{P^2 t}{2m}$$

jest przekształceniem kanonicznym hamiltonianu $H = p^2/2m - V(q)$?

Zadanie 6.

Rozważmy układ z jednym stopniem swobody, hamiltonianem $H = H(p, q)$ oraz nową parą zmiennych P, Q związanych ze starymi w następujący sposób:

$$q = \sqrt{2P} \sin Q \qquad p = \sqrt{2P} \cos Q$$

1. udowodnij, że jeżeli $\partial H/\partial q = -\dot{p}$ i $\partial H/\partial p = \dot{q}$, to wynika stąd $\partial H/\partial Q = -\dot{P}$ i $\partial H/\partial P = \dot{Q}$. Co z tego wynika?
2. udowodnij, że hamiltonian jednowymiarowego oscylatora z masą $m = 1$ i stała $k = 1$ wynosi $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$
3. udowodnij, że jeżeli przepiszemy hamiltonian za pomocą nowych zmiennych P, Q, to wtedy Q możemy pominąć w dalszych rozważaniach. Co to wtedy będzie P?
4. rozwiąż równanie hamiltona dla $Q(t)$ i sprawdź, że rozpisane przy pomocy q daje spodziewane zachowanie.