MECHANIKA KLASYCZNA

Andrzej Pękalski

Spis treści

Dziękuję mgr Arturowi Ankowskiemu, mgr Krzysztofowi Końcy oraz dr Januszowi Szwabińskiemu za pomoc w redakcji tego wykładu

ROZDZIAŁ 1

Wstęp

Mechanika klasyczna, zwana także teoretyczną lub analityczną, to dział fizyki teoretycznej zajmujący się badaniem praw ruchu ciał materialnych. Jest to mechanika Newtonowska, której podstawy zostały stworzone przed powstaniem mechaniki kwantowej i teorii względności. Zagadnienia do których stosują się metody rozwinięte tutaj można określić jako „zwyczajne", tzn zagadnienia dotyczące ruchu ciał o niezbyt małych rozmiarach i poruszających się z prędkościami małymi w porównaniu z prędkością światła. Pojawiające się czasem różnice pomiędzy teorią i doświadczeniem również i w tym zakresie zjawisk, należy położyć na karb przyjęcia zbyt prostego modelu matematycznego - zaniedbanie tarcia, zastąpienie ciała sprężystego przez sztywne itd. Kiedy względne prędkości ciał stają się porównywalne z prędkością światła lub kiedy rozmiary ciał są rzędu stałych atomowych, wówczas mechanika klasyczna nie opisuje już zjawisk w sposób poprawny. W pierwszym przypadku należy ją zastąpić przez mechanikę relatywistyczną, w drugim przez mechanikę kwantową.

Aczkolwiek mechanika klasyczna znajduje dzisiaj ciągle jeszcze bezpośrednie zastosowanie, np w astronomii, to jednak główna jej wartość polega na tym, że jest ona podstawą całej fizyki teoretycznej. Wiele pojęć np mechaniki kwantowej określanych jest poprzez analogie z odpowiednimi pojęciami mechaniki klasycznej.

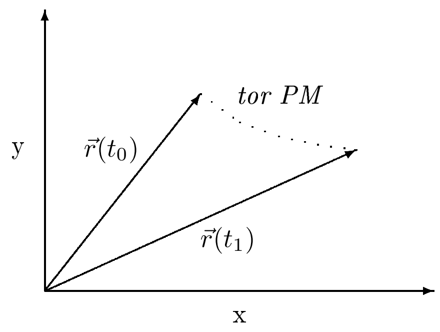
W mechanice klasycznej, tak jak w całej fizyce teoretycznej, operujemy modelami matematycznymi. Zamieniamy w nich istniejącą realną rzeczywistość poprzez pewien uproszczony model. Robimy tak głównie dlatego, że uwzględnienie wszystkich czynników wpływających na rzeczywistą sytuację nie jest ani możliwe, ani też na ogół potrzebne. Dlatego też musimy uwzględnić tylko niektóre z tych czynników. Takie które są, lub które uważamy za najistotniejsze. Rozwiązanie tak postawionego problemu powinno poprawnie opisywać najważniejsze cechy charakterystyczne danego procesu. Generalną zasadą jest aby początkowo konstruować możliwie prosty model i dopiero po sprawdzeniu jego ogólnej przydatności wprowadzać dodatkowe parametry umożliwiające opis bardziej szczegółowych własności. Dlatego też może istnieć kilka modeli teoretycznych opisujących tę samą rzeczywistość.

Pojęciem, którym będziemy się cały czas posługiwali jest pojęcie **punktu materialnego** (PM). Rozumiemy przez to ciało fizyczne o rozmiarach pomijalnie małych w porównaniu i innymi rozmiarami z jakimi mamy do czynienia w rozpatrywanym zagadnieniu. Będzie to więc punkt matematyczny, któremu została przypisana pewna masa. W tym kontekście PM może być np Ziemia, jeżeli rozpatrujemy jej ruch roczny wokół Słońca. Położenie PM w danym układzie współrzędnych, lub jak teraz będziemy mówić **układzie odniesienia**, podawać będziemy przy pomocy **promienia wodzącego** $\vec{r}$, o współrzędnych (x, y, z). Jest to wektor poprowadzony z początku układu do miejsca w którym znajduje się PM.

Aby określić ruch PM podajemy zależność promienia wodzącego od czasu t : $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Krzywą geometryczną zakreślaną przez PM w czasie ruchu nazywamy **torem** PM lub jego **trajektorią**. Równanie

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

jest parametrycznym równaniem toru, przy czym parametrem jest czas t. O funkcji $\vec{r}$ zakładamy, że jest ciągła i dwukrotnie różniczkowalna (klasy C^2). Założenia te usprawiedliwione są poprzez zgodność otrzymanych wniosków z doświadczeniem.



Rysunek 1.1. Wektory wodzące w dwu chwilach czasu.

Prędkością PM $\vec{v}$, nazywamy pochodną promienia wodzącego względem czasu

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}.$$

Przyspieszeniem PM $\vec{a}$ nazywamy wektor będący pochodną względem czasu prędkości

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} \equiv \ddot{\vec{r}}.$$

Kropka nad literą będzie zawsze oznaczała pochodną względem czasu.

ROZDZIAŁ 2

Dynamika punktu materialnego

1. Prawa Newtona

Zajmować się teraz będziemy ruchem punktu materialnego (PM) pod wpływem zewnętrznej siły. Podstawą rozważań są prawa ruchu Newtona otrzymane jako uogólnienie danych doświadczalnych.

Pierwsze prawo Newtona

Istnieje układ odniesienia, w którym PM porusza się bez przyspieszenia (tzn jednostajnie i prostoliniowo), jeżeli nie działa nań z zewnątrz żadna siła, lub też działające siły równoważą się.

Układy, o których mowa w tym punkcie nazywamy układami *inercjalnymi*. Jeżeli układ U' porusza się względem układu inercjalnego U ruchem prostoliniowym i jednostajnym, wówczas i układ U' jest inercjalny. Słuszne jest również i twierdzenie odwrotne, tzn dwa układy inercjalne mogą poruszać się względem siebie tylko ruchem jednostajnym i prostoliniowym. W dalszym ciągu wykładu, o ile nie zostanie to osobno podkreślone, rozpatrywać będziemy tylko układy inercjalne.

Drugie prawo Newtona

Można je traktować jako definicję siły i masy:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\ddot{\vec{r}}. \tag{2.1}$$

Wybierając współczynnik proporcjonalności między siłą F i przyspieszeniem a, decydujemy się na pewien układ jednostek. Przyjęliśmy tutaj (co nie zawsze jest słuszne), że ten współczynnik nie zależy od czasu. Można więc drugie prawo Newtona zapisać w postaci:

$$\vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{2.2}$$

gdzie wielkość $\vec{p} = m\vec{v}$ jest pędem PM. Przez $\vec{F}$ rozumiemy wypadkową siłę działającą na PM. Dla układów inercjalnych I prawo jest konsekwencją II. Jeśli bowiem wypadkowa siła $\vec{F} = 0$, wówczas $m\vec{a} = 0$, czyli jeśli $m \neq 0$ to $\vec{a} = 0$ i PM porusza się bez przyspieszenia.

Ruch PM dany jest przez wektorową zależność funkcyjną $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Możemy ją znaleźć z II prawa Newtona, traktując $\vec{F}$ jako wielkość znaną z doświadczenia. Układ równań (2.2), lub we współrzędnych kartezjańskich

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z, \tag{2.3}$$

nazywamy **równaniami ruchu Newtona**. Mając daną funkcję $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, poprzez całkowanie równań (2.2) otrzymujemy zależność

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad \text{lub} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

określającą ruch PM. Znalezienie takiej zależności jest równoznaczne z wyznaczeniem toru PM, jeżeli znane są odpowiednie warunki początkowe, i stanowi zasadniczy cel mechaniki klasycznej.

Trzecie prawo Newtona

Siły oddziaływania dwu PM są równe co do wielkości, mają przeciwny zwrot i działają wzdłuż prostej łączącej te punkty.

Prawo to nie jest uniwersalne i nie jest słuszne np. w przypadku sił elektromagnetycznych pomiędzy poruszającymi się ładunkami.
Zasada niezależności sił, również sformułowana przez Newtona w oparciu o dane doświadczalne, mówi że:
Siły działają na PM niezależnie, tzn dodanie nowej siły nie zmienia dotychczas działających.
Tak więc siły, a więc i przyspieszenia, możemy traktować jak wektory i dodawać do siebie geometrycznie.

2. Rozwiązywanie równań Newtona

Jeśli znana jest siła $\vec{F}$ działająca na PM, to korzystając z równań Newtona (2.2) lub (2.3) i całkując je powinniśmy otrzymać, przy zadanych warunkach początkowych, rozwiązanie zagadnienia, tzn tor PM. Dla przykładu znajdziemy tor PM pod działaniem siły ciężkości Ziemi. Załóżmy, że oś O_x skierowana jest pionowo w górę. Mamy wtedy

$$F_x = -mg, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0, \quad g = const.$$

Równania Newtona mają postać

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0. \tag{2.4}$$

Jak widać, istotna jest tylko zależność x od t. Dlatego też dalej rozpatrzymy tylko pierwsze równanie. Wycałkujmy je od pewnej początkowej chwili czasu t_0 do chwili końcowej t. Otrzymamy

$$\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx(t_0)}{dt} = -\int_{t_0}^{t} g\,dt = -g(t-t_0).$$

Po powtórnym scałkowaniu dostaniemy

$$x(t) = \frac{dx(t_0)}{dt}(t-t_0) + x(t_0) - \frac{g}{2}(t-t_0)^2. \tag{2.5}$$

Otrzymaliśmy więc szukaną zależność $x = x(t)$ w postaci całki ogólnej równania Newtona. Aby jednak wyznaczyć do końca ruch PM (znaleźć rozwiązanie szczególne) należy zadać warunki początkowe. Równanie jakie otrzymaliśmy powinno opisywać dowolną sytuację w której na PM działa tylko siła grawitacji Ziemi. Zadanie warunków początkowych wybiera spośród wszystkich możliwych rozwiązań jedno, odpowiadające konkretnemu zagadnieniu. Niech w naszym przypadku będzie nim swobodne spadanie. Tak więc w chwili początkowej t_0 PM znajduje się w spoczynku na pewnej wysokości h. Rachubę czasu rozpocznijmy od chwili t_0 . Nasze warunki początkowe będą więc miały postać

$$x(t_0) = x(0) = h, \quad \frac{dx(t_0)}{dt} = v_0 = 0, \quad t_0 = 0.$$

Podstawiając te warunki do znalezionego rozwiązania (2.5) dostajemy

$$x(t) = h - \frac{gt^2}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{dx(t)}{dt} = v(t) = -gt.$$

Rozpatrzmy teraz rzut w górę. Oznacza to, że w chwili początkowej t_0 ($= 0$ dla prostoty) PM znajduje się w położeniu $x(0) = x_0$, które też bez straty ogólności możemy przyjąć za równe 0. Prędkość początkowa jest teraz różna od zera, tzn $dx(t_0)/dt = v_0 > 0$. Podstawiając te warunki do rozwiązania (2.5)dostajemy

$$x(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad \frac{dx(t)}{dt} = v_0 - gt.$$

Z rozpatrzonego przykładu widać, że aby jednoznacznie wyznaczyć ruch PM trzeba było podać dwa warunki początkowe, dla $x(t_0)$ oraz dla $dx(t_0)/dt$. Wynika to stąd, że równania Newtona są równaniami różniczkowymi drugiego rzędu i rozwiązanie ogólne zawiera dwie stałe, które wyznacza się (znajduje rozwiązanie szczególne) podając dwa warunki początkowe.

Zapiszmy teraz to samo zagadnienie w notacji wektorowej. Nie zakładamy tu, że wektor przyspieszenia ziemskiego skierowany jest wzdłuż jednej z osi kartezjańskiego układu współrzędnych. Mamy wtedy

$$\vec{F} = m\vec{g}, \quad \vec{g} = co\vec{n}st$$

i stąd równanie Newtona

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g}.$$

Warunki początkowe przyjmiemy w postaci

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \quad \frac{d\vec{r}(t_0)}{dt} = \vec{v}_0$$

i po scałkowaniu dostajemy

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} - \frac{d\vec{r}(t_0)}{dt} = \vec{g}(t - t_0)$$

czyli

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \frac{d\vec{r}(t_0)}{dt}(t - t_0) + \frac{\vec{g}}{2}(t - t_0)^2 =$$

$$= \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{\vec{g}}{2}(t - t_0)^2.$$

Można to też zapisać w postaci

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{\vec{g}}{2}(t - t_0)^2.$$

Ze wzoru tego widać, że wektor $\vec{r} - \vec{r}_0$ leży w tej samej płaszczyźnie co wektory $\vec{v}_0$ i $\vec{g}$. Ponieważ wektory te są stałe, więc wniosek stąd taki, że ruch pod wpływem siły przyciągania ziemskiego jest płaski, tzn leży cały czas w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektory prędkości początkowej i działającej siły. Jest to szczególny przypadek pewnej ogólnej zasady, którą poznamy później.

3. Oscylator harmoniczny

Jako drugi przykład całkowania równań Newtona rozpatrzymy oscylator harmoniczny. Jest to najczęściej chyba stosowany model procesu fizycznego. Drgania harmoniczne wykonuje PM na który działa siła proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi. Siłę tę możemy zapisać jako

$$\vec{F} = -k^2\vec{r}$$

gdzie k jest pewną stałą. Drgania harmoniczne wykonuje np. sprężyna przy zaniedbaniu tarcia. Dla prostoty rozpatrzmy przypadek oscylatora liniowego, tzn 1D, gdy ruch odbywa się wzdłuż jednej prostej. Wtedy

$$F = -k^2 x$$

i równanie Newtona ma postać

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x,$$

co można zapisać jako

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \text{gdzie} \quad \omega^2 = \frac{k^2}{m}. \tag{2.6}$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne rzędu 2, jednorodne. Równania takie rozwiązuje się zwykle w następujący sposób. Aby znaleźć rozwiązanie ogólne dokonujemy podstawienia

$$x = e^{\alpha t}$$

i po wstawieniu do naszego równania otrzymujemy równanie charakterystyczne (algebraiczne, nie różniczkowe) dla α:

$$\alpha^2 + \omega^2 = 0 \quad \to \quad \alpha_{1,2} = \pm i\omega.$$

Tak więc rozwiązanie ogólne, które ma być kombinacją dwu liniowo niezależnych rozwiązań szczególnych (tzn dla α_1 i α_2), ma postać

$$x(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}.$$

Korzystając ze wzorów Eulera

$$e^{\pm ia} = \cos a \pm i \sin a,$$

można to zapisać w postaci

$$x(t) = (A_1 + A_2)\cos\omega t + i(A_1 - A_2)\sin\omega t = B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t. \tag{2.7}$$

Podstawiając dalej

$$B_1 = h\sin\gamma, \quad B_2 = h\cos\gamma$$

dostajemy

$$x(t) = h\sin(\omega t + \gamma). \tag{2.8}$$

Dowolne dwie stałe, h i γ wyznaczamy z warunków początkowych (położenie i prędkość w chwili początkowej)

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{i} \quad \frac{dx(t_0)}{dt} = v_0.$$

Jak widać z otrzymanego równania (2.8), ruch pod wpływem siły sprężystej jest okresowy, przy czym okres ten wynosi

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

bo

$$x(t+T) = h\sin(\omega(t+T) + \gamma) = h\sin(\omega t + 2\pi + \gamma) = h\sin(\omega t + \gamma) = x(t).$$

Dlatego też wielkość ω nazywamy częstością kołową, $1/T \equiv \nu$ - częstością, h - amplitudą, argument $(\omega t + \gamma)$ - fazą. Wyznaczmy teraz stałe z warunków początkowych, które mają ogólną postać $x(0) = x_0$, $dx/dt|_{t=0} = v_0$. Różniczkując (2.7) mamy

$$\frac{dx(t)}{dt} = -B_1\omega\sin\omega t + B_2\omega\cos\omega t.$$

Stąd i z (2.7), dostajemy

$$B_1 = x_0, \quad B_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

i wobec tego

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t. \tag{2.9}$$

Jeżeli w chwili początkowej PM znajdował się w początku układu, czyli w centrum siły sprężystej ($x_0 = 0$) oraz spoczywał ($v_0 = 0$), wówczas z rozwiązania (2.9) wynika, że $x(t) = 0$, a więc PM w dalszym ciągu pozostanie w spoczynku. Możemy więc powiedzieć, że centrum siły sprężystej jest położeniem równowagi oscylatora harmonicznego. Wszystkie te wnioski pozostają słuszne również dla oscylatora 2D i 3D.

3.1. Tłumiony oscylator harmoniczny. Oscylator harmoniczny jest bardzo dobrym przybliżeniem wielu realnych sytuacji i dlatego jest jednym z najczęściej stosowanych modeli w fizyce. Ma też tę zaletę, że można go ściśle rozwiązać. Aby jednak pozostać blisko rzeczywistości trzeba móc uwzględnić fakt, że ruch sprężysty odbywa się na ogół w ośrodku, który stawia opór. Bardzo często opór ten rośnie wraz ze wzrostem prędkości ruchu, a najprostszym przybliżeniem jest przyjęcie, że opór zależy liniowo od prędkości

$$\vec{\rho} = -\rho\vec{v}.$$

Równanie ruchu dla 1D oscylatora ma wtedy postać

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + k^2x = 0. \tag{2.10}$$

Warto może zauważyć w tym miejscu, że analogiczne równanie otrzymujemy dla obwodu elektrycznego z indukcyjnością (L), pojemnością (C) i oporem (R)

$$L\,\ddot{q}(t) + R\,\dot{q}(t) + \frac{1}{C}\,q(t) = 0$$

Prąd to $\dot{q}(t)$.

Powracając do zagadnienia mechanicznego, możemy wprowadzić dwa oznaczenia dla stałych występujących w równaniu (2.10)

$$2\beta = \frac{\rho}{m}, \qquad \omega_0 = \sqrt{k^2/m}. \tag{2.11}$$

β nazywane jest *stałą tłumienia*, natomiast ω_0 to *częstość własna* oscylatora, a więc częstość z którą by drgał gdyby nie było tłumienia. Używając tych oznaczeń możemy przepisać równanie (2.10) w postaci

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0. \tag{2.12}$$

Rozwiązania tego równania będziemy szukali, jak zwykle w takich wypadkach, w postaci

$$x = e^{\alpha t}. \tag{2.13}$$

Po podstawieniu do równania (2.12) dostajemy równanie charakterystyczne dla α

$$\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2 = 0,$$

którego pierwiastkami są

$$\alpha_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \tag{2.14}$$

Podstawiając znalezione wartości α do postulowanej postaci rozwiązania (2.13) dostajemy rozwiązanie ogólne równania (2.12)

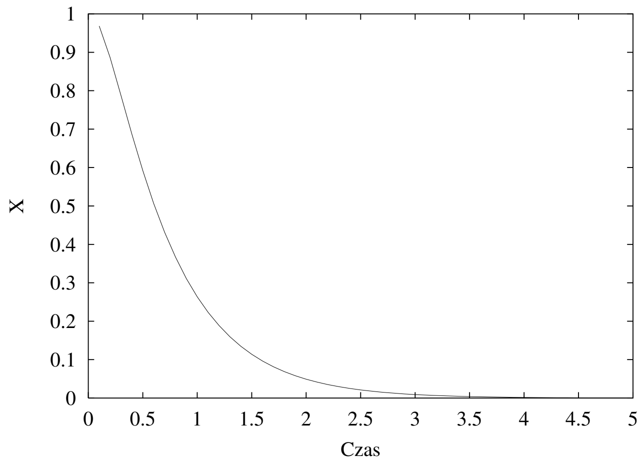
$$x(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} A_1\,e^{\alpha_1 t} + A_2\,e^{\alpha_2}t & : & \alpha_1 \neq \alpha_2, \\ (A_1 + A_2\,t)\,e^{\alpha_1 t} & : & \alpha_1 = \alpha_2 \end{array} \right. \tag{2.15}$$

Rozwiązania te możemy przepisać, wyrażając je poprzez stałe β i ω

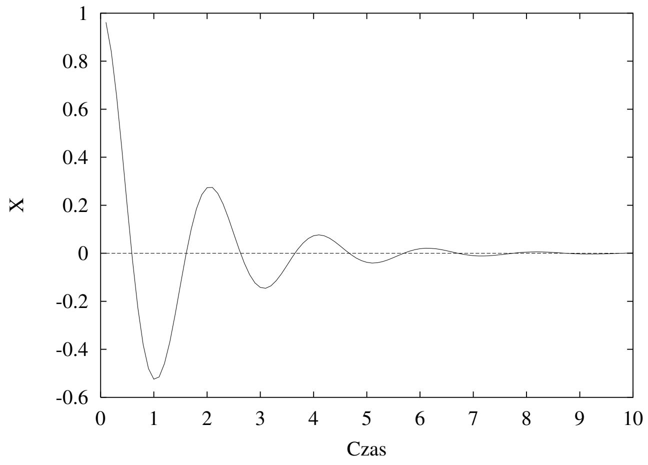
$$x(t) = \left\{ \begin{array}{rcl} e^{-\beta t}\left(A_1\,e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t} + A_2\,e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}\right) & : & \beta^2 - \omega_0^2 \neq 0 \\ e^{-\beta t}\,(A_1 + A_2t) & : & \beta^2 - \omega_0^2 = 0 \end{array} \right. \tag{2.16}$$

W zależności od wartości wyrażenia $\beta^2 - \omega_0^2$ możliwe sa różne zachowania tłumionego oscylatora.

(1) $\beta^2 - \omega_0^2 > 0$ - tłumienie jest tak silne, że oscylator dąży do położenia równowagi ($x = 0$) przed wykonaniem jednego okresu. Ruch taki nazywamy *aperiodycznym*,



RYSUNEK 2.1. Zależność od czasu wychylenia x, dla tłumionego oscylatora w przypadku „aperiodycznym". Warunki początkowe $x_0 = 0, v_0 = 0.1$, $b = 1.2\,\omega_0$.



RYSUNEK 2.2. Zależność od czasu wychylenia x, dla tłumionego oscylatora w przypadku „periodycznym". Warunki początkowe jak dla przypadku aperiodycznego, $b = 0.2\,\omega_0$.

(2) $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$. Tłumienie jest na tyle słabe, że wprawdzie oscylator też dąży do położenia równowagi, ale zdoła wykonać szereg oscylacji. Amplituda oscylacji maleje wykładniczo $e^{-\beta t}$. Okres takiego ruchu dany jest przez

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Ruch taki nazywamy *„periodycznym"*.

(3) $\beta^2 - \omega_0^2 = 0$, jest przypadkiem pośrednim, *granicznym*, pomiędzy ruchami 1 i 2.

3.1.1. *Drgania wymuszone oscylatora tłumionego.* Kolejnym czynnikiem, który warto jest rozpatrzeć dla oscylatora harmonicznego jest przypadek gdy działa nań zewnętrzna siła $\vec{F}$. Najczęściej przyjmuje się, że siła ta jest okresowa, o częstości ω, nazywanej *częstością wymuszającą* i w 1D ma postać

$$F = A\sin\omega t, \quad A \geq 0. \tag{2.17}$$

Równanie Newtona dla takiego oscylatora to

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = a\sin\omega t, \qquad a = \frac{A}{m}. \tag{2.18}$$

Aby rozwiązać to równanie, zacznijmy od prostszego przypadku gdy nie ma tłumienia, a więc $\beta = 0$. Równanie (2.18) redukuje się do

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = a\sin\omega t, \tag{2.19}$$

i jest równaniem niejednorodnym. Rozwiązanie ogólne takiego równania to suma rozwiązania ogólnego równanie jednorodnego, otrzymanego przez zaniedbanie wyrazu $a\sin\omega t$ oraz rozwiązanie szczególnego równania niejednorodnego.
Równanie jednorodne to

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \tag{2.20}$$

a jego całką ogólną jest

$$x(t) = c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t = h_0\sin(\omega_0 t + \gamma_0). \tag{2.21}$$

Całki szczególnej równania niejednorodnego (2.19) szukamy w postaci podobnej do wyrazu wprowadzającego niejednorodność, czyli

$$x(t) = h\sin\omega t. \tag{2.22}$$

Stałą h wyznaczamy wstawiając postulowane rozwiązanie do równania (2.19). Otrzymamy wtedy

$$-h\omega^2\sin\omega t + \omega_0^2 h\sin\omega t = a\sin\omega t \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{2.23}$$

Całka ogólna równania niejednorodnego, jako suma obu otrzymanych rozwiązań, ma postać

$$x(t) = c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t = h_0\sin(\omega_0 t + \gamma_0) + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t. \tag{2.24}$$

Jak widać, gdy nie ma tłumienia drgania oscylatora są sumą dwu drgań harmonicznych – drgań swobodnych o częstości ω_0, oraz drgań wymuszonych przez zewnętrzną siłę o częstości ω. Jeżeli obie te częstości są sobie równe, mamy do czynienia z *rezonansem.* Przyjmijmy teraz warunki początkowe w postaci

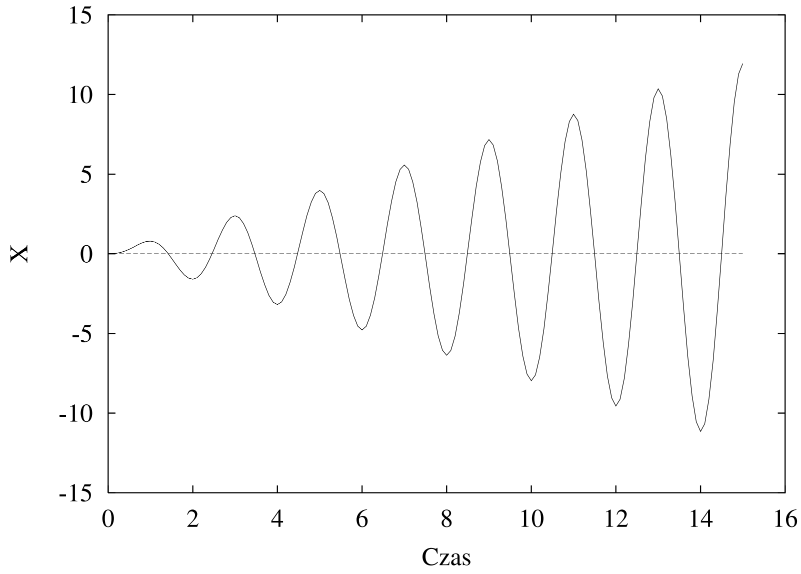
$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

co pozwoli nam wyznaczyć stałe c_1, c_2

$$c_1 = x_0, \qquad c_2 = \frac{v_0}{\omega_0} - \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{\omega}{\omega_0}. \tag{2.25}$$

Rozwiązanie szczególne, przy zadanych warunkach początkowych, ma teraz postać

$$x(t) = x_0\cos\omega_0 t + \left(\frac{v_0}{\omega_0} - \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{\omega}{\omega_0}\right)\sin\omega_0 t + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t \tag{2.26}$$



Rysunek 2.3. Zależność od czasu wychylenia x, w przypadku rezonansu. Wykres otrzymany z równania (2.28) dla $x_0 = 0, v_0 = 0.1, \omega_0 = \pi$.

Aby zobaczyć jak zachowuje się oscylator w przypadku rezonansu przepiszmy (2.26) w nieco innej postaci, pozbywając się nieoznaczonego wyrażenia po prawej stronie:

$$x(t) = x_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right) =$$

$$= x_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \frac{a}{\omega_0 + \omega}\omega\frac{\frac{\sin\omega t}{\omega} - \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}}{\omega - \omega_0} \tag{2.27}$$

Rozwiązanie w przypadku rezonansu otrzymamy biorąc odpowiednią granicę

$$x_r(t) = \lim_{\omega\to\omega_0} x(t) = x_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t - \frac{a}{2\omega_0}\lim_{\omega\to\omega_0}\frac{\frac{\sin\omega t}{\omega} - \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}}{\omega - \omega_0} =$$

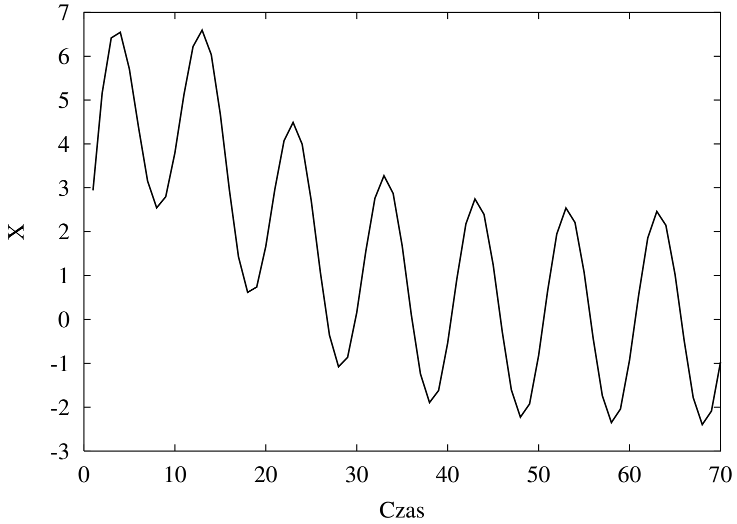
$$= x_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t - \frac{a}{2\omega_0}\lim_{\omega\to\omega_0}\left(\frac{d}{d\omega}\frac{\sin\omega t}{\omega}\right) =$$

$$= x_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t - \frac{a}{2\omega_0^2}\left(\omega_0 t\cos\omega_0 t - \sin\omega_0 t\right) =$$

$$= \left(x_0 - \frac{a}{2\omega_0}t\right)\cos\omega_0 t + \left(\frac{v_0}{\omega_0} + \frac{a}{2\omega_0^2}\right)\sin\omega_0 t. \tag{2.28}$$

Amplituda przy cosinusie zależy liniowo od czasu, a więc $x(t)$ będzie nieograniczenie wzrastało z czasem, jak widać to na rysunku 2.3.

Jeżeli oscylator jest zarówno tłumiony jak i znajduje się pod działaniem zewnętrznej, okresowej siły wymuszającej, to jego równanie ruchu dane jest przez (2.18). Jest to równanie niejednorodne, a człon odpowiedzialny za niejednorodność to siła wymuszająca. Jak wiemy, rozwiązanie ogólne równania (2.18) to suma całki ogólnej równania jednorodnego i całki szczególnej równanie niejednorodnego. Pierwsze już znamy z rozpatrzonego poprzednio przypadku (równanie (2.16)), natomiast całki szczególnej będziemy



RYSUNEK 2.4. Zależność od czasu wychylenia x, dla tłumionego oscylatora z siłą wymuszającą, otrzymana z równania (2.31) dla przypadku gdy $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

szukali, tak jak poprzednio, w postaci podobnej do funkcji, która wprowadziła niejednorodność. Będzie to

$$x(t) \;=\; h\sin(\omega t+\gamma). \tag{2.29}$$

Wstawiając tę funkcję do równania (2.18), dostaniemy

$$-h\omega^2\sin(\omega t+\gamma)+2\beta h\omega\cos(\omega t+\gamma)+\omega_0^2 h\sin(\omega t+\gamma) \;=\; a\sin\omega t.$$

Prawą stronę możemy uczynić bardziej podobną do lewej przez prostą operację

$$\sin\omega t \;=\; \sin(\omega t+\gamma-\gamma) \;=\; \cos\gamma\sin(\omega t+\gamma)-\sin\gamma\cos(\omega t+\gamma).$$

Porównując teraz współczynniki przy wyrazach tego samego typu po obu stronach równości, dostajemy wyrażenia dla h, γ :

$$\begin{aligned} h \;=\; \frac{a}{M}, \qquad \text{gdzie} \quad M \;&=\; \sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2\omega^2},\\ \sin\gamma \;&=\; -\frac{2\beta\,\omega}{M},\\ \cos\gamma \;&=\; -\frac{\omega^2-\omega_0^2}{M}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Mając wyznaczone współczynniki h, γ znaleźliśmy rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego jako sumę dwu rozwiązań

$$x(t) \;=\; \begin{cases} C_1 e^{\alpha_1 t}+C_2 e^{\alpha_2 t}+h\sin(\omega t+\gamma) & : \;\alpha_1\neq\alpha_2 \\ (C_1+C_2 t)\,e^{\alpha t}+h\sin(\omega t+\gamma) & : \;\alpha_1=\alpha_2 \end{cases} \quad \alpha_{1,2} \;=\; -\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_0^2} \tag{2.31}$$

Ponieważ, jak widać, α jest niedodatnie, więc z czasem drgania tłumione (pierwsze dwa wyrazy w (2.31)) będą zanikały i po pewnym czasie oscylator będzie wykonywał ruch okresowy z okresem równym sile wymuszającej.

4. Prawa zachowania

Klasa równań różniczkowych, które da się rozwiązać ściśle jest niestety niewielka. Dlatego m.in. staramy się zdobyć możliwie dużo informacji o rozpatrywanym układzie fizycznym bez konieczności rozwiązywania równań różniczkowych. Wiele informacji można otrzymać badając symetrie układu. Przejawiają się one w zasadach zachowania. Są to prawa mówiące jakie warunki muszą być spełnione aby pewne wielkości były niezmienne podczas danego procesu. Mówimy wtedy, że wielkości te są zachowane. Z II prawa Newtona wynika bezpośrednio, że

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

jeśli więc wypadkowa wszystkich sił działających na PM znika, to

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \vec{const}. \tag{2.32}$$

a więc pęd w czasie procesu jest zachowany, a otrzymany warunek nosi nazwę **zasady zachowania pędu**. Dla otrzymania następnej zasady zachowania wykorzystajmy raz jeszcze równania Newtona (2.2) (jak dotąd są to jedyne znane nam prawa mechaniki) i pomnóżmy je lewostronnie wektorowo przez $\vec{r}$. Otrzymamy

$$\vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Ponieważ jednak $(d\vec{r}/dt) \times (md\vec{r}/dt) = 0$, więc

$$\vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt}.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\vec{J} = \vec{r} \times m\vec{v}, \quad \vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$$

dostajemy

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{D}.$$

Wektor $\vec{J}$ nazywamy **momentem pędu** (krętem), zaś $\vec{D}$ - **momentem siły** (lub momentem obrotowym). Wektor $\vec{J}$ ma kierunek prostopadły do wektorów $\vec{r}$ i $\vec{v}$ (z definicji). Jeżeli więc podczas ruchu kierunek wektora $\vec{J}$ nie ulega zmianie, wówczas ruch jest płaski. Jeżeli moment sił działających na PM znika, tzn $\vec{D} = 0$, wówczas

$$\vec{J} = \vec{const}. \tag{2.33}$$

i otrzymaliśmy **zasadę zachowania momentu pędu**. Wzór (2.33) nazywamy także **całką pierwszą równań Newtona** lub **całką momentu pędu**. Moment sił działających na PM może znikać bądź gdy $\vec{r} = 0$, bądź gdy $\vec{F} = 0$, lub też gdy $\vec{r} \neq 0$, $\vec{F} \neq 0$ lecz $\vec{r} \| \vec{F}$. Taką siłę, która skierowana jest zawsze wzdłuż promienia wodzącego nazywamy **siłą centralną**. Stały punkt do, lub od którego skierowana jest ta siła nazywamy **centrum siły**. Ponieważ dla sił centralnych moment sił $\vec{D} = 0$, więc moment pędu jest zachowany. Stały jest więc kierunek wektora $\vec{J}$, czyli ruch pod działaniem siły centralnej jest płaski. Siłę centralną możemy więc zapisać w postaci

$$\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r}F_r, \quad \text{gdzie} \quad F_r = |\vec{F}|, \quad r = |\vec{r}|.$$

Trzecią zasadą zachowania jaką wyprowadzimy będzie zasada zachowania energii. Punktem wyjścia są znów równania Newtona. Tym razem pomnożymy je skalarnie przez prędkość :

$$m\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt}\dot{\vec{r}} = \vec{F}\,\dot{\vec{r}}$$

lub

$$\vec{v}m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\,\dot{\vec{r}}.$$

Lewą stronę można łatwo przekształcić, bo

$$\vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2}\,\frac{d\vec{v}^2}{dt},$$

i wobec tego oznaczając

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2,$$

możemy napisać

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F}\,\vec{v}. \tag{2.34}$$

Wielkość T nazywamy **energią kinetyczną** PM. Jest ona wyznaczona z dokładnością do stałej addytywnej, niezależnej od czasu, którą tutaj przyjmujemy za równą 0, tak aby w spoczynku $T = 0$, zgodnie z przyjętą umową, że energia kinetyczna jest to energia związana z ruchem ciała. Równanie (2.34) możemy scałkować, otrzymując

$$T - T_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,\vec{v}\,dt = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\,d\vec{r}$$

jako, że $d\vec{r}/dt = \vec{v}$. Wyrażenie $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\,d\vec{r}$ przedstawia pracę wykonaną przez siłę $\vec{F}$ na drodze od $\vec{r}_0$ do $\vec{r}$. Wartość tej pracy zależy na ogół od drogi całkowania. Jeżeli jednak istnieje jednoznaczna funkcja $V(\vec{r}, t)$, taka że

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \equiv -grad\,V, \tag{2.35}$$

wówczas mówimy, że siła $\vec{F}$ jest **potencjalna**, a samą funkcję $V(\vec{r}, t)$ nazywamy **potencjałem** tej siły. Ponieważ potencjał nie zależy od prędkości, więc też i siła potencjalna może być co najwyżej funkcją położenia i czasu. Jeżeli potencjał jest tylko funkcją położenia, $V = V(\vec{r})$, wówczas nazywamy go **energią potencjalną** PM, zaś o sile (2.35), mówimy, że jest **zachowawcza** lub **konserwatywna** lub **potencjalna**.

Jeżeli więc siła jest potencjalna, to

$$\vec{F}\,d\vec{r} = -grad\,V\,d\vec{r} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right).$$

Jeżeli $V = V(\vec{r})$, czyli jest energią potencjalną, to wyrażenie $\vec{F}d\vec{r}$ jest różniczką zupełną dV i mamy

$$T - T_0 = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} dV(\vec{r}) = -(V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0)) = -V + V_0.$$

A więc ostatecznie

$$T + V = T_0 + V_0. \tag{2.36}$$

Wielkość $T + V = E$ nazywamy **energią całkowitą** PM. Ze wzoru (2.36) wynika, że wielkość ta nie ulega zmianie w czasie ruchu o ile siły działające na PM są zachowawcze. Otrzymaliśmy w ten sposób **zasadę zachowania energii**. Z definicji widać wprost, że energia potencjalna wyznaczona jest przez siłę $\vec{F}$ z dokładnością do stałej addytywnej, tym razem niezależnej od położenia. Umożliwia to upraszczanie szeregu zagadnień przez przyjmowanie odpowiedniej wartości tej stałej. Jest to równoważne po prostu przesuwaniu początku skali wg której mierzymy energię potencjalną. Powierzchnie $V(\vec{r}) = const$ nazywamy **powierzchniami ekwipotencjalnymi**. Ze względu na związek $\vec{F} = -grad\, V(\vec{r})$, pole siły $\vec{F}$ jest wszędzie prostopadłe do powierzchni równego potencjału, $grad\, V(\vec{r})$ wskazuje bowiem kierunek zmian pola $V(\vec{r})$. Prostopadłość $\vec{F}$ oraz powierzchni $V(\vec{r}) = const$ można pokazać z zerowania się iloczynu skalarnego $\vec{F}$ oraz przesunięcia $d\vec{r}$ równoległego do powierzchni ekwipotencjalnej. Biorąc bowiem różniczkę zupełną równania powierzchni stałego potencjału $V(\vec{r}) = const$ mamy

$$dV = 0 = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = grad\, V\, d\vec{r}.$$

Podobnie jak w wypadku momentu pędu, wyrażenie (2.36) nazywamy całką energii. Jest to całka pierwsza równań Newtona gdy $\vec{F} = -grad\, V(\vec{r})$.

Jako przykład znajdowania potencjału obliczymy potencjał jednorodnego pola grawitacyjnego. Rozpatrzmy PM w pobliżu Ziemi, a więc $\vec{g} = \vec{const}.$ i siła ma postać $\vec{F} = m\vec{g}$. Ponieważ

$$\vec{F} = -\frac{dV}{d\vec{r}} = -\nabla V \equiv grad\, V \quad \text{więc} \quad V(\vec{r}) = V(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\, d\vec{r}.$$

W przypadku siły grawitacyjnej mamy więc

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} m\vec{g}\cdot\, d\vec{r} = V(\vec{r}_0) - m\vec{g}\cdot\vec{r} + m\vec{g}\cdot\vec{r}_0.$$

Jeżeli oś O_z będzie zgodna z kierunkiem działania siły grawitacyjnej, wówczas problem staje się jednowymiarowy i dla potencjału mamy

$$V(z) = -mgz + const.$$

Stałą możemy przyjąć za równą zeru i ostatecznie energia potencjalna PM w polu grawitacyjnym jest równa

$$V(z) = -mgz.$$

4.1. Układ punktów materialnych. Osiągnięte do tej pory wyniki można prosto uogólnić na układ wielu PM. Rozróżniać teraz będziemy siły zewnętrzne $\vec{F}_i^z$ oraz wewnętrzne. Te ostatnie to siły z jakimi dany PM działa na pozostałe PM układu. Równanie ruchu (Newtona) dla i-tego PM ma teraz postać

$$\vec{F}_i^z + \sum_j \vec{F}_{ij} = \dot{\vec{p}}_i, \tag{2.37}$$

gdzie $\vec{F}_{ij}$ to siła oddziaływania i-tego PM na j-ty. Ponieważ PM nie oddziałuje sam na siebie, więc $\vec{F}_{ii} = 0$. Do sił wewnętrznych stosuje się III prawo Newtona, stąd sumując (2.37) po wszystkich punktach układu otrzymujemy

$$\sum_i \vec{F}_i^z + \sum_{ij} \vec{F}_{ij} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i,$$

a stąd

$$\sum_i \vec{F}_i^z = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i,$$

$\sum_i \vec{F}_i^z$ oznacza sumaryczną siłę zewnętrzną działającą na układ PM. Dla układu PM można wyprowadzić, analogicznie jak dla pojedynczego PM, zasady zachowania. Będą one dotyczyć całkowitej masy układu oraz promienia wodzącego środka masy układu.

4.2. Więzy. Układ dotąd rozpatrywany był zbiorem swobodnych PM, tzn na jego ruch nie były nałożone żadne ograniczenia i zależał on jedynie od przyłożonej siły $\vec{F}$. Na ogół jednak PM (lub układ PM) musi pozostawać na pewnej powierzchni $f(x, y, z, t) = 0$ (dla i-go PM $f(x_i, y_i, z_i, t) = 0$) lub krzywej $f_1(\vec{r}, t) = 0\, f_2(\vec{r}, t) = 0$. Ponieważ równania te zawierają jawnie czas, dopuszczamy zmienność tych powierzchni, bądź krzywych w czasie. Przyczyny fizyczne powodujące pozostawanie PM w trakcie ruchu na takiej powierzchni nazywamy **więzami**, zaś odpowiednie równania - równaniami więzów. O funkcjach tych zakładamy, że są klasy C^2. Jeżeli równania więzów zależą jawnie od czasu, to więzy takie nazywamy *reonomicznymi*, jeśli zaś nie zależą - *skleronomicznymi* lub *stacjonarnymi*. Przykładem więzów stacjonarnych jest ruch PM po nieruchomej powierzchni, np kula tocząca się po stole. Przykład więzów zależnych od czasu to korek unoszący się na powierzchni strumienia.

Jeżeli na PM działa pewna siła $\vec{F}$, wówczas z równania Newtona, znając masę tego PM, możemy wyznaczyć przyspieszenie $\vec{a}$. Z drugiej jednak strony, do równań więzów wchodzi promień wodzący PM ($\vec{r}$). Różniczkując go dwukrotnie względem czasu otrzymujemy wyrażenie na przyspieszenie. Może okazać się, że jest ono różne od przyspieszenia wyznaczonego z równania Newtona, i odwrotnie, $\vec{a}$ z równania Newtona nie spełnia równania więzów. Aby usunąć tę sprzeczność należy siłę w równaniu Newtona uzupełnić o dodatkową wielkość $\vec{F}^R$, tak aby przyspieszenie obliczone z rozszerzonego równania Newtona spełniało równania więzów. $\vec{F}^R$ nazywamy **siłą reakcji więzów**. Nieswobodny PM musi więc spełniać równanie Newtona

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}^R$$

oraz równania więzów

$$f(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{lub} \quad f_1(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{i} \quad f_2(\vec{r}, t) = 0.$$

Więzy można klasyfikować na rozmaite sposoby. Przyjmiemy tutaj następujący podział - jeżeli ograniczenia nakładane przez istnienie więzów dadzą się przedstawić w postaci równości łączących współrzędne i czas, tzn w postaci

$$f(\vec{r}, t) = 0$$

lub

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad \text{dla układu } N \text{ PM}, \tag{2.38}$$

wówczas nazywać je będziemy *holonomicznymi*. Przykładem są więzy w ciele sztywnym, gdzie odległości pomiędzy PM są ustalone. Można to zapisać w postaci

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = c_{ij}^2.$$

Natomiast te więzy, których nie da się przedstawić w ten sposób nazywamy *nieholonomicznymi*. Przykładem jest ruch PM wewnątrz sfery, co zapisujemy w postaci

$$\vec{r}_i < a^2, \quad \text{gdzie } a \text{ jest promieniem sfery.}$$

Więzy wprowadzają do zagadnień mechaniki dwie trudności. Pierwsza z nich polega na tym, że nie wszystkie współrzędne $\vec{r}_i$ (dla układu PM) są liniowo niezależne, ponieważ związane są równaniami, bądź nierównościami więzów. Druga trudność polega na tym, że więzy wprowadzają nieznane a priori siły - siły reakcji więzów. Może to być np siła oddziaływania kuli na stół. Siłę taką należy dopiero wyznaczyć. Jeżeli mamy do czynienia z więzami holonomicznymi, wówczas pierwsza trudność zostaje pokonana przez wprowadzenie tzw **współrzędnych uogólnionych**. We współrzędnych kartezjańskich, jakimi do tej pory posługiwaliśmy się, układ N PM miał $3N$ niezależnych współrzędnych - jeżeli nie było więzów. Mówimy więc, że miał on 3N stopni swobody. Jeżeli na układ nałożonych jest k równań więzów holonomicznych, postaci (2.38), to spośród $3N$ dotychczasowych zmiennych niezależnych, tylko $3N - k$ pozostanie w dalszym ciągu niezależnymi. Układ będzie więc miał teraz tylko $3N - k$ stopni swobody. Musimy pozbyć się tych k zależnych zmiennych wprowadzając $3N - k$ nowych, niezależnych już, zmiennych $q_1, q_2, \ldots, q_{3N-k}$ i wyrażając stare współrzędne $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$ przez nowe. Otrzymujemy wtedy układ równań

$$\begin{aligned} r_1 &= r_1(q_1, q_2, \ldots, q_{3N-k}, t), \\ &\ldots \\ r_N &= r_N(q_1, q_2, \ldots, q_{3N-k}, t). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Równania te można traktować jako parametryczne przedstawienie zmiennych $r_1, \ldots, r_N$, przy czym równania więzów nie wchodzą jawnie do (2.39). O funkcjach $r_i(q,t)$ zakładamy, że są klasy C^2 . Wprowadźmy oznaczenie

$$n = 3N - k$$

na liczbę stopni swobody układu z więzami, lub, co jest równoważne, liczbę niezależnych współrzędnych uogólnionych. Mają one inny charakter niż współrzędne kartezjańskie. Nie można ich podzielić na trzy grupy, tak aby otrzymać wektory. Nie muszą także mieć wymiaru długości. n-wymiarową przestrzeń rozpiętą przez zmienne q nazywamy **przestrzenią konfiguracyjną**. Każdemu położeniu układu jako całości w chwili t odpowiada punkt w tej przestrzeni. Ruch układu jest tam przedstawiony jako pewna krzywa. Jeżeli więzy nie zależą od czasu, wówczas zawsze można tak wybrać współrzędne uogólnione aby czas nie wchodził jawnie do (2.39). W przypadku więzów nieholonomicznych więzy wprowadzają ograniczenia na prędkości (pochodne promienia wodzącego), stąd też nazywane są więzami *różniczkowymi* lub kinematycznymi, w odróżnieniu od więzów geometrycznych, czyli holonomicznych. W dalszym ciągu zajmować się będziemy wyłącznie więzami holonomicznymi.
Rozpatrzmy teraz drugą trudność wywołaną przez nałożenie więzów, tzn pojawienie się siły reakcji więzów. Wprowadźmy najpierw pojęcie przesunięcia rzeczywistego i wirtualnego. Niech na nasz układ N PM nałożonych będzie k równań więzów

$$f_\alpha(\vec{r}_i, t) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, k;\ i = 1, \ldots, N).$$

Obliczając różniczkę tego wyrażenia otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i}\, d\vec{r}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\, dt = 0 \tag{2.40}$$

lub

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i} \vec{v}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0.$$

Układ wektorów $\vec{v}_i$ nazywamy *prędkościami dopuszczalnymi* jeżeli spełniają one równania więzów. Są to więc prędkości dopuszczalne przez więzy. Na ogół dla danego czasu t i położenia punktów układu istnieje nieskończenie wiele możliwych prędkości zgodnych z więzami. Podczas rzeczywistego ruchu układu realizuje się jeden z nich. Z kolei układ nieskończenie małych przesunięć

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i\, dt \quad (i = 1, \ldots, N)$$

gdzie $\vec{v}_i$ to prędkości dopuszczalne, nazywamy przesunięciami *dopuszczalnymi*, bądź *rzeczywistymi*. Przesunięcia te spełniają równania więzów (2.40). Rozpatrzmy teraz dwa układy przesunięć rzeczywistych dla tego samego czasu t i tego samego położenia początkowego układu PM

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i\, dt \quad oraz \quad d\widehat{\vec{r}}_i = \widehat{\vec{v}}_i\, dt.$$

Każde z nich spełnia równania więzów. Wobec tego ich różnica

$$\delta\vec{r}_i = d\widehat{\vec{r}}_i - d\vec{r}_i \quad (i = 1, \ldots, N)$$

spełnia równanie jednorodne

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, k) \tag{2.41}$$

Wielkości $\delta \vec{r}_i$ nazywamy **przesunięciami wirtualnymi**. Aby odczytać sens fizyczny obu tych wielkości zauważmy, że przesunięcia wirtualne różnią się od rzeczywistych tym, że nie występuje tam człon

$$(\partial f_\alpha / \partial t)\, dt.$$

Dlatego też często mówi się, że przesunięcia wirtualne są to przesunięcia przy zamrożonych, niezmiennych, więzach. Jeśli bowiem ustalimy w równaniu więzów czas, wówczas różniczkując funkcje f_α człon z dt jest równy 0 i oba wyrażenia są identyczne. W przypadku więzów stacjonarnych nie ma różnicy między obu typami więzów.

Mamy wobec tego następujący problem - zadane są siły aktywne $\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)$ działające na punkty układu i dane są zgodne z więzami położenia początkowe $\vec{r}_i{}^0$ oraz prędkości początkowe $\vec{v}_i{}^0$ punktów układu $(i = 1, \ldots, N)$. Należy wyznaczyć ruch punktów układu i siły reakcji więzów $\vec{F}_i^R$. Przy tak postawionym zadaniu pojawia się trudność - należy wyznaczyć $6N$ wielkości skalarnych - x_i, y_i, z_i oraz F_i^{Rx}, F_i^{Ry}, F_i^{Rz} $(i = 1, \ldots, N)$, mając do dyspozycji mniejszą liczbę równań - $3N$ równań Newtona oraz k równań więzów. k oczywiście musi być mniejsze od $3N$. W przypadku $k = 3N$ układ nie ma żadnego stopnia swobody i nie może się poruszać. Tak więc musimy znaleźć dodatkowe $n = 3N - k$ równań. Otrzymamy je jeżeli ograniczymy się do pewnej klasy więzów, które nazywa się często więzami *idealnymi*. Są to takie więzy, dla których suma prac na przesunięciach wirtualnych znika :

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^R \, \delta \vec{r}_i = 0. \tag{2.42}$$

Spośród $3N$ wielkości $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ tylko $3N - k = n$ jest niezależnych. Możemy więc wykorzystać to równanie aby wyrazić przesunięcia zależne przez n niezależnych. Otrzymamy w ten sposób wyrażenie (2.42) w zmiennych niezależnych. Aby było ono spełnione konieczne jest aby zerowały się współczynniki przy niezależnych zmiennych. To daje nam szukanych n równań. Wprowadzenie przesunięć wirtualnych rozszerzyło klasę rozpatrywanych układów.

4.3. Ogólne równanie dynamiki. Zasada prac wirtualnych. Postarajmy się teraz znaleźć równanie opisujące ruch układu nieswobodnych PM. Równanie to nie powinno zawierać nieznanych sił reakcji więzów. Mamy równania Newtona

$$m\vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_i^R$$

oraz (2.42). Wyznaczając $\vec{F}^R$ z równań Newtona i wstawiając do (2.42), dostajemy

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i\right) \delta \vec{r}_i = 0, \tag{2.43}$$

zwane czasami **ogólnym równaniem dynamiki**. $\vec{F}_i$ jest tu wypadkową wszystkich sił aktywnych działających na i-ty PM. Równanie (2.43) jest spełnione dla dowolnego ruchu zgodnego z więzami (o co dbają siły reakcji więzów) pod działaniem sił $\vec{F}$. Ogólnie (2.43) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to aby ruch zgodny z więzami odpowiadał zadanemu układowi sił aktywnych.

Zajmijmy się teraz na chwilę statyką. Rozważać będziemy układ N PM znajdujący się w równowadze. Oznacza to, że jeżeli układ znajdował się w chwili początkowej w tym położeniu i prędkości wszystkich PM były równe zeru, to układ pozostanie w tym stanie dowolnie długo. Tego typu „ruch" również powinien wynikać z ogólnego równania dynamiki. Zgodnie z przyjętą definicją, w położeniu równowagi $\vec{v}_i = 0 \Rightarrow \vec{a}_i = 0$ i (2.43) redukuje się do

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \, \delta\vec{r}_i = 0. \tag{2.44}$$

Równość ta mówiąca, że w położeniu równowagi suma prac sił aktywnych na przesunięciach wirtualnych znika, nazywana jest **zasadą prac wirtualnych** lub **zasadą Lagrange'a**. Jest ona jednocześnie warunkiem koniecznym i dostatecznym na to aby dane położenie układu zgodne z więzami było położeniem równowagi. Zasada ta znana już była w czasach Galileusza (XVI-XVII w.) jako *złota zasada mechaniki*.

Zasadę prac wirtualnych otrzymaliśmy z ogólnego równania dynamiki. Możemy teraz spojrzeć na nie inaczej, a mianowicie potraktować je jako szczególny przypadek zasady prac wirtualnych, konkretnie jako równanie opisujące położenie równowagi układu. Należy w tym celu do rzeczywistych sił aktywnych działających na PM dołączyć umowne siły bezwładności $-m_i\vec{a}_i$. Otrzymujemy wówczas zasadę prac wirtualnych dla sił $(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i)$. Ujmuje to tzw **zasada d'Alemberta**:
Podczas ruchu układu PM dowolne położenie układu można uważać za położenie równowagi jeżeli do sił aktywnych, $\vec{F}_i$, działających na układ dołączyć umowne siły inercji $-m\vec{a}_i$.
Zasada d'Alemberta pozwala sprowadzić zagadnienia dynamiki do statyki. Czasami ogólne równanie dynamiki nazywane jest też zasadą d'Alemberta.

Warto zauważyć, że z ogólnego równania dynamiki (2.43) dla więzów stacjonarnych i układu zachowawczego wynika zasada zachowania energii. Mamy bowiem wtedy

$$\delta\vec{r}_i = d\vec{r}_i = \dot{\vec{r}}_i \, dt,$$

$$\sum \left(\vec{F}_i - \frac{d(m_i\dot{\vec{r}}_i)}{dt} \right) \dot{\vec{r}}_i \, dt = \sum \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i dt - \frac{d}{dt} \left(\sum \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \right) dt = 0$$

ale $\sum \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = T$ oraz dla układu konserwatywnego $\sum \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = -dV/dt$ a więc

$$\frac{d}{dt}(V+T)\, dt = 0 \quad \Rightarrow V + T = E = const. \tag{2.45}$$

5. Równania Lagrange'a II rodzaju.

Ogólne równanie dynamiki w postaci (2.43) nie ma dogodnej dla rachunków postaci. Wykorzystajmy teraz pojęcie współrzędnych uogólnionych. Pozwoli to nam zredukować liczbę równań ruchu do ilości równej liczbie stopni swobody. Zapiszmy (2.43) we współrzędnych uogólnionych, przejdźmy więc od zmiennych $\vec{r}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ do zmiennych q_j $(j = 1, \ldots, n)$, zgodnie z (2.39) : $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_n, t)$. Dla prędkości mamy

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{2.46}$$

Dla przesunięć wirtualnych (branych przy ustalonym czasie)

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{2.47}$$

Elementarna praca przy przesunięciach wirtualnych ma postać

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot, \delta\vec{r}_i,$$

ale ze względu na (2.47)

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\, \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \equiv \sum_{j=1}^{n} Q_j\, \delta q_j,$$

gdzie Q_j są **siłami uogólnionymi**

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \tag{2.48}$$

W położeniu równowagi $\delta A = 0$, więc również

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j\, \delta q_j = 0.$$

Ponieważ wielkości q_j są liniowo niezależne, więc w położeniu równowagi $Q_j = 0$. Znikanie sił uogólnionych jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na istnienie położenia równowagi. Podobnie jak współrzędne uogólnione nie muszą mieć wymiaru długości, tak i siły uogólnione nie muszą mieć wymiaru siły, jednak iloczyn $Q_j q_j$ musi mieć wymiar pracy.

Udało się nam wyrazić jeden ze składników (2.43) we współrzędnych uogólnionych. Zróbmy teraz to samo z drugim. Ma on postać

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i\, \delta \vec{r}_i.$$

Różniczkując (2.46) względem $\dot{q}_k$ dostajemy

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \tag{2.49}$$

Natomiast różniczkując (2.46) względem q_l dostajemy

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j\, \partial q_l} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t\, \partial q_l} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}$$

i wobec tego

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i\, \delta \vec{r}_i = \sum_i \sum_j m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\, \delta q_j = \sum_j Z_j\, \delta q_j$$

$$Z_j = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} =$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} - \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}.$$

Ponieważ $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ jest energią kinetyczną układu, więc

$$Z_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Tak otrzymane wartości możemy teraz podstawić do (2.43) otrzymując ogólne równanie dynamiki we współrzędnych uogólnionych

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0. \tag{2.50}$$

Jeżeli teraz rozpatrywane więzy są holonomiczne, wówczas możemy wyeliminować współrzędne zależne i wielkości δq są niezależne, a więc zerować się muszą wszystkie współczynniki. Otrzymujemy stąd układ równań

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.51}$$

Równania te, wynikające dla więzów holonomicznych z ogólnego równania dynamiki, nazywane są **równaniami Lagrange'a II rodzaju**. Występujące w nich wielkości $\dot{q}_j$ nazywamy **prędkościami uogólnionymi**. Do równań tych nie wchodzą jawnie siły reakcji więzów. Gdybyśmy jednak chcieli siły te wyznaczyć. można to zrobić po scałkowaniu równań Lagrange'a i wyznaczeniu z nich zależności $q_j = q_j(t)$. Zależności te należy następnie podstawić do równań

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_n, t)$$

i wyznaczyć stąd $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$. Następnie dwukrotnie różniczkując względem czasu znaleźć $\vec{a}_i = \ddot{\vec{r}}_i$. Nieznane siły reakcji więzów znajdujemy ze związków

$$\vec{F}_i^R = m_i\vec{a}_i - \vec{F}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Tak więc równania Lagrange'a II rodzaju są szukanym rozwiązaniem postawionego uprzednio problemu. Całkując dwukrotnie te równania otrzymujemy rozwiązanie ogólne, a następnie zadając warunki początkowe ($2n$ warunków - n dla położeń i n dla prędkości) możemy wyznaczyć tor PM w przestrzeni konfiguracyjnej. Jednocześnie możemy też wyznaczyć siły reakcji więzów. Równania Lagrange'a II rodzaju (RL2) są układem n równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu dla n nieznanych funkcyj q_j zmiennej niezależnej t. Rząd układu jest więc $2n$. Jeżeli teraz siły uogólnione Q_j nie zależą od prędkości uogólnionych, tzn są postaci $Q_j = Q_j(q_1, \ldots, q_n, t)$ $(j = 1, \ldots, n)$, oraz istnieje taka funkcja $V(q_1, \ldots, q_n, t)$, że

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{2.52}$$

wówczas siły uogólnione nazywamy potencjalnymi, a funkcję V - potencjałem tych sił. Jeżeli więc siły są potencjalne, możemy RL2 przepisać w postaci

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

ponieważ jednak potencjał nie zależy od prędkości uogólnionych, można to przepisać jako

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

lub też wprowadzając nową funkcję, zwaną **funkcją Lagrange'a** bądź **Lagrangianem**

$$L = T - V, \tag{2.53}$$

możemy zapisać RL2 w postaci

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \tag{2.54}$$

gdzie $L(q_j, \dot{q}_j, t) = T(q_j, \dot{q}_j, t) - V(q_j, t)$. Równania (2.54) to RL2 dla sił potencjalnych.

Warunki kiedy energia całkowita jest zachowana

Pokażemy teraz, że energia kinetyczna układu stacjonarnego jest funkcją jednorodną stopnia drugiego prędkości uogólnionych. Mamy bowiem

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^2 + 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\dot{q}_j + \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k + 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\dot{q}_j + \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j,k}^{n} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n} a_j\dot{q}_j + a_0$$

gdzie

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \quad a_j = 2\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \quad a_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2.$$

Ogólnie więc dla układu holonomicznego energia kinetyczna jest wielomianem stopnia drugiego względem prędkości uogólnionych

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k, \quad T_1 = \sum_{j} a_j\dot{q}_j, \quad T_0 = a_0.$$

Jeżeli nasz układ jest stacjonarny (skleronomiczny), wówczas więzy i równania łączące $\vec{r}_i$ z q_j nie zależą jawnie od czasu i $\partial r/\partial t = 0$ i wobec tego $a_0 = a_j = 0$. Ostatecznie dla układu holonomicznego i stacjonarnego mamy

$$T = T_2 = \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k. \tag{2.55}$$

Energia kinetyczna jest, jak widać, funkcją jednorodną stopnia 2 prędkości uogólnionych.

Pokażemy teraz od czego zależy zmiana całkowitej energii układu. Całkowitą energię układu E określimy jako sumę $E = T + V$. Narazie nie zakładamy niczego, poza holonomicznością, o naszym układzie. Nie musi być on stacjonarny i obok sił potencjalnych mogą występować siły niepotencjalne. Badać będziemy całkowitą zmianę energii w czasie, dE/dt. Zacznijmy od obliczenia dT/dt, gdzie $T = T(q_j, \dot{q}_j, t)$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\right]\dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.56}$$

Skorzystamy teraz ze znanego z analizy wzoru Eulera dla funkcyj jednorodnych

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}x_j = mf, \quad f(\lambda x_i) = \lambda^m f(x_i), \tag{2.57}$$

gdzie m jest stopniem jednorodności. Np $f(x,y) = x^2 + xy$ jest funkcją jednorodną stopnia drugiego. W naszym ogólnym przypadku $T = T_2 + T_1 + T_0$, gdzie dolny wskaźnik jest stopniem jednorodności. Tak więc

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = T_1 + 2T_2.$$

Korzystając z RL2 (2.51) w przedostatnim członie (2.56) , dostajemy

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_2) - \sum_{j=1}^{n} Q_j\dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial t}$$

Ponieważ na układ działają zarówno siły potencjalne jak i niepotencjalne ($\hat{Q}_j$), więc $Q_j = \hat{Q}_j - \partial V/\partial q_j$. Stąd

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_2) + \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial q_j} - \hat{Q}_j\right)\dot{q}_j =$$

$$2\frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{dV}{dt} - \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n}\hat{Q}_j\dot{q}_j.$$

Korzystając z tego, że $T + V = E$, mamy w końcu

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\hat{Q}_j\dot{q}_j + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t}. \tag{2.58}$$

Wzór ten daje nam zmianę całkowitej energii układu holonomicznego w czasie ruchu. Rozpatrzmy teraz poszczególne przypadki

(1) Układ stacjonarny

$$\partial\vec{r}/\partial t = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad T = T_2 \quad \Rightarrow \quad \partial T/\partial t = 0,$$

ponieważ T może zależeć od czasu tylko poprzez $\vec{r}$ (p. wzory dla a_{jk}, a_j i a_0).

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\hat{Q}_j\dot{q}_j + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

(2) Układ stacjonarny i potencjał nie zależy jawnie od czasu $V = V(q_j)$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\hat{Q}_j\dot{q}_j.$$

(3) Układ konserwatywny - tzn stacjonarny, wszystkie siły są potencjalne i potencjał nie zależy od czasu

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = const.$$

a więc całkowita energia układu jest zachowana. Stąd też nazwa - układ konserwatywny.

Jako pierwszy przykład posługiwania się RL2 rozpatrzmy ruch PM bez więzów. Najprostszy wybór współrzędnych uogólnionych to współrzędne kartezjańskie. Mamy wtedy

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Na PM działa siła $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ i wobec tego RL2 mają postać

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z$$

i jak widać, pokrywają się z równaniami Newtona dla PM bez więzów. Równań tych jest trzy, ponieważ na PM nie są nałożone żadne więzy, a więc ma on trzy stopnie swobody i posługujemy się trzema współrzędnymi uogólnionymi, które w tym przypadku są wprost współrzędnymi kartezjańskimi. Jeżeli dana jest siła zewnętrzna $\vec{F}$, to całkując otrzymane równania ruchu możemy (przynajmniej w zasadzie) otrzymać równania toru PM, co jest rozwiązaniem postawionego problemu.

W przykładzie, który przed chwilą rozpatrzyliśmy wybór współrzędnych uogólnionych był właściwie automatyczny. Niestety nie istnieje żadna ogólna metoda. która pozwalałaby na najlepszy wybór współrzędnych uogólnionych. Najlepszy tzn taki, który pozwoli rozwiązać dany problem najszybciej i najprościej. Potrzebne jest tutaj pewne wyczucie i wprawa. Np gdy PM znajduje się pod działaniem siły centralnej, wskazany jest wybór współrzędnych sferycznych, gdyż na ogół siła taka nie zależy od kierunku lecz tylko od odległości od centrum siły, tzn $\vec{F} = \vec{F}(r)$, a więc od jednej tylko współrzędnej biegunowej z pary (r, φ), natomiast we współrzędnych kartezjańskich zależy od obu, związanych ze sobą, zmiennych (x, y).

Jako drugi, nieco mniej banalny przykład, rozpatrzymy ruch PM w polu siły grawitacyjnej. Ruch ten wyznaczaliśmy poprzednio korzystając z równań Newtona. Ruch PM odbywa się w polu siły centralnej, jest więc płaski, co stanowi jedno ograniczenie na ruch PM - jedno równanie więzów. Mamy stąd 2 stopnie swobody i jako współrzędne uogólnione możemy wybrać np współrzędne kartezjańskie (x, y). Potencjał ma postać

$$V = V(y) = mgy$$

natomiast energia kinetyczna

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

i stąd funkcja Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy.$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y},$$

Stąd równanie dla współrzędnej x

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}m\dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = const = C_1 \Rightarrow x(t) = C_1 t + C_2,$$

i dla współrzędnej y

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt}m\dot{y} + mg = 0$$

i stąd

$$\dot{y} = -gt + C_3 \quad \Rightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4.$$

Wybierając warunki początkowe odpowiadające np swobodnemu spadkowi z punktu $(0, y_0)$ dostajemy

$$\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0, \quad x(0) = 0, \, y(0) = y_0.$$

Stąd mamy dla stałych

$$\dot{x}(0) = C_1, \quad x(0) = C_2 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0,$$
$$\dot{y}(0) = C_3, \quad y(0) = C_4 \Rightarrow C_3 = 0, \, C_4 = y_0.$$

Ostatecznie więc dostajemy równanie dla PM

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0.$$

Jako następny przykład znajdziemy równanie ruchu (RL2) dla wahadła matematycznego. Jest to PM o masie m zawieszony na nieważkiej i nierozciągliwej nici o zadanej długości l, na który działa siła grawitacji. Zaczniemy od znalezienia liczby stopni swobody takiego układu. W zależności od tej liczby będziemy mieli odpowiednią liczbę współrzędnych uogólnionych. Układ złożony jest z 1 PM, a więc liczba stopni swobody $n = 3 - k$, gdzie k to liczba równań więzów. Ruch wahadła odbywa się w stałej płaszczyźnie, np $z = 0$, co daje jedno równanie więzów. Ponieważ PM zawieszony jest na nici o stałej długości, więc $x^2 + y^2 = l^2 = const$. Mamy dwa równania więzów, czyli nasz układ ma jeden stopień swobody ($n = 3 - 2 = 1$). Wprowadzimy więc jedną zmienną uogólnioną. Najlepiej jest w tym celu wybrać kąt φ wychylenia PM od osi O_y. Mamy wtedy

$$x = l\sin\varphi, \quad y = l\cos\varphi, \quad z = 0.$$

Siła grawitacji działająca na PM skierowana jest np wzdłuż osi O_y, tzn $\vec{F} = (0, mg, 0)$. Potencjał tej siły

$$V = -\int \vec{F}\, d\vec{r} = -mgy = -\, mgl\cos\varphi.$$

Dalej

$$\dot{x} = l\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \dot{y} = -l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

Stąd

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2.$$

Dla funkcji Lagrange'a mamy

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$$

i jedno RL2 , bo jest jedna współrzędna uogólniona

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0.$$

Ostatecznie

$$l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0.$$

Równanie to daje się prosto rozwiązać w wypadku małych wychyleń, tzn wtedy gdy $\sin\varphi \cong \varphi$. Równanie ruchu ma wtedy postać

$$l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0,$$

a więc jest takie jak równanie oscylatora harmonicznego.

ROZDZIAŁ 3

Zasada Hamiltona

1. Podstawowe wiadomości z rachunku wariacyjnego

W rachunku wariacyjnym zajmujemy się funkcjonałami. Są to zmienne, których wartości zależą od jednej lub kilku funkcyj. Przykładem funkcjonału jest np długość krzywej łączącej zadane dwa punkty. Długość ta zależy bowiem od wyboru funkcji $y = y(x)$ przechodzącej przez te punkty. Funkcjonał taki ma postać

$$l[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (1 + y'^2)^{1/2} dx. \tag{3.1}$$

Zajmować się będziemy szukaniem warunków na ekstremum funkcjonałów. Zaczniemy od paru definicji.

(1) Zmienna v nazywa się **funkcjonałem** zależnym od funkcji $y(x)$, co zapisujemy $v = v[y(x)]$, jeżeli każdej funkcji $y(x)$ z pewnej klasy funkcyj, przyporządkowana jest pewna liczba v.
Analogiczna definicja dla funkcyj ma postać:
Zmienna z nazywa się funkcją zmiennej x ($z = z(x)$), jeżeli każdej wartości x z pewnego obszaru zmienności, odpowiada pewna wartość zmiennej z. Innymi słowy, jeżeli liczbie x przyporządkowana jest liczba z.

(2) Przyrostem, lub **wariacją** (bez wariacji parametru) δy argumentu $y(x)$ funkcjonału $v[y(x)]$ nazywamy różnicę między dwiema funkcjami $y(x) - y_1(x) = \delta y$. Zakładamy przy tym, że $y(x)$ zmienia się w sposób dowolny w pewnej klasie funkcyj.
Przyrostem Δx argumentu funkcji $z(x)$ nazywamy różnicę między dwiema wartościami tej zmiennej $\Delta x = x - x_1$. Jeżeli x jest zmienną niezależną, wówczas przyrost jest identyczny z różniczką $\Delta x = dx$.

(3) Mówimy, że funkcjonał $v[y(x)]$ jest *ciągły* na krzywej $y = y_0(x)$, jeżeli dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że $|v[y(x)] - v[y_0(x)]| < \epsilon$, jeżeli tylko $|y(x) - y_0(x)| < \delta$, przy czym zakładamy, że funkcja $y(x)$ należy do klasy funkcyj dla których funkcjonał $v[y(x)]$ jest określony.
Funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie $x = x_0$, jeżeli dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ jeżeli tylko $|x - x_0| < \delta$, przy czym zakładamy, że x przyjmuje wartości dla których funkcja $f(x)$ jest określona.

(4) Funkcjonał $v[y(x)]$ nazywa się *liniowym*, jeżeli spełniony jest warunek $v[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] = c_1 v[y_1(x)] + c_2 v[y_2(x)]$ gdzie c_1 i $_2c$ są dowolnymi stałymi.
Funkcja $f(x)$ nazywa się liniową, jeżeli $f(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$.

(5) **Wariację funkcjonału** (bez wariacji parametru x) $v[y(x)]$ oznaczamy przez $\delta v[y(x)]$ i jest ona równa

$$\delta v[y(x)] = \frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x) + \alpha \delta y]\big|_{\alpha=0} = v'[y(x)]\delta y.$$

Różniczka funkcji $f(x)$, oznaczana przez df, jest równa

$$df = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x)\big|_{\alpha=0} = f'(x)\Delta x$$

Podobnie dla funkcjonału wielu zmiennych

$$\delta v[y_1(x)...y_n(x)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i}\delta y_i.$$

(6) Mówimy, że funkcjonał $v[y(x)]$ osiąga na krzywej $y = y_0(x)$ maksimum, jeżeli wartość tego funkcjonału na dowolnej krzywej bliskiej krzywej $y = y_0(x)$ jest nie większa niż $v[y_0(x)]$, tzn gdy $\Delta v = v[y(x)] - v[y_0(x)] \leq 0$. Jeżeli dodatkowo $\Delta v = 0$, wtedy i tylko wtedy gdy $y(x) = y_0(x)$, wówczas mówimy, że jest to maksimum w ścisłym sensie. Analogicznie określamy minimum.

Twierdzenie

Jeżeli funkcjonał $v[y(x)]$ ma wariację i osiąga ekstremum dla $y = y_0(x)$, to przy $y = y_0(x)$ mamy $\delta v = 0$.

Analogiczne twierdzenie dla funkcyj:
Jeżeli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna i osiąga ekstremum w punkcie wewnętrznym x_0, to w tym punkcie $df = 0$.
Dowód dla funkcjonałów.
Jeżeli $y_0(x)$ oraz δy są ustalone, wówczas $v[y_0(x) + \alpha\delta y] = \varphi(\alpha)$ jest funkcją α i zgodnie z założeniem, funkcja ta osiąga ekstremum dla $\alpha = 0$, a więc mamy tam $\varphi'(0) = 0$, lub przepisując to inaczej

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} v[y_0(x) + \alpha\delta y]\big|_{\alpha=0} = 0,$$

tzn $\delta v = 0$. Tak więc na krzywych na których funkcjonał osiąga ekstremum jego wariacja znika.■

Będziemy teraz chcieli znaleźć krzywe na których osiąga ekstremum następujący funkcjonał

$$v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F\left(y(x), y'(x), x\right) dx, \quad \text{gdzie} \quad y' \equiv \frac{dy}{dx}, \tag{3.2}$$

przy czym końce wszystkich krzywych jakie bierzemy pod uwagę, czyli tzw *krzywych dopuszczalnych*, są ustalone, tzn $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$. Zakładamy, że funkcja $F(x, y, y')$ jest trzykrotnie różniczkowalna, oraz że ekstremum funkcjonału jest realizowane na dwukrotnie różniczkowalnej krzywej $y = y_0(x)$. Weźmy teraz dowolną krzywą dopuszczalną $y = y^*(x)$, bliską krzywej $y = y_0(x)$ i włączmy obie w jedno-parametrową rodzinę

$$y(x, \alpha) = y_0(x) + \alpha[y^*(x) - y_0(x)].$$

$y^*(x) - y(x)$ jest, z definicji, wariacją argumentu $y(x)$. Mamy więc dla $\alpha = 1$ pewną krzywą dopuszczalną. Jeżeli teraz rozpatrywać będziemy wartości funkcjonału (3.2) tylko na krzywych rodziny $y(x, \alpha)$, wówczas funkcjonał zamieni się w funkcję zmiennej $\alpha : v[y(x, \alpha)] = \varphi(\alpha)$, gdyż parametr α określa krzywą z rodziny $y(x, \alpha)$, a tym samym wartość funkcjonału. Ponieważ osiąga on ekstremum dla $\alpha = 0$, wobec tego również dla $\alpha = 0$ funkcja $\varphi(\alpha)$ będzie miała ekstremum, którego warunkiem koniecznym jest $\varphi'(0) = 0$. Funkcja $\varphi(\alpha)$ zdefiniowana jest jako

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} F\left(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x\right) dx,$$

a więc

$$\varphi'(\alpha) = \int \left(F_y \frac{\partial}{\partial\alpha} y(x, \alpha) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial\alpha} y'(x, \alpha) \right) dx,$$

gdzie

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F\left(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x\right), \quad F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F\left(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x\right),$$

ponieważ

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = \int \left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) dx, \qquad \frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0.$$

Ale $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\delta y$, więc

$$\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \delta y, \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \delta' y.$$

Wobec tego

$$\frac{d}{d\alpha}\varphi(\alpha) = \int \big(F_y(y(x,\alpha), y'(x,\alpha), x)\delta y \;+\; F_{y'}(y(x,\alpha), y'(x,\alpha), x)\delta y'\big)dx.$$

Tak więc warunek konieczny na istnienie ekstremum ma postać

$$\delta v = \int \left(F_y \delta y + F_{y'}\delta y'\right) dx = 0.$$

Ponieważ $\delta y' = (\delta y)'$, drugi wyraz można całkować przez części, otrzymując

$$\delta v = F_{y'}\delta y\big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dx}\right) \delta y dx.$$

Końce są ustalone, więc

$$\delta y\big|_{x=x_1} = y^*(x_1) - y_0(x_1) = 0, \quad \delta y\big|_{x=x_2} = 0,$$

gdyż wszystkie krzywe przechodzą przez ten sam punkt początkowy i końcowy, więc

$$\delta v = \int_{x_1}^{x_2} \left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dx}\right) \delta y dx = 0. \tag{3.3}$$

Wykorzystamy teraz

Zasadniczy lemat rachunku wariacyjnego.

Mówi on, że jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $[a,b]$ oraz

$$\int_a^b f(x)\nu(x)dx = 0,$$

gdzie $\nu(x)$ jest funkcją spełniającą jedynie pewne ogólne warunki (np. różniczkowalność, bądź znikanie na krańcach przedziału), a oprócz tego dowolną, wówczas $f(x) \equiv 0$ w $[a,b]$.

Dowód (a contrario)

Załóżmy, że $f(x^*) \neq 0$ dla $x^* \in [a,b]$. Wobec tego i ciągłości $f(x)$, zachowuje ona swój znak w pewnym otoczeniu $[x_0, x_1]$ punktu x^*. Wybierzmy wówczas funkcję $\nu(x)$ tak aby i ona zachowywała znak w tym otoczeniu, a znikała poza nim. Otrzymamy wtedy

$$\int_a^b f(x)\nu(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\nu(x)dx \neq 0,$$

ponieważ iloczyn zachowuje znak w przedziale $[x_0, x_1]$ i znika poza nim. Otrzymaliśmy więc sprzeczność, czyli $f(x) \equiv 0$. ■

We wzorze (3.2) funkcja $F_y - dF_{y'}/dx$ jest ciągła w $[x_1, x_2]$, zaś δy znika na krańcach przedziału całkowania. Korzystając z lematu wynika więc, że

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0,$$

co można przepisać inaczej

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0. \tag{3.4}$$

Otrzymane równanie nosi nazwę **równania Eulera** lub Eulera-Lagrange'a. Krzywe całkowe tego równania nazywane są *ekstremalami* i są krzywymi na których funkcjonał (3.2) osiąga ekstremum. Tak więc aby wyznaczyć krzywą na jakiej funkcjonał (3.2) osiąga ekstremum należy znaleźć krzywe całkowe równania (3.4).

W przypadku n-wymiarowym mamy funkcjonał

$$v\left[y_1(x)...y_n(x)\right] = \int_1^2 F\left(y_1(x)...y_n(x), y_1'(x)...y_n'(x), x\right) dx \tag{3.5}$$

i odpowiadający mu układ równań Eulera

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{3.6}$$

Jako przykład posługiwania się równaniami Eulera znajdziemy krzywą na jakiej osiąga ekstremum funkcjonał

$$v[y(x)] = \int_0^{\pi/2} \left((y')^2 - y^2\right) dx$$

przy warunkach brzegowych postaci $y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1$.
Funkcja $F\left(y(x), y'(x), x\right)$ ma teraz postać $F = (y')^2 - y^2$. Podstawiając ją do równania Eulera (3.4), dostajemy

$$F_y = -2y, \quad F_{y'} = 2y'$$

i stąd

$$y'' + y = 0.$$

Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Wykorzystując warunki brzegowe otrzymujemy $C_1 = 0, \quad C_2 = 1$ i rozwiązanie szczególne

$$y = \sin x.$$

Ekstremum funkcjonału będzie więc realizowane na funkcji sinus.

Równanie Eulera (3.4) można zapisać też dla ogólnego przypadku, tzn gdy funkcja $F = F(y, y', x)$, w postaci (stosujemy oznaczenie $F_y \equiv \partial F/\partial y$)

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' \;=\; 0. \tag{3.7}$$

Jeżeli teraz np $F = F(y, y')$, to równanie Eulera (3.7) redukuje się do

$$F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' \;=\; 0.$$

Pomnóżmy to przez y', co pozwoli nam zwinąć to wyrażenie do postaci

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'F_{y'}\right) \;=\; 0,$$

a to z kolei oznacza, że otrzymaliśmy całkę pierwszą równań Eulera

$$F - y'F_{y'} \;=\; const = C_1.$$

Jako przykład znajdziemy krzywą o ustalonych końcach, przy obrocie której wokół osi odciętych (Ox) tworzy się powierzchnia o najmniejszym polu.
Pole powierzchni obrotowej dane jest przez wzór

$$S[y(x)] \;=\; 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + (y')^2}dx. \tag{3.8}$$

Funkcja F ma więc postać $F = F(y, y')$ i stąd równanie Eulera (3.6)

$$y\sqrt{1+(y')^2} - \frac{y(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1$$

Równanie to da się sprowadzić do prostszej postaci

$$\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1. \tag{3.9}$$

Dokonując podstawienia

$$y' = \sinh t,$$

dostajemy, wykorzystując (3.9)

$$y = C_1\sqrt{1+(y')^2} = C_1 \cosh t.$$

Tak więc

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \sinh t dt}{\sinh t} = C_1 dt.$$

Stąd równanie parametryczne (parametrem jest t) szukanej krzywej

$$x = C_1\, t + C_2, \qquad y = C_1 \sinh t.$$

Po wyrugowaniu parametru otrzymujemy ostatecznie

$$y = C_1 \sinh \frac{x - C_2}{C_1}.$$

2. Zasada Hamiltona

Omówione dotąd równania i zasady, takie jak równania Newtona, Lagrange'a lub d'Alemberta są tzw *zasadami infinitezymalnymi* (zasadami nieskończenie małych) lub różniczkowymi, gdyż przy ich wyprowadzeniu rozważaliśmy położenia układu w nieskończenie małych przedziałach czasu. Zawierają one pochodne względem czasu współrzędnych PM. Oprócz zasad różniczkowych istnieją także w mechanice *zasady całkowe.* O ile zasady różniczkowe rozpatrują ruch układu po zadanej krzywej w kolejnych chwilach czasu, to zasady całkowe dotyczą ruchu układu w całym przedziale czasu, wybierając jedną spośród wielu dopuszczalnych krzywych, po których dany ruch może się odbywać. Zasady różniczkowe związane są z rachunkiem różniczkowym, natomiast zasady całkowe z rachunkiem wariacyjnym.

Rozpatrzmy teraz ruch układu w przestrzeni konfiguracyjnej, tzn przestrzeni utworzonej przez n współrzędnych uogólnionych $q_1, ..q_n$, przy czym czas t jest parametrem. W przestrzeni tej położenie całego układu w danej chwili t wyznaczone jest przez jeden punkt, a ruch układu wyznacza pewną krzywą - trajektorię układu. Ruch jest więc opisany przez funkcję $q_j = q_j(t), (j = 1, ...n)$ i nazwiemy go *ruchem rzeczywistym.* Zakładamy przy tym, że funkcja $q_j(t) \in C^2$. *Wariacją* współrzędnej uogólnionej (bez wariacji czasu) nazwiemy teraz wyrażenie $\delta q_j = q_j^*(t) - q_j(t)$, gdzie $q_j^*(t)$ jest ruchem porównawczym. Możemy więc uważać, że wariacja $\delta q_j(t)$ opisuje „odstępstwo" krzywej (ruchu) porównawczej od krzywej (ruchu) rzeczywistej. Pamiętając o tym jak oblicza się wariację z funkcjonału $f\,(y(x), y'(x), x)$ mamy dla wariacji (bez wariacji parametru) funkcjonału $\vec{r}_i = \vec{r}_i\,(q_1(t), ...q_n(t))$

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j,$$

a to pokrywa się z podanym poprzednio (2.47) wzorem dla przesunięć wirtualnych. Możemy więc powiedzieć, że wariacje wektorów wodzących są wprost przesunięciami wirtualnymi punktów układu.

W dalszym ciągu interesować się będziemy nie dowolnymi ruchami porównawczymi, lecz tylko takimi dla których położenia w ustalonych chwilach t_0 i t_1 (są to zwykle punkt początkowy i końcowy) pokrywają się. Ruchy te mają więc dwa wspólne punkty w przestrzeni konfiguracyjnej: $q_0 = q(t_0)$ oraz $q_1 = q(t_1)$. W punktach tych wariacje znikają $\delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0$.

Załóżmy teraz, że rozpatrywany układ jest naturalny, tzn że posiada potencjał V lub potencjał uogólniony U. Istnieje wobec tego funkcja Lagrange'a L. Zdefiniujmy funkcjonał

$$W[q_1...q_n] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(q_1...q_n, \dot{q}_1...\dot{q}_n, t\right) dt. \tag{3.10}$$

Funkcjonał ten nazywamy **działaniem Hamiltona** w przedziale czasu $[t_0, t_1]$. Działanie to ma wymiar energia razy czas.

Możemy teraz sformułować **zasadę Hamiltona** dla układów naturalnych
Dla ruchu rzeczywistego i tylko dla ruchu rzeczywistego, w dowolnym przedziale czasu $[t_0, t_1]$ *mamy*

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} L\left(q_1...q_n, \dot{q}_1...\dot{q}_n, t\right) dt = 0. \tag{3.11}$$

Oznacza to, że działanie Hamiltona ma ekstremum na trajektorii ruchu rzeczywistego. Ponieważ ruch rzeczywisty można określić w oznaczeniach rachunku wariacyjnego jako ruch dla którego $\delta y(x) = 0$ lub $\delta q(t) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, stąd dowód zasady Hamiltona wynika wprost z twierdzenia o ekstremum dla funkcjonałów.

Zasada Hamiltona może być punktem wyjścia całej mechaniki klasycznej, można bowiem z niej wyprowadzić RL2. Wiemy już, że żądanie aby wariacja z funkcjonału $v[y(x)] = \int F\left(y, \dot{y}, x\right) dx$ znikała, prowadzi do równań Eulera. Wystarczy więc formalnie zamienić w funkcjonale (3.5)

$$x \to t, \quad y_j \to q_j, \quad F\left(y_j, y_j', x\right) \to L\left(q_j, \dot{q}_j, t\right),$$

aby zamiast funkcjonału (3.5) otrzymać działanie Hamiltona. Taka sama formalna zmiana w wynikających z warunku $\delta v = 0$ równaniach Eulera prowadzi do RL2. Równania te można zresztą otrzymać też inaczej. Mamy bowiem

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

przy warunkach brzegowych $\delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0$. Korzystając z definicji wariacji funkcjonału oraz całkując przez części mamy

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) dt =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt.$$

Skorzystaliśmy tu z przemienności operacji wariacji δ i różniczkowania względem czasu:

$$\delta \dot{q}_j(t) = \delta \frac{d}{dt} q_j(t) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} \left(q_j + \delta q_j \alpha\right) \Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(q_j + \delta q_j \alpha\right) = \frac{d}{dt} \delta q_j.$$

Ponieważ zasada Hamiltona jest spełniona dla dowolnych funkcyj δq_j, możemy je więc wybrać dowolnie, np tak aby $\delta q_j = \delta_{jk} \delta q_k$ gdzie δ_{jk} jest symbolem Kroneckera, zaś k jedną z liczb $1...n$. Oznacza to, że zamieniamy jedną współrzędną, nie zmieniając pozostałych. Ostatnią równość możemy wówczas przepisać w postaci

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k dt=0, \qquad (k=1,...,n).$$

Ponieważ δq_k znika na krańcach, zaś wyrażenie w nawiasie jest ciągłą funkcją wewnątrz przedziału $[t_0,t_1]$, bo $L\in C^2$, więc spełnione są założenia podstawowego lematu rachunku wariacyjnego i otrzymujemy wprost RL2. Możliwe jest również przejście odwrotne, tzn wyprowadzenie zasady Hamiltona z RL2 lub bezpośrednio z ogólnego równania dynamiki.

Wyprowadzając zasadę Hamiltona z tego równania pokażemy jednocześnie jak modyfikuje się ona w przypadku sił niepotencjalnych. Ogólne równanie dynamiki ma postać

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i-m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\delta\vec{r}_i=0.$$

Wiemy, że

$$\sum \vec{F}_i\delta\vec{r}_i=\sum Q_i\delta q_i=\delta A$$

i jest elementarną pracą sił aktywnych na przesunięciach wirtualnych. Jednocześnie ponieważ $\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_i)=\delta\dot{\vec{r}}_i$, więc

$$\sum m_i\ddot{\vec{r}}_i\delta\vec{r}_i=\frac{d}{dt}\sum m_i\dot{\vec{r}}_i\delta\vec{r}_i-\sum m_i\dot{\vec{r}}_i\delta\dot{\vec{r}}_i=\frac{d}{dt}\sum m_i\dot{\vec{r}}_i\delta\vec{r}_i-\delta T,$$

gdzie δT jest wariacją energii kinetycznej $T=1/2\sum m_i\dot{\vec{r}}_i^2$. Możemy więc ogólne równanie dynamiki zapisać jako

$$\delta A+\delta T-\frac{d}{dt}\sum m_i\dot{\vec{r}}_i\delta\vec{r}_i=0.$$

Scałkujmy teraz obie części równania w granicach od t_0 do t_1. Dostaniemy

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta A+\delta T)\,dt-\left[\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i\delta\vec{r}_i\right]_{t=t_0}^{t=t_1}=0.$$

Ponieważ punkty początkowy i końcowy są ustalone i z założenia przechodzą przez nie wszystkie krzywe całkowe, więc $\delta\vec{r}_i(t_0)=\delta\vec{r}_i(t_1)=0$. Ostatecznie dostajemy

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta A+\delta T)\,dt=0. \tag{3.12}$$

Wzór ten przedstawia zasadę Hamiltona w ogólnym przypadku kiedy siły nie muszą być potencjalne, a więc kiedy nie można napisać funkcji Lagrange'a. Jeżeli siły są potencjalne, wówczas

$$\delta A=\sum_{j=1}^{m}Q_j\delta q_j=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_j}\delta q_j=-\delta V,$$

a więc mamy

$$\delta T-\delta V=\delta L$$

i otrzymujemy zasadę Hamiltona. Wzór (3.12) jest identyczny z (3.11).

ROZDZIAŁ 4

Prawa zachowania we współrzędnych uogólnionych

Rozpatrując dotąd równania ruchu układu PM nie interesowaliśmy się zupełnie problemem rozwiązania tych równań. Niestety klasa równań jakie dają się scałkować, nie jest duża. Jeżeli mamy bowiem układ PM o n stopniach swobody, wówczas opisuje go układ n równań różniczkowych drugiego rzędu. Musimy więc wykonać ogółem $2n$ całkowań i wyznaczyć z warunków początkowych dla q_j i $\dot{q}_j$ $2n$ pojawiających się stałych. Zadanie takie jest bardzo trudne i trzeba szukać innych sposobów aby uzyskać informację o ruchu układu. W wielu przypadkach można stosunkowo łatwo, bądź nawet odrazu, uzyskać całki pierwsze równań ruchu, tzn wyrażenia postaci $F(q_1...q_n, \dot{q}_1...\dot{q}_n, t) = \text{const}$, czyli funkcje zawierające tylko pierwszą pochodną położenia względem czasu. Całki te dają często cenne informacje o rozpatrywanym układzie. Często maja one postać **zasad zachowania**, czyli informacji o tym jakie wielkości nie ulegają zmianie w trakcie ruchu układu. Z problemem tym spotkaliśmy się już przy omawianiu równań Newtona. Aby te zasady znaleźć w nowej postaci uogólnimy pewne znane pojęcia. Na początek rozpatrzmy układ zachowawczy, a jako współrzędne uogólnione przyjmijmy współrzędne kartezjańskie. Mamy wtedy

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{2} \left(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2 \right) = m_i \dot{x}_i = p_{ix},$$

gdzie p_{ix} jest x-ową składową wektora pędu i-go PM. Pojęcie to uogólnimy teraz wprowadzając **pęd uogólniony**, zdefiniowany w analogii do poprzedniej definicji jako

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \qquad (j = 1, ..., n). \tag{4.1}$$

W ten sposób każdej współrzędnej uogólnionej q_j odpowiada pęd uogólniony p_j, zwany często pędem *kanonicznie sprzężonym* ze współrzędną q_j. Jeżeli q_j nie jest współrzędną kartezjańską i nie ma wymiaru długości, wówczas pęd uogólniony p_j nie ma wymiaru zwykłego pędu.

Zdefiniujmy teraz **współrzędną cykliczną** jako taką współrzędną, która nie wchodzi jawnie do funkcji Lagrange'a. Niech będzie to np współrzędna q_k. Dla takiej współrzędnej

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,$$

a więc RL2 redukują się do

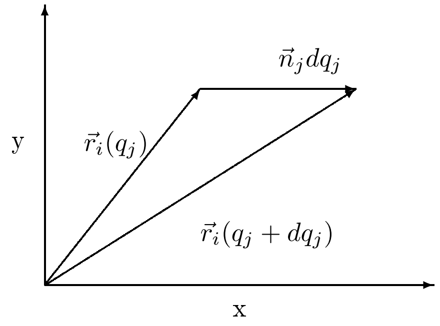
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0.$$

To jednak ze względu na (4.1) można zapisać w postaci

$$\frac{dp_k}{dt} = 0 \Rightarrow p_k = const, \quad (k = 1, ..., n). \tag{4.2}$$

Na tej podstawie możemy sformułować następującą zasadę zachowania:
Jeżeli współrzędna q_j jest cykliczna, to odpowiadający jej pęd uogólniony jest zachowany.

Jak widać, zasada zachowania pędu uogólnionego ma postać całki pierwszej równań ruchu i otrzymaliśmy ją bez konieczności całkowania tych równań, ale jako następstwo faktu, że odpowiednia współrzędna



RYSUNEK 4.1. Przypadek gdy q_j jest przesunięciem układu.

uogólniona jest cykliczna. Od wyprowadzonej poprzednio zasady zachowania pędu obecna różni się tym, że jest ona ogólniejsza. Przy jej wyprowadzeniu nie korzystaliśmy z III zasady Newtona, jest więc słuszna także dla sił działających między poruszającymi się ładunkami elektrycznymi. Po wtóre, jak za chwilę zobaczymy, z zasady zachowania pędu uogólnionego wynika zarówno zasada zachowania pędu (zwykłego) jak też i momentu pędu. Związane jest to z szerszą definicją współrzędnej uogólnionej.

Załóżmy najpierw, że współrzędna uogólniona q_j, o której narazie nie zakładamy, że jest cykliczna, jest taka, że dq_j odpowiada przesunięciu układu jako całości. Współrzędną taką może być np jedna ze współrzędnych środka masy układu. Ponieważ nie zmieniają się prędkości poszczególnych cząstek, nie zmienia się przy takim przesunięciu też energia kinetyczna układu. Tak więc T nie zależy od q_j, czyli

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0.$$

Niech nasz układ będzie konserwatywny, a więc RL2 dla współrzędnej q_j ma postać

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \equiv \dot{p}_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j, \quad \text{czyli} \quad \dot{p}_j = Q_j, \qquad j = 1, .., n. \tag{4.3}$$

Aby pokazać, że prowadzi to do zasady zachowania zwykłego pędu trzeba wykazać, że przy takim określeniu q_j wielkość p_j ma związek z całkowitym pędem. Konkretnie, jest rzutem pędu układu na kierunek zmiany współrzędnej q_j. Podobnie Q_j powinno być rzutem całkowitej siły na kierunek zmiany q_j. Przesunięcie układu jako całości jest przedstawione na rysunku 4.1.

$\vec{n}_j$ jest wersorem w kierunku zmiany współrzędnej q_j i nie zależy od wskaźnika i ponieważ wszystkie punkty układu przesuwane są w ten sam sposób.
Mamy więc

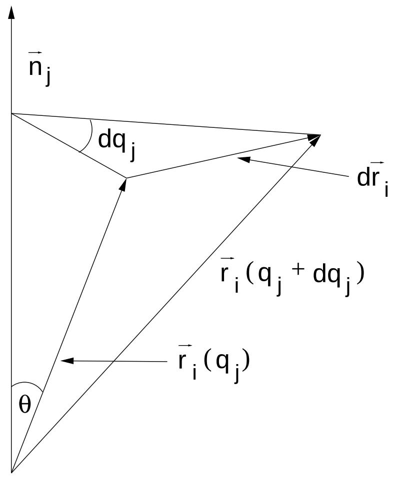
$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{dq_j \to 0} \frac{\vec{r}_i(q_j + dq_j) - \vec{r}_i(q_j)}{dq_j} = \lim_{dq_j \to 0} \frac{\vec{n}_j dq_j}{dq_j} = \vec{n}_j.$$

Z drugiej strony

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j},$$

a więc

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{n}_j = \vec{n}_j \cdot \vec{F},$$



RYSUNEK 4.2. Przypadek gdy q_j jest zmienną kątową.

gdzie $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ jest całkowitą siłą. W ten sposób pokazaliśmy, że Q_j jest rzutem całkowitej siły na kierunek zmiany współrzędnej q_j, który jest wyznaczony przez wersor $\vec{n}$.

Zajmijmy się teraz pędem. Ponieważ $T = \frac{1}{2}\sum m_i \vec{v}_i{}^2$, więc pęd uogólniony możemy zapisać w postaci

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{n}_j = \vec{n}_i \cdot \vec{P}.$$

Skorzystaliśmy tu z (2.49). Tak więc p_j jest rzutem całkowitego pędu $\vec{P} = \sum \vec{p}_j$, na kierunek zmiany współrzędnej q_j. Jeżeli współrzędna q_j jest cykliczna, wówczas $\partial V/\partial q_j = -Q_j = 0$ i zasada zachowania pędu uogólnionego sprowadza się do zasady zachowania zwykłego pędu.

Niech teraz q_j będzie taką współrzędną uogólnioną, że dq_j odpowiada obrotowi układu jako całości wokół pewnej osi. Zasada zachowania pędu uogólnionego prowadzi wówczas do zasady zachowania momentu pędu. Również i teraz z tych samych powodów q_j nie wchodzi do T i mamy

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad \text{lub} \quad \dot{p}_j = Q_j.$$

Przy tak wybranej współrzędnej uogólnionej siła O_j jest całkowitym momentem sił względem osi obrotu wyznaczonej przez q_j, zaś p_j jest całkowitym momentem pędu względem tej samej osi. Tak jak poprzednio, mamy dla siły uogólnionej

$$Q_j = \sum \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j},$$

ale tym razem sens pochodnej jest inny. Zmiana q_j o dq_j nie zmienia długości wektora $\vec{r}_i$, lecz tylko jego kierunek. Z rysunku widać, że $|d\vec{r}_i| = |\vec{r}_i| \sin\theta \sin dq_j$ i wobec tego, że dq_j jest bardzo małe, mamy $|d\vec{r}_i| = |\vec{r}_i| \sin\theta dq_j$. Stąd

$$\left|\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right| = |\vec{r}_i| \sin\theta.$$

Kierunek tego wektora, jak widać z rysunku 4.2, jest prostopadły do $\vec{r}_i$ i $\vec{n}_j$. Możemy więc napisać

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \vec{n}_j \times \vec{r}_i.$$

Dla siły Q_j mamy

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot (\vec{n}_j \times \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{N} \vec{n}_j \cdot \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) = \vec{n}_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) = \vec{n}_j \cdot \vec{D}.$$

Q_j jest więc rzutem całkowitego momentu sił na oś obrotu. Analogicznie mamy dla pędu uogólnionego

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{n}_j \times \vec{r}_i) = \vec{n}_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i\right) = \vec{n}_j \cdot \vec{J}.$$

Jeżeli współrzędna q_j jest cykliczna, to

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = -Q_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = 0,$$

a więc

$$p_j = \vec{n}_j \cdot \vec{J} = const, \tag{4.4}$$

co jest zasadą zachowania momentu pędu.

Widać stąd, że współrzędne cykliczne odgrywają dużą rolę przy badaniu własności układu. Jeżeli cykliczna jest współrzędna uogólniona opisująca obrót układu, oznacza to, że własności układu nie zależą od kąta obrotu wokół danej osi. Mówimy wtedy, że układ ma symetrię obrotową, lub że jest **niezmienniczy** względem obrotu wokół tej osi. Sytuacja taka prowadzi do zachowania momentu pędu, ściślej, rzutu momentu pędu na tę oś. Mówimy, że układ jest sferycznie symetryczny jeżeli jest on niezmienniczy względem obrotu o dowolną oś. Zachowany jest wówczas pełny moment pędu. Przy niezmienniczości tylko wobec obrotów wokół jednej osi, zachowany jest tylko odpowiedni rzut momentu pędu na tę oś.

Podobnie jest przy przesunięciach. Jeżeli układ jest niezmienniczy wobec przesunięcia w dowolnym kierunku, zachowany jest całkowity pęd, jeżeli układ jest niezmienniczy tylko wobec przesunięć w jednym kierunku - zachowany jest rzut całkowitego pędu na ten kierunek (odpowiednia składowa pędu). Dlatego też jeśli wiadomo, że układ ma określoną symetrię, można podać wówczas odpowiednie całki pierwsze równań ruchu, bez konieczności całkowania tych równań.

Pokażemy teraz, że jeżeli czas jest zmienną cykliczną, wówczas prowadzi to do zasady zachowania energii. Zgodnie z założeniem, funkcja Lagrange'a nie zależy jawnie od czasu: $L = L(q, \dot{q})$. Pochodna zupełna funkcji Lagrange'a ma więc postać

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt}\right).$$

Z RL2 mamy

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

i dlatego

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\frac{dq_j}{dt} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt},$$

a więc

$$\frac{d}{dt}\left(L - \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0. \tag{4.5}$$

Wynika stąd, że wielkość w nawiasie nie zmienia się w czasie, co można zapisać w postaci

$$L - \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = const = -H.$$

Lub inaczej

$$H = \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L. \tag{4.6}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób całkę pierwszą RL2. Pokażemy teraz, że tak zdefiniowana wielkość H jest całkowitą energią układu. Ponieważ energia potencjalna nie zależy od prędkości uogólnionych, więc

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j},$$

Jak wiemy, dla układu o więzach stacjonarnych energia kinetyczna jest kwadratową funkcją prędkości uogólnionych. Wykorzystajmy teraz twierdzenie Eulera o funkcjach jednorodnych (2.57) co pozwoli nam napisać

$$H = \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = 2T - (T - V) = T + V = E. \tag{4.7}$$

Widać stąd, że wielkość H jest całkowitą energią układu potencjalnego, natomiast (4.5) jest zasadą zachowania energii.

ROZDZIAŁ 5

Formalizm Hamiltona

1. Równania Hamiltona

Aby wyznaczyć tor PM, na który nałożone są więzy, należy skonstruować funkcję Lagrange'a, a następnie napisać RL2 i rozwiązać je. Spośród rodziny krzywych otrzymanych jako rozwiązanie ogólne, zadając warunki początkowe w postaci $q_j = q_j(t_0)$ i $\dot{q}_j = \dot{q}_j(t_0)$, wyznaczamy tor po jakim w czasie $t > t_0$ poruszać się będzie PM. W ten sposób określamy przyszłość układu. Twierdzenia Picarda i Banacha zapewniają jednoznaczność rozwiązań. W ten sposób wyrażona jest w mechanice klasycznej zasada przyczynowości. Znajomość równań ruchu oraz warunków początkowych pozwala z całkowitą pewnością odtworzyć przeszłość oraz wyznaczyć przyszłość ruchu układu mechanicznego. W formalizmie Lagrange'a zmiennymi, w liczbie $2n$, są położenia i prędkości uogólnione, równaniami ruchu są równania Lagrange'a II rodzaju, a sam ruch odbywa się w n-wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej zbudowanej na wielkościach $q_1, ..., q_n$.

Możliwy jest i inny opis układu, np przy pomocy współrzędnych uogólnionych q_j i pędów uogólnionych p_j. Używając takich zmiennych przechodzimy do innego formalizmu - formalizmu Hamiltona. Należy teraz znaleźć odpowiednik funkcji Lagrange'a, skonstruować odpowiednie równania ruchu oraz określić przestrzeń w jakiej ruch będzie się odbywał.

Od zmiennych $(q_1, \dot{q}_j, t)$ do zmiennych (q_j, p_j, t) przechodzimy przy pomocy procedury znanej pod nazwą **przekształcenia Legendre'a**. Będzie ona później wielokrotnie stosowana w innych działach fizyki teoretycznej, np w fizyce statystycznej.
Rozpatrzmy dowolną różniczkowalną funkcję $f(x, y)$. Mamy

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \equiv u\,dx + v\,dy.$$

Przejdźmy teraz do nowych zmiennych $(x, y) \to (u, y)$ i wprowadźmy nową funkcję $g(u, y)$

$$g(u, y) = ux - f(x, y).$$

Mamy więc

$$dg = udx + xdu - df \;=\; xdu - vdy$$

a z drugiej strony

$$dg(u, y) = \frac{\partial g}{\partial u}du \,+\, \frac{\partial g}{\partial y}dy,$$

czyli

$$v = -\frac{\partial g}{\partial y}, \quad x = \frac{\partial g}{\partial u}, \quad g(u, y) = ux - f(x, y). \tag{5.1}$$

Wielkości v i x są funkcjami (u, y) zaś związek (5.1) nosi nazwę przekształcenia Legendre'a. Możemy teraz w oparciu o to przekształcenie całkiem formalnie dokonać przejścia od opisu Lagrange'a do opisu Hamiltona. Wystarczy podstawić

$$f \to L, \quad x \to \dot{q}, \quad y \to q. \tag{5.2}$$

Otrzymamy wtedy

$$u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p, \quad v = \frac{\partial L}{\partial q} = \dot{p}. \tag{5.3}$$

Oznaczając nową funkcję g przez H dostajemy

$$H(q,p,t) = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L(q,\dot{q},t). \tag{5.4}$$

Funkcję H, zależącą od wszystkich współrzędnych $q_1, ...q_n$ i pędów uogólnionych, nazywamy **funkcją Hamiltona** lub **hamiltonianem** układu. Jak łatwo sprawdzić, funkcja H wprowadzona przez przekształcenie Legendre'a i zdefiniowana wzorem (5.4) pokrywa się z wielkością H, którą otrzymaliśmy poprzednio jako całkę pierwszą równań Lagrange'a (wzór(4.7)). Równania ruchu otrzymamy dokonując w (5.1) takiego samego podstawienia (5.2):

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad (j = 1, ..., n). \tag{5.5}$$

Równania te nazywamy **równaniami Hamiltona** i opisują one ruch układu PM zadanego przez funkcję Hamiltona. Równania te można też otrzymać inaczej. Obliczmy różniczkę funkcji Hamiltona

$$dH = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \tag{5.6}$$

Możemy teraz obliczyć różniczkę (5.4) i dostaniemy

$$d\left(\sum_{l=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L(q,\dot{q},t) \right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j dp_j + \sum_{j=1}^{n} p_j d\dot{q}_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{5.7}$$

Prędkości uogólnione występujące tutaj należy wyznaczyć przez (q,p,t) przy pomocy relacji odwrotnej do $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$. Relacja taka istnieje, ponieważ jakobian przekształcenia jest różny od zera.
Korzystając ze związków

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

możemy (5.7) sprowadzić do postaci

$$d\left(\sum_{l} p_j \dot{q}_j - L(q,\dot{q},t) \right) = \sum_{j} \dot{q}_j dp_j - \sum_{j} \dot{p}_j dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Porównując to wyrażenie z (5.6) otrzymujemy równania Hamiltona (RH)(5.5) oraz równość

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \tag{5.8}$$

wyrażającą fakt, że jeżeli funkcja Lagrange'a nie zależy jawnie od czasu, to również funkcja Hamiltona nie zależy w sposób jawny od czasu.

RH są układem $2n$ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego. Zamieniliśmy więc układ n równań różniczkowych rzędu drugiego (RL2) na układ $2n$ równań rzędu pierwszego. Z ogólnego punktu widzenia oba formalizmy są prawie równoważne. W mechanice kwantowej i fizyce statystycznej częściej korzysta się z formalizmu Hamiltona.

Z opisem Lagrange'a związana jest n-wymiarowa przestrzeń konfiguracyjna, rozpięta na współrzędnych uogólnionych $q_1...q_n$. Dla formalizmu Hamiltona właściwą przestrzenią jest **przestrzeń fazowa** rozpięta na $2n$ wielkościach - współrzędnych i pędach uogólnionych. Podobnie jak w przestrzeni konfiguracyjnej, czas jest tu parametrem. Ponieważ przestrzeń konfiguracyjna jest n wymiarowa, więc ustalając punkt w tej przestrzeni mamy jeszcze dowolność n zmiennych - prędkości uogólnionych. Natomiast przy ustaleniu punktu w przestrzeni fazowej stan układu jest określony w sposób pełny. Tak więc przez jeden punkt przestrzeni fazowej może, przy zadanych warunkach początkowych, przechodzić tylko jedna krzywa całkowa. Trajektoria w przestrzeni fazowej odpowiada pełnej historii układu.

Metoda Hamiltona jest szczególnie przydatna jeżeli jedna, lub więcej, współrzędnych jest cyklicznych. Współrzędna taka nie wchodzi do funkcji Lagrange'a, nie wejdzie także do funkcji Hamiltona, gdyż obie te funkcje różnią się tylko o czynnik $\sum p_j \dot{q}_j$, który nie zawiera jawnie q_j. Słuszne jest też twierdzenie odwrotne - jeżeli współrzędna q_k nie wchodzi jawnie do funkcji Hamiltona, to funkcja Lagrange'a również nie zależy jawnie od tej zmiennej. Jest jednak pewna różnica. Jeżeli q_n jest cykliczna, to funkcja Lagrange'a nie zawiera wprawdzie q_n, ale zawiera odpowiednią prędkość uogólnioną. Wiemy, że pęd uogólniony kanonicznie sprzężony ze współrzędną cykliczną jest stały $p_n = const = \alpha$, a więc funkcja Hamiltona ma postać

$$H = H(q_1...q_{n-1}, p_1, ...p_{n-1}, \alpha, t)$$

i zagadnienie zostało sprowadzone do poziomu $n-1$ stopni swobody. Stałą α wyznaczamy z warunków początkowych. Po wyznaczeniu $n-1$ współrzędnych, współrzędną cykliczną znajdujemy z RH

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}\Big|_{p_n=\alpha}.$$

Do wyznaczenia hamiltonianu można wykorzystać jego związek z funkcją Lagrange'a, jednak często prościej jest skorzystać z faktu, że H jest całkowitą energią układu. Założenia jakie musi spełniać układ są następujące

(1) więzy są stacjonarne (nie zależą od czasu), co sprowadza się do tego, że przekształcenie przeprowadzające współrzędne kartezjańskie w uogólnione nie zależy od czasu,
(2) układ jest zachowawczy, tzn wszystkie siły sa potencjalne i potencjał nie zależy od czasu.

Jeżeli spełnione są te warunki, wówczas hamiltonian jest całkowitą energią układu. Ma on zawsze wymiar energii. To że hamiltonian jest całkowitą energią nie jest równoważne z tym aby był on całką ruchu, a więc aby całkowita energia nie zmieniała się w czasie. Taki warunek ma postać

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\dot{p}_j\right) + \frac{\partial H}{\partial t} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \tag{5.9}$$

Stąd warunek na to aby całkowita energia układu nie zmieniała się w czasie oznacza, że hamiltonian nie może jawnie zależeć od czasu

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \tag{5.10}$$

Ze względu na równość (5.8) również funkcja Lagrange'a nie może w takim przypadku zależeć jawnie od czasu.

Przykład

Znajdziemy teraz hamiltonian i RH dla PM poruszającego się po powierzchni kuli o promieniu r i znajdującego się w polu siły ciężkości wytworzonym przez te kulę. Ze względu na symetrię zagadnienia, najdogodniejszymi współrzędnymi uogólnionymi będą współrzędne kuliste. Mamy jedno równanie więzów

$r = const$, a więc dwa stopnie swobody i dwie niezależne współrzędne uogólnione - dwa kąty.

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad \dot{x} = r\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi \qquad \dot{y} = r\dot{\theta}\sin\theta\sin\phi + r\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi$$
$$z = r\cos\theta, \qquad \dot{z} = -r\dot{\theta}sin\theta.$$

Stąd energia kinetyczna

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right).$$

Potencjał ma postać

$$V = -\int \vec{F}d\vec{r} = \int m\vec{g}d\vec{r} = mgr = const.$$

Potencjał nie zależy od czasu, jest więc energią potencjalną. Ponieważ każdy potencjał jest wyznaczony z dokładnością do stałej, możemy tę stałą przyjąć jako równą $-mgr$, czyli nasza energia potencjalna będzie równa zeru. Rozpatrywany układ jest skleronomiczny (więzy nie zależą od czasu), wszystkie siły są potencjalne, a więc hamiltonian jest energią całkowitą, czyli $H = T = L$, ponieważ $V = 0$. Pędy uogólnione to

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}.$$

Ponieważ współrzędna ϕ jest cykliczna, więc p_ϕ jest zachowane. Ze związków tych możemy wyznaczyć prędkości uogólnione jako funkcje pędów

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

i podstawić do hamiltonianu otrzymując

$$H = T + V = \frac{1}{2}m\left(r^2\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}\right)^2\right) =$$
$$= \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta}.$$

Inaczej,

$$H = \sum_j p_j\dot{q}_j - L = p_\phi\dot{\phi} + p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{p_\phi^2}{mr^2\sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} - \frac{1}{2}\frac{p_\phi^2}{mr^2\sin^2\theta} - \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mr^2} =$$
$$= \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2}$$

Mając już funkcję Hamiltona możemy napisać RH

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = \frac{p_\phi^2}{mr^2}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta},$$
$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}, \quad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial\phi} = 0 \Rightarrow p_\phi = const.$$

Jak widać, pierwsze dwie relacje, pochodne kątów względem czasu, nie dały nic nowego. Natomiast drugie pozwalają wyznaczyć zmianę pędów. Pierwsze związki są pożyteczne jeżeli, jak to często ma miejsce w zastosowaniach, znany jest bezpośrednio hamiltonian, a nie funkcja Lagrange'a.

2. RH z zasady wariacyjnej

Wyprowadzimy teraz RH z zasady wariacyjnej postaci

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} Ldt \,=\, \delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{j=1}^{n} p_j\dot{q}_j - H(q,p,t)\right]dt \,=\, 0, \tag{5.11}$$

nazywanej czasami *zmodyfikowaną zasadą Hamiltona.* Od poprzedniej różni się tym, że zmiennymi są tu p, q. Obliczmy teraz tę wariację

$$\begin{aligned}\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{j=1}^{n} p_j\dot{q}_j - H\right]dt \,&=\, \int\sum\left[p_j\delta\dot{q}_j + \dot{q}_j\delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j}\delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}\delta p_j\right]dt \,=\\ &= \int\left[\sum\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\delta p_j \,+\, \sum\left(p_j\frac{d}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q_j}\right)\delta q_j\right]dt \,=\\ &= \int\left[\sum\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\delta p_j \,+\, \sum\left(-\dot{p}_j - \frac{\partial H}{\partial q_j}\right)\delta q_j\right]dt \,+\, \sum p_j\delta q_j\Big|_{t_0}^{t_1} \,=\\ &\int\left[\sum\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\delta p_j \,+\, \sum\left(-\dot{p}_j - \frac{\partial H}{\partial q_j}\right)\delta q_j\right]dt.\end{aligned}$$

Ponieważ wariacje δp i δq są niezależne, więc aby całe wyrażenie znikało, jak to wynika ze zmodyfikowanej zasady Hamiltona, muszą zerować się wyrażenia w nawiasach kwadratowych, co daje wprost RH.

3. Przekształcenia kanoniczne

Rozwiązanie równań ruchu w postaci RL2 lub odpowiadających im RH jest, na ogół, tak samo skomplikowane. Sytuacja byłaby prostsza gdyby np hamiltonian był stałą ruchu, a wszystkie współrzędne były cykliczne. Wówczas pędy byłyby stałe $p_j = \alpha_j$ i hamiltonian zależałby tylko od tych stałych. RH miałyby prostą postać

$$\dot{q}_j \,=\, \frac{\partial H}{\partial p_j}\Big|_{p_j+\alpha_j} \,=\, w_j,$$

gdzie w_j są funkcjami tylko α_j. Równania takie można prosto scałkować, otrzymując

$$q_j \,=\, w_j t + \beta_j.$$

Stałe β_j należy wyznaczyć z warunków początkowych. Warto więc starać się znaleźć takie współrzędne uogólnione w których hamiltonian ma najwięcej współrzędnych cyklicznych.

W formalizmie Lagrange'a również przechodziliśmy od jednych zmiennych do drugich, pozwalających łatwiej rozwiązać dane zagadnienie. Mieliśmy wówczas do czynienia z przekształceniem wiążącym stare (q) i nowe (Q) współrzędne uogólnione, tzn przekształceniem postaci

$$Q = Q(q,t). \tag{5.12}$$

Tego typu przekształcenia wiążące tylko współrzędne nazywamy **przekształceniami punktowymi**. Tutaj szukać będziemy ogólniejszego przekształcenia, zależącego jednocześnie od współrzędnych i pędów uogólnionych

$$Q_j = Q_j(q,p,t), \quad P_j = P_j(q,p,t). \tag{5.13}$$

Zakładać będziemy, że funkcje $Q(q,p,t), P(q,p,t)$ mają ciągłe pierwsze pochodne w rozpatrywanym obszarze zmienności q, p, t oraz że jakobian przekształcenia (5.13) jest różny od zera, co zapewnia istnienie przekształcenia odwrotnego

$$q_j = q_j(Q,P,t), \qquad p_j = p_j(Q,P,t). \tag{5.14}$$

Chcemy aby nowe zmienne Q, P również spełniały, identyczne co do formy jak zmienne q, p, RH. Powinniśmy więc mieć

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \hat{H}}{\partial P_j}, \qquad \dot{P}_j = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial Q_j}, \tag{5.15}$$

gdzie $\hat{H} = \hat{H}(Q, P, t)$ jest hamiltonianem w nowych zmiennych. Postaci tej funkcji na razie nie znamy. Przekształcenia, które zachowują postać równań ruchu, w tym przypadku RH, nazywamy **przekształceniami kanonicznymi**.

Wykazaliśmy poprzednio równoważność RH i zasady Hamiltona. Wykorzystajmy to teraz do wyprowadzenia wzorów pozwalających na przejście od jednych zmiennych hamiltonowskich do innych. Zasada Hamiltona powinna być spełniona zarówno w starych jak i w nowych zmiennych. Powinniśmy więc mieć jednocześnie

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - H(q, p, t) \right] dt \;=\; 0 \quad \text{i} \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{j=1}^{n} P_j \dot{Q}_j - \hat{H}(Q, P, t) \right] dt \;=\; 0, \tag{5.16}$$

przy warunkach brzegowych

$$\delta q(t_0) \;=\; \delta q(t_1) \;=\; \delta p(t_0) \;=\; \delta p(t_1) \;=\; 0,$$
$$\delta Q(t_0) \;=\; \delta Q(t_1) \;=\; \delta P(t_0) \;=\; \delta P(t_1) \;=\; 0.$$

Odejmując stronami oba równania (5.16) dostajemy

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{j=1}^{n} \Big(p_j \dot{q}_j \;-\; P_j \dot{Q}_j \Big) \;-\; \Big(H(q, p, t) \;-\; \hat{H}(Q, P, t) \Big) \right] dt \;=\; 0. \tag{5.17}$$

Nie wynika stąd, że wyrażenie podcałkowe jest równe zeru, lecz tylko, że równe jest ono pochodnej zupełnej względem czasu dowolnej funkcji F. Może ona zależeć od dowolnej pary $2n$ zmiennych q, p, Q, P oraz od czasu. Mamy bowiem

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{dF}{dt} dt \;=\; \delta F(a, b)\Big|_{t_0}^{t_1} \;=\; 0. \tag{5.18}$$

a, b to dowolna para zmiennych kanonicznych. Wariacja F znika, ponieważ F jest funkcją tylko a i b, a wariacje ich znikają na brzegach. Funkcję F nazywamy **funkcją tworzącą** przekształcenia (5.13), gdyż, jak pokażemy później, jej znajomość wystarcza do wyznaczenia przekształcenia z dokładnością do znaku.

Funkcję F możemy zapisać w jednej z czterech postaci

$$F_1(q, Q, t),\; F_2(q, P, t),\; F_3(p, Q, t),\; F_4(p, P, t).$$

Funkcja ta powinna wiązać stare i nowe współrzędne, stąd nie występuje np $F(q, p, t)$. Wybór funkcji dyktowany jest przez rozpatrywane zagadnienie.

Znajdziemy teraz postać nowej funkcji Hamiltona oraz równania wyznaczające pędy, dla funkcji tworzącej postaci $F = F_1(q, Q, t)$. Na podstawie (5.17) mamy

$$\frac{dF_1(q, Q, t)}{dt} \;=\; \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j \;-\; H \;-\; \sum_{j=1}^{n} P_j \dot{Q}_j + \hat{H}, \tag{5.19}$$

ale jednocześnie

$$\frac{dF_1(q, Q, t)}{dt} \;=\; \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

i wobec tego

$$\sum_{j=1}^{n}\left(p_j-\frac{\partial F_1}{\partial q_j}\right)\dot{q}_j-\sum_{j=1}^{n}\left(P_j+\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}\right)\dot{Q}_j-\left(H-\hat{H}+\frac{\partial F_1}{\partial t}\right)\;=\;0.$$

Ponieważ współrzędne q i Q są tutaj niezależne (wybraliśmy $F_1(q,Q,t)$), więc aby równość ta była spełniona, muszą zachodzić związki

$$p_j\;=\;\frac{\partial F_1}{\partial q_j},\quad P_j\;=\;-\frac{\partial F_1}{\partial Q_j},\quad \hat{H}\;=\;H+\frac{\partial F_1}{\partial t},\quad (j=1,2,..n). \tag{5.20}$$

Pierwsze równania (5.20), w liczbie n, wiążą wielkości q,p,Q,P,t. Możemy przy ich pomocy wyrazić (znając F_1) wszystkie $Q_j=Q_j(q,p,t)$. Mamy stąd pierwsze z równań (5.13). Korzystając ze znalezionych równań możemy, przy pomocy drugich równań (5.20)wyznaczyć $P_j=P_j(q,p,t)$, czyli pozostałe związki (5.13). Ostatnie z równań (5.20) daje nam możność, znając funkcję tworzącą F_1, wyznaczenia nowego hamiltonianu $\hat{H}$.

Aby pewne przekształcenie postaci (5.13) było kanoniczne, potrzeba i wystarcza aby istniała taka funkcja tworząca (np F_1), aby było spełnione (5.19), lub, co jest równoważne, aby istniała funkcja, np F_1, której różniczka jest równa

$$dF_1(q,Q,t)\;=\;\sum_{j=1}^{n}(p_j dq_j-P_j dQ_j)-\left(H-\hat{H}\right)dt. \tag{5.21}$$

Jeżeli zamiast zmiennych q,Q wybierzemy zmienne q,P, wówczas funkcja tworząca będzie typu $F_2=F_2(q,P,t)$. Ponieważ zmienne Q,P związane są relacją

$$P\;=\;-\frac{\partial F_1}{\partial Q},$$

możemy skorzystać z transformacji Legendre'a $F_2\;=\;PQ-F_1$. Funkcja tworząca zdefiniowana jest z dokładnością do znaku, możemy więc zamiast F_1 przyjąć $-F_1$, czyli $F_2=PQ+F_1$.
Obliczmy teraz na dwa sposoby różniczkę $F_2(q,P,t)$, opuszczając dla prostoty, znaki sum

$$dF_2\;=\;QdP+PdQ+dF_1\;=\;QdP+PdQ+pdq-PdQ-(H-\hat{H})dt\;=\;QdP+pdq-(H-\hat{H})dt.$$

Z drugiej strony

$$dF_2\;=\;\frac{\partial F_2}{\partial q}dq+\frac{\partial F_2}{\partial P}dp+\frac{\partial F_2}{\partial t}dt.$$

Korzystając z tego, że zmienne q,P są niezależne, możemy przyrównać współczynniki przy tych samych różniczkach, dostając odpowiednik równań (5.20)

$$p_j\;=\;\frac{\partial F_2}{\partial q_j},\quad Q_j\;=\;\frac{\partial F_2}{\partial P_j},\quad \hat{H}\;=\;H+\frac{\partial F_2}{\partial t}. \tag{5.22}$$

Zupełnie analogicznie w przypadku zmiennych p,Q mamy funkcję tworzącą $F_3=F_3(p,Q,t)$ i odpowiednie równania

$$q_j\;=\;\frac{\partial F_3}{\partial p_j},\quad P_j\;=\;\frac{\partial F_3}{\partial Q_j},\quad \hat{H}\;=\;H+\frac{\partial F_3}{\partial t}. \tag{5.23}$$

Gdy zmiennymi są p,P, wówczas funkcją tworzącą jest $F_4=F_4(p,P,t)$, a równania maja postać

$$q_j\;=\;\frac{\partial F_4}{\partial p_j},\quad Q_j\;=\;\frac{\partial F_4}{\partial P_j},\quad \hat{H}\;=\;H+\frac{\partial F_4}{\partial t}. \tag{5.24}$$

Prostym przykładem przekształcenia kanonicznego jest przekształcenie zadane funkcją tworzącą

$$F_2\;=\;Pq.$$

Na podstawie (5.22) mamy
$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = q, \qquad p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = P.$$
Jest więc to przekształcenie tożsamościowe, przeprowadzające stare współrzędne w nowe współrzędne. Podobnie jest dla pędów.
Jako drugi przykład rozpatrzmy transformację postaci
$$F_1 = \sum_j q_j Q_j.$$
Zgodnie z (5.20) mamy
$$p_j = Q_j, \qquad P_j = -q_j.$$
Przekształcenie to zamienia miejscami współrzędne i pędy uogólnione, tzn wielkość która poprzednio nazywana była współrzędną uogólnioną teraz nazywa się pędem uogólnionym, i na odwrót. Widać stąd pełną równoważność tych zmiennych, a różnica między nimi sprowadza się do nazwy. Razem wielkości te tworzą układ $2n$ zmiennych kanonicznie sprzężonych.

Niech teraz transformacja zadana będzie funkcją tworzącą postaci
$$F_2 = \sum_j f_j(q_1, ..., q_n, t) P_j.$$
Nowe współrzędne uogólnione wyznaczone są przez
$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = f_j(q, t).$$
Przekształcenie to wiąże stare i nowe współrzędne nie „wplątując" w to pędów. Jest to więc przekształcenie punktowe. Ponieważ funkcje f_j są zupełnie dowolne, możemy całkowicie ogólnie stwierdzić, iż przekształcenia punktowe są kanoniczne.

Niech dane będzie przekształcenie
$$Q = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right), \quad P = q\, ctg\, p.$$
Sprawdźmy czy jest ono kanoniczne. Warunek kanoniczności to istnienie funkcji tworzącej, którą można zapisać w postaci
$$dF = pdq - PdQ = pdq - P\left(\frac{\partial Q}{\partial q}dq + \frac{\partial Q}{\partial p}dp\right),$$
w naszym przypadku
$$\frac{\partial Q}{\partial q} = -\frac{1}{q}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = ctg\, p,$$
a więc
$$dF = pdq - q\, ctg\, p\left(-\frac{1}{q}dq + ctg\, p\, dp\right) =$$
$$= pdq + ctg\, p\, dq - q\, ctg^2 p\, dp = (p + ctg\, p)dq - q\, ctg^2 p\, dp = Adq + Bdp.$$
Na to aby wyrażenie $Adq + Bdp$ było różniczką zupełną (a taki jest warunek dla funkcji tworzącej przekształcenia kanonicznego), potrzeba i wystarcza aby
$$\frac{\partial A}{\partial p} = \frac{\partial B}{\partial q}.$$
W naszym przypadku mamy
$$\frac{\partial}{\partial p}(p + ctg\, p) = -\frac{\partial}{\partial q}\left(q\, ctg^2 p\right)$$

czyli

$$1 - \frac{1}{\sin^2 p} \; = \; -ctg^2 p$$

Tak więc badane przekształcenie jest kanoniczne.

4. Nawiasy Poissona

Funkcję $f(q, p, t)$ nazywamy całką równań ruchu jeżeli dla dowolnego ruchu układu wielkość ta pozostaje stała, przy czym wartość tej stałej może być różna dla różnych ruchów. W przypadku RL2, które były równaniami różniczkowymi drugiego rzędu, całka pierwsza tych równań miała postać $f(q, \dot{q}, t) = const$. RH są równaniami rzędu pierwszego, stąd całka pierwsza tych równań jest jednocześnie stałą ruchu. Równań jest $2n$, a więc maksymalna liczba tych stałych też jest równa $2n$. Znając te stałe i oznaczając je np przez c_k, możemy rozwiązać równania

$$f_k(q, p, t) \; = \; c_k, \qquad (k = 1, 2, .., 2n) \tag{5.25}$$

otrzymując

$$q_j \; = \; \varphi_j(c_1, ..., c_{2n}, t), \quad p_j \; = \; \psi_j(c_1, ..., c_{2n}, t), \quad (j = 1, 2, .., n) \tag{5.26}$$

Jeżeli znamy stałe c_k, wówczas z (5.26) wyznaczamy ruch układu i zagadnienie jest rozwiązane. Jeżeli znamy tylko część stałych, to i nasza informacja o ruchu układu nie jest kompletna. Im więcej znamy stałych, tym jest ona pełniejsza. Warto więc szukać metod pozwalających znaleźć nowe stałe ruchu. Niech $f(q, p, t)$ będzie taką stałą. Wówczas

$$df \; = \; \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt \; = \; 0.$$

Korzystając z RH można to przepisać inaczej

$$\frac{df}{dt} \; = \; \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \; = \; 0. \tag{5.27}$$

Wielkość w nawiasie okazała się być na tyle użyteczną, że warto było wprowadzić dla niej specjalną nazwę - jest to **nawias Poissona** wielkości f i H. Ogólnie nawias Poissona (NP) dwu funkcji f i g, zależących od zmiennych q i p, zdefiniowany jest jako

$$[f, g]_{q,p} \; = \; \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right). \tag{5.28}$$

Jak można pokazać bezpośrednim rachunkiem, NP nie zależą od tego od jakich zmiennych kanonicznych zależą funkcje g i f, tzn np od q, p czy też Q, P. Dlatego też będziemy opuszczali wskaźniki przy symbolu NP.

Z definicji wynikają bezpośrednio następujące własności NP

$$[f, g] \; = \; -[g, f], \quad c[f, g] \; = \; [cf, g], \quad [f + h, g] \; = \; [f, g] + [h, g], \quad \frac{\partial}{\partial t}[f, g] \; = \; \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right]. \tag{5.29}$$

Słuszna jest też *tożsamość Jacobiego*

$$[[f, g], h] + [[g, h], f] + [[h, f], g] \; = \; 0. \tag{5.30}$$

Podstawiając w (5.28) $f = q_i, g = q_k$ lub odpowiednio p_i, p_k, gdzie indeksy i, k oznaczają konkretne zmienne, dostajemy

$$[q_i, q_k] \; = \; 0, \qquad \text{lub} \quad [p_i, p_k] \; = \; 0. \tag{5.31}$$

Podstawiając natomiast $f = q_i, g = p_k$ mamy

$$[q_i, p_k] \;=\; \delta_{i,k}, \tag{5.32}$$

gdzie $\delta_{i,k}$ to symbol Kroneckera. Związki (5.32) noszą nazwę *podstawowych nawiasów Poissona*, natomiast zmienne spełniające takie NP nazywamy **zmiennymi kanonicznymi**. Jeżeli więc chcemy sprawdzić czy pewne zmienne Q, P są kanoniczne, to należy w tym celu sprawdzić czy spełniają one podstawowe NP.

Sprawdźmy raz jeszcze kanoniczność przekształcenia

$$Q = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right), \quad P = qctgp$$

tym razem wykorzystując NP. Mamy

$$\frac{\partial Q}{\partial q} \;=\; -\frac{q}{\sin p}\frac{\sin p}{q^2} \;=\; -\frac{1}{q}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} \;=\; \frac{q^{-1}\cos p}{q^{-1}\sin p} = ctg\, p,$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} \;=\; -\frac{q}{\sin^2 p}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} \;=\; ctg\, p.$$

Tak więc NP mają postać

$$[Q, P] \;=\; \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\right) \;=\; \frac{1}{\sin^2 p} - ctg^2 p \;=\; 1$$

i przekształcenie jest kanoniczne.

Jako przykład posługiwania się NP wyznaczmy NP składowych kartezjańskich pędu $\vec{r}$ i momentu pędu $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$. Mamy (biorąc $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3), x = 1, y = 2, z = 3$)

$$[M_1, p_2] \;=\; \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial M_1}{\partial p_i}\frac{\partial p_2}{\partial x_i} - \frac{\partial M_1}{\partial x_i}\frac{\partial p_2}{\partial p_i}\right) \;=\; -\frac{\partial M_1}{\partial x_2} \;=\; -\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2 p_3 - x_3 p_2) = -p_3.$$

Podobnie można pokazać, że

$$[M_i, p_i] = 0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

4.1. NP i równania ruchu. Aby powiązać NP z równaniami ruchu, skorzystajmy z definicji NP i zamieńmy tam $f \to q_i, \quad h \to H$, a następnie $f \to p_i, \quad h \to H$. Korzystając z RH dostajemy odpowiednio

$$[q_i, H] \;=\; \frac{\partial H}{\partial p_i} \;=\; \dot{q}_i, \qquad [p_i, H] \;=\; -\frac{\partial H}{\partial q_i} \;=\; \dot{p}_i \tag{5.33}$$

Są to równania ruchu wyrażone poprzez NP i przydają się szczególnie w określeniu czy dana wielkość, tutaj q_i i p_i, jest stałą ruchu. Korzystając z (5.27) mamy dla funkcji $f = f(g, p, t)$

$$\frac{df}{dt} \;=\; \sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) \;=\; \frac{\partial f}{\partial t} \;=\; [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{5.34}$$

Jeżeli więc funkcja f nie zależy jawnie od czasu, wówczas

$$\frac{df}{dt} \;=\; [f, H] \tag{5.35}$$

Jeżeli NP wielkości f, nie zależącej jawnie od czasu i hamiltonianu jest równy zeru, to wielkość ta jest stałą ruchu. Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne - jeżeli f jest stałą ruchu i nie zależy jawnie od czasu, to jej NP z hamiltonianem znika. Równość (5.35) jest w takim przypadku kryterium tego czy wielkość f jest stałą ruchu.

Jeżeli znamy już kilka stałych ruchu, to następne można otrzymać z
twierdzenia Jacobiego
Jeżeli f i g są całkami równań ruchu, to NP tych wielkości też jest całką ruchu.
Dla dowodu wystarczy wykazać, że ze związków

$$[f, H] = 0, \quad \text{i} \quad [g, H] = 0 \quad \Rightarrow \quad [[f, g], H] = 0.$$

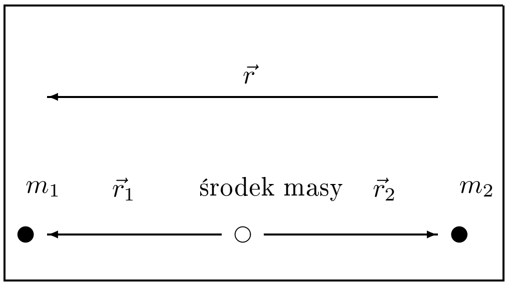
To jednak wynika bezpośrednio z tożsamości Jacobiego. Jeżeli więc mamy dwie całki równań ruchu, to możemy łatwo skonstruować trzecią. Kłopot polega na tym, że twierdzenie to nie gwarantuje, że otrzymana w ten sposób nowa całka ruchu będzie różna od znanych już, nie będzie ich liniową kombinacją, czy też nie będzie wręcz równa zeru.

ROZDZIAŁ 6

Zagadnienie dwu ciał

Zajmiemy się teraz problemem znalezienia ruchu dwu ciał. Jest to zagadnienie, które, przynajmniej w zasadzie, da się rozwiązać ściśle. Już jednak problem trzech oddziałujących ciał może być rozwiązany tylko numerycznie. Z zagadnieniem dwu ciał mamy do czynienia np rozpatrując w pierwszym przybliżeniu ruch dwu planet. Również słynne doświadczenie rozpraszania cząstek α na jądrach atomowych było opisywane teoretycznie jako zagadnienie dwóch ciał i liczone metodami mechaniki klasycznej.

Rozważmy dwa PM o masach m_1 i m_2. Ze względu na wygodę rachunkową wprowadzimy układ współrzędnych umieszczony w środku mas układu dwu PM. Jeżeli na układ taki nie działają żadne siły oprócz sił oddziaływania pomiędzy PM, wówczas środek mas porusza się ze stałą prędkością, która w naszym układzie wynosi zero. Oznaczmy przez $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ położenia PM_1 i PM_2, a przez $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ wektor wodzący od PM_2 do PM_1.



Rysunek 4. Wektory wodzące w zagadnieniu dwu ciał

Moment pędu i energia kinetyczna mają postać

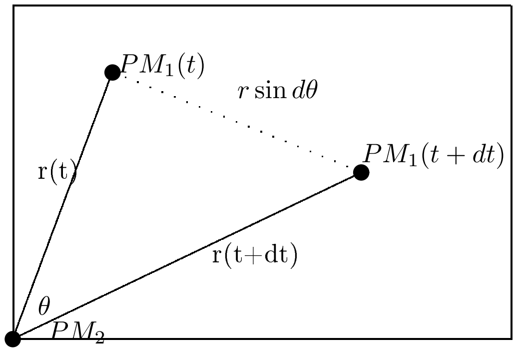
$$\vec{J} = \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2, \quad T = \frac{1}{2}\left(m_1v_1^2 + m_2v_2^2\right). \tag{6.1}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ to odpowiednio prędkości obu PM. Ponieważ

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \text{i} \quad m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0,$$

bowiem $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ wyznaczają położenie punktów materialnych względem środka mas, więc

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}, \qquad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}, \\ \vec{v}_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}, \qquad \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}. \end{aligned} \tag{6.2}$$



Rysunek 5. Współrzędne uogólnione w zagadnieniu dwu ciał.

$\vec{v}$ jest prędkością PM_1 względem PM_2, tak więc PM_2 jest dla nas jak gdyby punktem odniesienia. Podstawiając te wzory do równań dla $\vec{J}, T$ dostajemy

$$\vec{J} = \vec{r} \times \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} = \vec{r} \times \mu \vec{v},$$
$$T = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 = \frac{1}{2} \mu v^2. \tag{6.3}$$

Wielkość $\mu = m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-1}$ nosi nazwę **masy zredukowanej**. Np dla atomu wodoru, w którym masa elektronu to $1/1836$ masy protonu, masa zredukowana $= 1/1837$, jest więc prawie tożsama z masą protonu.

Tak więc formalnie sprowadziliśmy zagadnienie dwu ciał do problemu ruchu jednego PM o masie μ wokół drugiego PM, uważanego za spoczywający. Oczywiście naprawdę spoczywa tylko środek mas naszego układu. Jeżeli jednak, co często ma miejsce, mamy do czynienia z układem w którym $m_2 \gg m_1$, wówczas środek mas niemal pokrywa się z PM_2, natomiast masa zredukowana jest niemal równa masie lżejszego PM

$$\mu \simeq \frac{m_1}{1 + m_1/m_2} \simeq m_1.$$

Jeżeli na układ działają tylko siły między PM, wówczas moment sił zewnętrznych i wewnętrznych jest równy zero, czyli moment pędu jest stały, a to oznacza że ruch jest płaski. Jako współrzędne uogólnione wybierzmy współrzędne biegunowe (r, θ) położenia PM_1 względem PM_2. Siła działająca między PM będzie skierowana wzdłuż prostej je łączącej. Załóżmy dalej, że siła ta zależy tylko od odległości r, nie zależy natomiast od kierunku. Zakładamy tym samym, że przestrzeń jest izotropowa. Mamy wtedy $V = V(r)$ i nasze zagadnienie ma symetrię kulistą. Funkcja Lagrange'a układu ma postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r). \tag{6.4}$$

Jak należało oczekiwać, ze względu na symetrię zagadnienia, współrzędna uogólniona θ jest cykliczna. Wobec tego odpowiedni pęd (moment pędu, ponieważ θ jest kątem) jest zachowany

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = const = |\vec{J}| \equiv \mathcal{J}. \tag{6.5}$$

Jest to całka pierwsza RL2. Jak widać z rysunku 5, zmiana pola dla małych kątów ma postać $dA = 1/2 r^2 d\theta$. Jeżeli zdefiniujemy prędkość polową PM jako pole zakreślane przez wektor wodzący PM w jednostce czasu, to wyrazi się ona przez pole dA

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Łatwo widać, że jedno z RL2 w wypadku sił centralnych, a taka jest siła działająca pomiędzy rozpatrywanymi punktami, wyraża stałość prędkości polowej PM

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = \frac{d}{dt}\left(\mu r^2 \dot\theta\right) = 2\mu \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu r^2 \dot\theta\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dA}{dt}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = const\,. \tag{6.6}$$

Drugie równanie Lagrange'a (dla współrzędnej r) ma postać

$$\mu \ddot r - \mu r \dot\theta^2 = F(r), \quad F(r) = -\frac{dV}{dr}. \tag{6.7}$$

Korzystając teraz z całki pierwszego równania Lagrange'a (6.5), możemy w ostatnim równaniu wyeliminować $\dot\theta$. Dostaniemy wtedy równanie ruchu w postaci

$$\mu \ddot r - \frac{\mathcal{J}^2}{\mu r^3} = F(r), \qquad \dot\theta = \frac{\mathcal{J}}{\mu r^2}. \tag{6.8}$$

Aby otrzymać równanie toru w dogodniejszej formie, zauważmy że drugie równanie da się zapisać jako

$$\mathcal{J} dt = \mu r^2 d\theta$$

i wobec tego dla pochodnych względem t i θ

$$\frac{d}{dt} = \frac{\mathcal{J}}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}$$

i stąd

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\mathcal{J}}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\mathcal{J}}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}\right).$$

Ostatnią równość możemy wstawić do (6.8) otrzymując

$$\frac{\mathcal{J}}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\mathcal{J}}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{\mathcal{J}^2}{\mu r^3} = F(r). \tag{6.9}$$

Wprowadźmy nową zmienną $x = r^{-1}$ i wykorzystajmy relację

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{d(1/r)}{d\theta}.$$

Otrzymamy w ten sposób wzór na tor w ruchu względnym PM_1 względem PM_2

$$\left(\frac{d^2 x}{d\theta^2} + x\right) x^2 = -\frac{\mu}{\mathcal{J}^2} F\left(\frac{1}{x}\right). \tag{6.10}$$

Wzór ten nosi nazwę **wzoru Bineta**. Równanie to przy zadanej sile wyznacza orbitę, jeżeli zaś znana jest orbita, pozwala wyznaczyć siłę.

Oprócz całki pierwszej (6.5) jest jeszcze jedna stała ruchu – energia, gdyż układ jest zachowawczy. Energia ma postać

$$E = T + V = \frac{\mu}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right) + V(r) = \frac{1}{2}\mu \dot r^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathcal{J}^2}{\mu r^2} + V(r) = const. \tag{6.11}$$

1. Postacie sił i potencjałów

W praktyce bardzo często mamy do czynienia z siłą centralną postaci

$$F(r) = -\frac{C}{r^n}, \tag{6.12}$$

gdzie C i n są stałymi. Jeżeli $C > 0$, to siła jest przyciągająca, bowiem

$$\vec{F} = -C\frac{\vec{r}}{r^{n+1}},$$

gdzie $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ jest wektorem od PM_2 do PM_1. Jeżeli więc rozpatrujemy ruch PM_1 wokół PM_2, ściślej, ruch PM o masie μ wokół środka mas, to dla $C > 0$ siła $\vec{F}$ skierowana jest od PM_1 do PM_2, jest więc siłą przyciągającą. Dla $C < 0$ jest to siła odpychająca.

Oprócz przypadku $n = 1$, którym nie będziemy się tu zajmowali, potencjał siły $F(r) = -Cr^{-n}$ ma postać

$$V(r) = -\frac{C}{n-1}r^{-(n-1)} = -\frac{C}{n-1}x^{(n-1)}, \tag{6.13}$$

a stąd odpowiednie równanie orbity

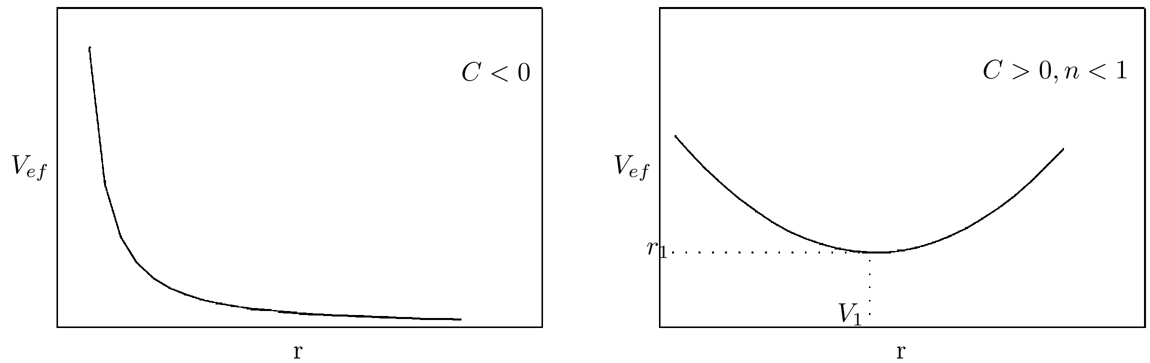
$$\left(\frac{d^2x}{d\theta^2} + x\right)x^2 = \frac{\mu C}{\mathcal{J}^2}x^n. \tag{6.14}$$

$n = 2$ odpowiada ruchowi w polu grawitacyjnym lub elektromagnetycznym.

Korzystając z całki energii (6.11) możemy wprowadzić nową wielkość, tzw **potencjał efektywny** $V_{ef}(r)$. Są to dwa ostatnie wyrazy całki energii

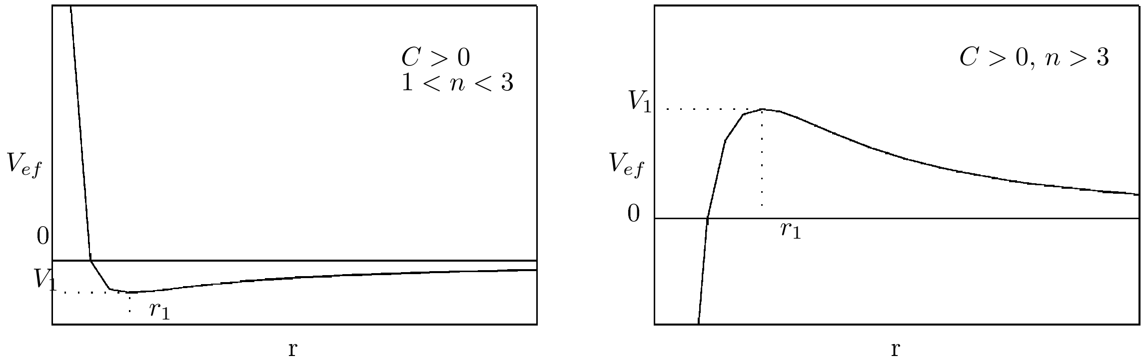
$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{ef}(r), \qquad V_{ef}(r) = \frac{\mathcal{J}^2}{2\mu r^2} - \frac{C}{n-1}r^{-(n-1)}. \tag{6.15}$$

Jeżeli $C < 0$, siła jest odpychająca (wyłączając przypadek $n = 1$), funkcja $V_{ef}(r)$ nie osiąga ani minimum ani maksimum w dowolnym przedziale otwartym, czyli orbity są nieograniczone.



Rysunek 6. (a) Przypadek $C < 0$ (lewa krzywa) i (b) $C > 0$. (prawa krzywa)

Jak widać z rysunków, w zależności od wartości wykładnika n mamy różne typy orbit. Gdy $n < 1$ istnieć mogą tylko orbity ograniczone (Rysunek 6b). Dla $1 < n < 3$ orbity są ograniczone jeżeli $V_1 < E < 0$ i nieograniczone dla $E \geq 0$ (Rysunek 7a). Gdy $n > 3$ (Rysunek 7b) orbity są ograniczone i przechodzą przez centrum siły jeżeli $-\infty < E < V_1$, mogą być ograniczone lub nie, jeżeli $0 < E < V_1$, oraz tylko nieograniczone dla $E > V_1$. Dla $E = V_1$ mamy orbitę kołową o promieniu r, która jest jednak niestabilna.



Rysunek 7. $C > 0$

Jeżeli $1 < n < 3$, PM może „uciec" od centrum siły jeżeli $E > 0$. Ogólnie równanie różniczkowe orbity (6.14) może być ściśle rozwiązane dla następujących wartości n

- $n = -1$, (oscylator harmoniczny).
- $n = 2$ (siły grawitacyjne i elektrostatyczne)

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x - \frac{\mu C}{\mathcal{J}^2} = 0$$

co po odpowiedniej zamianie zmiennych da się sprowadzić do bardziej znanej postaci

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0.$$

jak również dla fizycznie mało interesujących przypadków n = 3,4,5. Dla pozostałych wartości udaje się czasem znaleźć podstawienie sprowadzające dane równanie do jednego ze ściśle rozwiązywalnych równań.

Zajmiemy się teraz jednym z podstawowych typów siły w mechanice klasycznej – siłą odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości $F(r) = -C/r^2$. Sile tej odpowiada potencjał efektywny

$$V_{ef}(r) = \frac{\mathcal{J}^2}{2\mu r^2} - \frac{C}{r}. \tag{6.16}$$

Dla sił przyciągania potencjał ten ma jedno minimum, dane przez

$$r_1 = \frac{\mathcal{J}^2}{\mu C}, \quad V_1 = -\frac{\mu C^2}{2\mathcal{J}^2}. \tag{6.17}$$

Całkowita energia ma postać

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{ef} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{\mathcal{J}^2}{2\mu r^2} - \frac{C}{r}. \tag{6.18}$$

Możliwe są następujące przypadki

(1) $E = V_1$. Istnieje trwała orbita kołowa o promieniu r_1,
(2) $V_1 < E < 0$. Orbity są ograniczone i istnieją dwa punkty zwrotne, wyznaczone przez przyjęcie w wyrażeniu na energię (6.18) $\dot{r} = 0$

$$r_{2,3} = \frac{C}{2|E|} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4E^2} - \frac{\mathcal{J}^2}{2\mu|E|}},$$

(3) $E = 0$. Orbity nie są ograniczone. Istnieje jeden punkt zwrotny

$$r_4 = \frac{\mathcal{J}^2}{2\mu C},$$

(4) $E > 0$. Orbity nie są ograniczone i istnieje jeden punkt zwrotny

$$r_5 = -\frac{C}{2E} + \sqrt{\frac{C^2}{4E^2} + \frac{\mathcal{J}^2}{2\mu E}}.$$

Jeżeli $C < 0$, co odpowiada sile odpychającej, orbity nie są ograniczone, energia jest zawsze dodatnia i jedyny punkt zwrotny dany jest przez

$$r_2 = \frac{|C|}{2E} + \sqrt{\frac{C^2}{4E^2} + \frac{\mathcal{J}^2}{2\mu E}}.$$

W przypadku siły postaci $F = -C/r^2$, równanie orbity można zapisać w postaci

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(x - \frac{\mu C}{\mathcal{J}^2}\right) = -\left(x - \frac{\mu C}{\mathcal{J}^2}\right). \tag{6.19}$$

Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest

$$x \equiv \frac{1}{r} = \frac{\mu C}{\mathcal{J}^2} + A\cos(\theta + \varphi), \tag{6.20}$$

gdzie A i φ są stałymi całkowania. Bez straty ogólności możemy przyjąć $\varphi = 0$. Tak więc orbita może być wyznaczona z równania

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu C}{\mathcal{J}^2} + A\cos\theta. \tag{6.21}$$

Jak widać, orbita taka ma tę własność, że jej punkty zwrotne (*apsydialne*) leżą dokładnie naprzeciw siebie, przy czym jeden z nich może być nieskończenie odległy. W przypadku ruchu np satelitów wokół Ziemi na określenie punktu zwrotnego bliższego Ziemi używamy określenia *perigeum*, dla dalszego zaś *apogeum*. Przy ruchu wokół Słońca punkty te noszą odpowiednio nazwy *perihelium* i *aphelium*.

2. Prawa Keplera

Zauważmy teraz, że otrzymane równanie orbity (6.21) da się zapisać w postaci znanej z geometrii analitycznej. Będziemy więc mogli utożsamić wielkości fizyczne występujące w tym równaniu (moment pędu, masa) z wielkościami geometrycznymi i wykorzystać znane wnioski dla równania geometrycznego. Przepiszmy (6.21) w postaci

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu C + \mathcal{J}^2 A\cos\theta}{\mathcal{J}^2}$$

a stąd mamy

$$r = \frac{\mathcal{J}^2}{\mu C + \mathcal{J}^2 A\cos\theta} = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\theta}, \tag{6.22}$$

gdzie

$$p = \frac{\mathcal{J}^2}{\mu C}, \quad \epsilon = \frac{\mathcal{J}^2}{\mu C}A. \tag{6.23}$$

Jak wiadomo z geometrii analitycznej, równanie

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\theta} \tag{6.24}$$

jest równaniem krzywej stożkowej we współrzędnych biegunowych. Krzywa ta scharakteryzowana jest przez parametr p i mimośród ϵ. W zależności od wartości mimośrodu będziemy mieli odpowiednio: hiperbolę ($\epsilon > 1$), parabolę ($\epsilon = 1$), elipsę ($\epsilon < 1$) oraz koło ($\epsilon = 0$). Tak więc aby wyznaczyć orbitę, należy znaleźć stałą A i mimośród ϵ.

Jako przykład wyznaczmy te wielkości dla $C > 0$. Jak wiemy, możliwe są cztery różne zakresy dla energii: $E = V_1, V_1 < E < 0, E = 0, E > 0$. Rozpatrzmy najpierw przypadek $E = V_1$. Orbita jest trwała o promieniu

$$r_1 = \frac{\mathcal{J}^2}{\mu C}.$$

a więc $A = 0 \Rightarrow \epsilon = 0$, czyli jest to orbita kołowa.

Niech teraz $V_1 < E < 0$. Licząc kąt θ od perigeum możemy wyznaczyć stałą całkowania A znając wartość r dla perigeum, która wynosi

$$r_3 = \frac{C}{2|E|} - \sqrt{\frac{C^2}{4E^2} - \frac{\mathcal{J}^2}{2|E|\mu}},$$

Ponieważ $\theta = 0$ dla perigeum, więc wykorzystując (6.24) możemy powyższe równanie zapisać w postaci

$$\frac{\mathcal{J}^2}{\mu C + \mathcal{J}^2 A} = \frac{C}{2|E|} - \sqrt{\frac{C^2}{4E^2} - \frac{\mathcal{J}^2}{2\mu|E|}},$$

z którego możemy wyznaczyć A, otrzymując

$$A = \sqrt{\left(\frac{\mu C}{\mathcal{J}^2}\right)^2 - \frac{2\mu|E|}{\mathcal{J}^2}}.$$

Stąd mimośród

$$\epsilon = \frac{\mathcal{J}^2}{\mu C}\sqrt{\left(\frac{\mu C}{\mathcal{J}^2}\right)^2 - \frac{\mathcal{J}^2}{2\mu|E|}} = \sqrt{1 - \frac{2\mathcal{J}^2|E|}{\mu C^2}} < 1$$

Tak więc dla $V_1 < E < 0$ i $C > 0$ mamy orbitę eliptyczną, ściślej, tor PM_1 w ruchu względnym (opisanym przez współrzędne biegunowe) względem PM_2, jest elipsą. Ponieważ początek układu współrzędnych umieściliśmy w PM_2, punkt ten będzie się znajdował w ognisku elipsy. Jak wiadomo z geometrii analitycznej, półosie elipsy, mała b i duża a, wyrażają się poprzez parametr p i mimośród ϵ następująco

$$a = \frac{p}{1-\epsilon^2}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}.$$

Podstawiając tu wartości

$$p = \frac{\mathcal{J}^2}{\mu C}, \quad \epsilon = \sqrt{1 - \frac{2\mathcal{J}^2|E|}{\mu C^2}}$$

dostajemy

$$a = \frac{C}{2|E|}, \qquad b = \frac{\mathcal{J}}{\sqrt{2\mu|E|}}. \tag{6.25}$$

Wyznaczyliśmy w ten sposób wielkości charakteryzujące tor po jakim odbywa się ruch względny dwu PM przy zadanych wartościach energii i stałej C.

Równanie (6.22) w odniesieniu do ruchu planet wyraża **pierwsze prawo Keplera**, które mówi, że *orbity planet w ruchu wokół Słońca są elipsami, przy czym Słońce znajduje się w jednym z ognisk tej elipsy.*

Pokazaliśmy już poprzednio (6.5), że w przypadku zagadnienia dwu ciał izolowanych od sił zewnętrznych i działających na siebie siłami centralnymi, moment pędu względem środka masy jest stały $\vec{J} = \vec{const}$, bo $\vec{D} = 0$ (a $\vec{D} = \dot{\vec{J}}$), a więc ruch jest plaski. Pokazaliśmy dalej, że prowadzi to do zachowania wielkości $1/2r^2\dot{\theta}$, zwanej prędkością polową. Fakt ten wyraża **drugie prawo Keplera** (w odniesieniu do ruchu planet), które mówi, że *prędkość polowa w ruchu planet wokół Słońca jest stała*

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{\mathcal{J}}{2\mu} = const.$$

Ponieważ prędkość polowa jest stała, więc mnożąc ją przez okres ruchu T, otrzymujemy pole elipsy

$$\frac{\mathcal{J}}{2\mu}T = \pi ab.$$

Podstawiając tu teraz wartości dla a i b znalezione w (6.25) dostaniemy

$$T^2 = \frac{2\pi^2\mu a^2}{|E|} = \frac{4\pi^2\mu}{C}a^3,$$

μ jest masą zredukowaną. Dla sił grawitacyjnych $C = \kappa m_1 m_2$ i mamy

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\kappa(m_1 + m_2)}a^3.$$

Jeżeli np $m_2 \gg m_1$, to w mianowniku możemy zaniedbać m_1 wobec m_2 i dostaniemy

$$T^2 \simeq \frac{4\pi^2}{\kappa m_2}a^3. \tag{6.26}$$

Proporcjonalność okresu obiegu planety wokół Słońca do potęgi 3/2 większej półosi elipsy, jest **trzecim prawem Keplera** ruchu planet.

Podobnie jak robilismy to powyżej, mozna przeprowadzić dyskusję ruchu dla przypadku $E = 0$, co będzie odpowiadało ruchowi parabolicznemu, natomiast przypadek $E > 0$ prowadzi do toru hiperbolicznego.

ROZDZIAŁ 7

Bryła sztywna

Bryła sztywna jest to układ PM, który na skutek nałożonych więzów pozostają w stałych od siebie odległościach. Ustalmy najpierw ile taki układ ma stopni swobody. Niech składa się on z N punktów materialnych. Równania więzów mają postać

$$r_{ij} = c_{ij},$$

gdzie r_{ij} jest odległością pomiędzy i-ym i j-ym PM, zaś c_{ij} to stałe. Gdybyśmy po prostu odjęli od $3N$ liczbę równań więzów to mogłoby się okazać, że dla dużych N różnica ta jest ujemna. Powodem tego jest fakt, że nie wszystkie te równania są niezależne. Wystarczy podać położenia trzech PM nie leżących na jednej prostej, a następnie odległości od tych PM. Odległości te będą dane przez równania więzów. Dlatego też liczba stopni swobody nie będzie przekraczała 9. Ale i te trzy PM nie są niezależne, gdyż na nie również nałożone są warunki sztywnego wiązania, tzn

$$r_{12} = c_{12}, \quad r_{13} = c_{13}, \quad r_{23} = c_{23}.$$

Tak więc mamy 6 stopni swobody i potrzebnych nam będzie 6 współrzędnych. Do tego samego wniosku można też dojść inaczej. Aby wyznaczyć położenie dowolnego PM bryły sztywnej potrzebujemy 3 współrzędnych. Przy jednym punkcie ustalonym, dowolny inny PM bryły sztywnej można opisać podając tylko dwie współrzędne, ponieważ może on poruszać się tylko po sferze o środku w pierwszym, ustalonym PM. Promień tej sfery to odległość między tymi dwoma PM. Po ustaleniu obu PM, położenie dowolnego trzeciego PM wyznaczone jest przez jedną tylko współrzędną. gdyż może się on tylko obracać wokół osi przechodzącej przez dwa poprzednio ustalone PM. Reszta PM tworzących bryłę sztywną jest już unieruchomiona przez równania więzów. Tak więc bryła sztywna, na którą nie są nałożone żadne dodatkowe ograniczenia, ma 6 stopni swobody i do jej opisu potrzebujemy 6 współrzędnych uogólnionych.

Rozpatrzmy teraz dwa układy współrzędnych – U związany z przestrzenią otaczającą bryłę (układ laboratoryjny), oraz U' – związany z bryłą. Położenie U' względem U określa położenia bryły sztywnej. Oznaczmy kosinusy kierunkowe między osiami obu układów przez α_i

$$\alpha_1 = \cos(\vec{i}', \vec{i}), \quad \alpha_2 = \cos(\vec{i}', \vec{j},), \quad \alpha_3 = \cos(\vec{i}', \vec{k}), \quad \text{itd}$$

Stąd np

$$\vec{i} = \alpha_1 \vec{i}' + \beta_1 \vec{j}' + \gamma_1 \vec{k}' \quad , ... \tag{7.1}$$

Ogólnie przejście z jednego układu współrzędnych do drugiego dane jest przez

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \end{aligned} \tag{7.2}$$

Kosinusy te zmieniają się w trakcie ruchu, ponieważ jednak jest ich 9, nie są niezależne. Rzeczywiście, osie układów są prostopadłe i długość wersorów jest jednostkowa, a więc spełnione muszą być równania

$$\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{k}\vec{j} = 0, \quad \vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1.$$

Podstawiając tu (7.1) dostajemy

$$\alpha_m\alpha_k + \beta_m\beta_k + \gamma_m\gamma_k = 0, \quad \alpha_m^2 + \beta_m^2 + \gamma_m^2 = 1, \qquad (m, k = 1, 2, 3, m \neq k).$$

Układ tych 6 równań redukuje liczbę niezależnych zmiennych do 3. Ostatnie związki można zapisać w postaci

$$\alpha_m\alpha_k + \beta_k\beta_k + \gamma_m\gamma_k = \delta_{mk}. \tag{7.3}$$

Jako współrzędne uogólnione wybierzemy jednak inne zmienne.

1. Przekształcenia ortogonalne

Przekształcenie (7.2) jest szczególnym przypadkiem przekształcenia liniowego

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{7.4}$$

gdzie a_{ij} są stałymi. W układzie kartezjańskim długość wektora określana jest jako pierwiastek kwadratowy z sumy kwadratów jego składowych, czyli iloczynu skalarnego wektora samego ze sobą. Jeżeli zażądamy aby przy przejściu z jednego układu do drugiego długość wektora nie zmieniła się, tzn aby było

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i'^2, \tag{7.5}$$

to ze względu na (7.4) możemy prawą stronę zapisać jako

$$\sum_i \left(\sum_j a_{ij}x_j\right)\left(\sum_k a_{ik}x_k\right) = \sum_i \sum_{jk} a_{ij}a_{ik}x_jx_k = \sum_{jk}\left(\sum_i a_{ij}a_{ik}\right)x_jx_k.$$

Aby wyrażenie to było równe lewej stronie (7.5), musi być spełniony następujący warunek

$$\sum_i a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}, \qquad (j, k = 1, 2, 3). \tag{7.6}$$

Warunek ten to **warunek ortogonalności przekształcenia** (7.4), a samo przekształcenie zachowujące długość wektora nazywamy **ortogonalnym**. Przykładem takiego przekształcenia jest obrót. Przekształcenie liniowe możemy też zapisać w postaci

$$\vec{r}\,' = \mathbf{A}\vec{r}. \tag{7.7}$$

Oznacza to, że macierz $\mathbf{A}$, którą możemy traktować jako operator liniowy, działa na wektor $\vec{r}$ i przeprowadza go w wektor $\vec{r}\,'$.

Wróćmy teraz do problemu znalezienia współrzędnych uogólnionych bryły sztywnej. Trzy spośród sześciu będą to współrzędne kartezjańskie podające położenie środka układu związanego sztywno z bryłą. Pozostałe trzy związane będą z kątami. Istnieje kilka możliwości ich wyboru a najbardziej znany tworzą *kąty Eulera*. Przejście od jednego do innego układu kartezjańskiego o wspólnym początku, może być zrealizowane poprzez trzy obroty. Kąty Eulera (φ, θ, ψ) definiowane są jako kąty tych obrotów. Iloczyn trzech macierzy odpowiadających poszczególnym obrotom o kąty Eulera daje pewną macierz $\mathbf{A}$, która też jest macierzą obrotu, spełnia więc warunek (7.7).

Ponieważ dla przekształcenia ortogonalnego macierz przekształcenia odwrotnego jest wprost macierzą transponowaną, więc przejście od wektora $\vec{x'}$ do wektora $\vec{x}$ dane jest przez

$$\vec{x} = \mathbf{A}^T\vec{x'}.$$

2. Twierdzenie Eulera

Twierdzenie to dotyczy ruchu bryły sztywnej i można je sformułować następująco:

Dowolna zmiana położenia bryły sztywnej o jednym punkcie unieruchomionym może być osiągnięta na drodze obrotu wokół pewnej osi.

Twierdzenie to jest intuicyjnie jasne, ponieważ dowolne przemieszczenie bryły sztywnej jest złożeniem obrotu i przesunięcia. Dowiedziemy go jednak tutaj choćby dlatego, że użyty tu aparat matematyczny będzie później wielokrotnie stosowany.

Przy obrocie bryły stałe pozostają wektory równoległe do osi obrotu. Aby wykazać twierdzenie Eulera wystarczy pokazać, że przy dowolnej zmianie położenia bryły o jednym punkcie unieruchomionym, istnieje wektor, np $\vec{R}$, który ma takie same składowe w układzie przed i po zmianie położenia. Oznacza to, że

$$\vec{R}' = \mathbf{A}\vec{R} = \vec{R}.$$

Równanie to jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego równania

$$\mathbf{A}\vec{R} = \lambda\vec{R},$$

gdzie λ jest pewną stałą, nie koniecznie rzeczywistą. Macierz (operator) $\mathbf{A}$ działa na wektor $\vec{R}$ i przeprowadza go w ten sam wektor, lecz pomnożony przez liczbę. Oczywiście nie wszystkie wektory, dla danej macierzy $\mathbf{A}$ będą miały tę własność. Te, które ją mają, nazywamy **wektorami własnymi** macierzy $\mathbf{A}$, zaś liczby λ – **wartościami własnymi** macierzy $\mathbf{A}$. Samo równanie to **równanie na wartości własne**.

Używając terminologii wartości własnych możemy twierdzenie Eulera zapisać następująco:

Jedną z wartości własnych rzeczywistej macierzy ortogonalnej opisującej obrót bryły sztywnej o jednym punkcie unieruchomionym, jest +1.

Równanie na wartości własne możemy przepisać w postaci

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{R} = 0,$$

gdzie $\mathbf{E}$ jest macierzą jednostkową tego samego rzędu co $\mathbf{A}$. Układ ten ma niezerowe rozwiązania, tzn $\vec{R} \neq 0$, jeżeli znika jego wyznacznik. Ponieważ jest to układ równań jednorodnych więc możemy wyznaczyć tylko stosunki składowych x, y, z. Wiąże się to z tym, że jeżeli R jest rozwiązaniem, to jest nim także aR, gdzie a to dowolna liczba. Znikanie wyznacznika prowadzi do równania wiekowego, które w naszym przypadku trzech składowych będzie równaniem sześciennym na λ.

Macierze ortogonalne (tutaj rzędu 3) mają następujące własności

(1) Moduł każdej wartości własnej jest równy 1.
Ponieważ długość wektora nie ulega zmianie przy obrocie, więc oznaczając sprzężenie przez gwiazdkę, mamy
$$R'^*R' = \lambda^*\lambda R^*R = R^*R \Rightarrow \lambda^*\lambda = 1.$$
(2) przynajmniej jedna z wartości własnych ortogonalnej macierzy trzeciego rzędu jest rzeczywista.
Równanie wiekowe ma postać
$$\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$$
gdzie b, c, d to liczby rzeczywiste. Dla dużych ujemnych λ lewa strona jest ujemna, dla dużych dodatnich – jest dodatnia. Ponieważ wielomian jest funkcją ciągłą, więc musi istnieć taki punkt gdzie będzie się zerował. Z punktu 1 wynika, że tam $\lambda = +1$ lub $\lambda = -1$.
(3) Iloczyn pierwiastków równania wiekowego jest równy +1.
Inwersja zmienia znak wszystkich współrzędnych, zmienia więc układ prawo na lewo-skrętny. Przy przemieszczeniach bryły sztywnej nie możemy tego osiągnąć, a więc inwersją nie będziemy

się zajmowali. Wyznacznik macierzy inwersji jest równy - 1. Dowolne inne przekształcenie o wyznaczniku - 1 można przedstawić jako iloczyn inwersji i macierzy o wyznaczniku +1.

(4) Jeżeli λ jest wartością własną, to jest nią także λ^*.
Wynika to wprost ze sprzężenia równania wiekowego.

Teraz twierdzenie Eulera można sformułować tak:
Rzeczywista macierz ortogonalna, opisująca obrót bryły sztywnej o jednym punkcie unieruchomionym, ma przynajmniej jeden pierwiastek równania wiekowego równy +1.

Aby je udowodnić musimy wykazać, że przynajmniej jedna wartość własna macierzy opisującej ruch bryły sztywnej o jednym punkcie unieruchomionym, jest równa +1. Możliwy jest jeden z przypadków – albo wszystkie pierwiastki są rzeczywiste, albo dwa są zespolone, a jeden rzeczywisty. W pierwszym przypadku albo jeden jest równy +1 a dwa - 1, albo wszystkie są sobie równe i równe +1. Gdy pierwiastki mogą być zespolone, to iloczyn zespolonych jest równy - 1, a więc rzeczywisty pierwiastek musi być równy +1.

3. Obroty nieskończenie małe

Jest to pożyteczna klasa obrotów, ponieważ mnożenie odpowiadających im macierzy jest przemienne. Nieskończenie mały obrót (NMO) zdefiniujemy jako taki, przy którym składowe każdego wektora zmieniają się nieskończenie mało

$$x_1' = x_1 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3.$$

Wielkości b_{ij} są elementami macierzowymi nieskończenie małego obrotu. Małość tę wykorzystamy dalej, opuszczając w rachunkach wyrażenie proporcjonalne do wyższych, niż zadana, potęg b. Obrót taki możemy zapisać jako

$$x_i' = x_i + \sum_j b_{ij}x_j, \quad \text{lub} \quad x_i' = \sum_j (\delta_{ij} + b_{ij})\, x_j. \tag{7.8}$$

Można to przepisać w postaci macierzowej

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{1} + \mathbf{b})\mathbf{x}, \tag{7.9}$$

tzn macierz tego przekształcenia różni się od tożsamościowego o nieskończenie mały operator $\mathbf{b}$. Pokażemy teraz, że macierze takie są przemienne.
Niech $\mathbf{1} + \mathbf{b}_1$ i $\mathbf{1} + \mathbf{b}_2$ będą takimi obrotami. Wówczas ich iloczyn

$$(\mathbf{1} + \mathbf{b}_1)\,(\mathbf{1} + \mathbf{b}_2) \;=\; \mathbf{1}^2 + \mathbf{b}_1\mathbf{1} + \mathbf{1}\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 \simeq \mathbf{1} + \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2.$$

Ponieważ odrzuciliśmy, jako małe, wyrazy kwadratowe w $\mathbf{b}$, taki sam wynik otrzymamy mnożąc obroty w odwrotnej kolejności. Oznacza to, że kolejność wykonania nieskończenie małych obrotów nie gra roli, której to własności nie mają zwykłe obroty.
Macierz obrotu odwrotnego do $\mathbf{1} + \mathbf{b}$ jest $\mathbf{1} - \mathbf{b}$, znów ze względu na pominięcie wyrazów kwadratowych.

Rozpatrzmy teraz NMO wokół osi Oz o kąt φ. Macierz skończonego obrotu ma postać

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

W przypadku NMO trzeba zamienić φ na $d\varphi$, rozłożyć sinus i kosinus w szereg. Zaniedbując wyrazy wyższych rzędów niż liniowy, dostaniemy

$$(\mathbf{1} + \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & d\varphi & 0 \\ -d\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a stąd macierz $\mathbf{b}$

$$\mathbf{b} = d\varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{b}$ jest macierzą antysymetryczną, co jest ogólną własnością macierzy NMO. Obroty opisywane są przez macierze ortogonalne, dla których macierz odwrotna równa jest transponowanej, czyli dla NMO mamy

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{1} - \mathbf{b}) = \mathbf{A}^T = \left(\mathbf{1} + \mathbf{b}^T\right) \Rightarrow \mathbf{b} = -\mathbf{b}^T, \quad \text{czyli} \quad b_{ij} = -b_{ji}. \tag{7.10}$$

Dowolny NMO możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.11}$$

ponieważ macierz antysymetryczna rzędu trzeciego może mieć co najwyżej trzy różne od zera elementy. Wielkości $d\Omega$ opisują obrót i są składowymi pewnego wektora. Po dokonaniu NMO wektor $\vec{x}$ stanie się wektorem $\vec{x'}$

$$\vec{x'} = \vec{x} + \mathbf{b}\vec{x} \quad \text{lub} \quad \vec{x'} - \vec{x} = d\vec{x} = \mathbf{b}\vec{x}.$$

Uwzględniając postać macierzy $\mathbf{b}$, możemy to zapisać

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 d\Omega_3 - x_3 d\Omega_2, \\ dx_2 &= x_3 d\Omega_1 - x_1 d\Omega_3, \\ dx_3 &= x_1 d\Omega_2 - x_2 d\Omega_1, \end{aligned} \tag{7.12}$$

albo

$$d\vec{x} = \vec{x} \times d\vec{\Omega}, \tag{7.13}$$

gdzie $d\vec{\Omega} = (d\Omega_1, d\Omega_2, d\Omega_3)$. Ponieważ $d\vec{\Omega}$ nie zmienia znaku przy inwersji, co czynią zwykłe wektory, stąd nazywany jest *pseudowektorem.*
Tak więc dowolny NMO może być przedstawiony jako pseudowektor ($d\vec{\Omega}$), którego kierunek wyznacza oś obrotu, natomiast wartość – kąt o jaki nastąpił obrót.

4. Prędkość zmiany wektora

Znajdziemy teraz związek pozwalający na przeliczenie prędkości zmian wektora liczonej w układzie związanym z bryłą, do układu laboratoryjnego. Wielkości w pierwszym układzie będziemy oznaczać indeksem r, w drugim – indeksem l. Różnice w przyrostach jakich doznają składowe wektora $\vec{G}$ w układach r i l związane są tylko z ruchem obrotowym (oznaczanym dalej indeksem o), bowiem przy przesunięciu składowe te zmieniają się tak samo. Dlatego też zajmiemy się tu wyłącznie obrotami. Mamy

$$\left(d\vec{G}\right)_l = \left(d\vec{G}\right)_r - \left(d\vec{G}\right)_o. \tag{7.14}$$

Jeżeli mamy do czynienia z NMO, to wzór (7.13) daje

$$\left(d\vec{G}\right)_o = \vec{G} \times d\vec{\Omega}.$$

Po podstawieniu, otrzymujemy dla prędkości zmian wektora $\vec{G}$

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_l = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_r + \vec{\omega} \times \vec{G}, \tag{7.15}$$

gdzie $\vec{\omega} = d\vec{\Omega}/dt$ jest prędkością kątową bryły. Ponieważ $\vec{G}$ jest zupełnie dowolnym wektorem, możemy (7.15) zapisać jako równość operatorową

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_l = \left(\frac{d}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times \tag{7.16}$$

i zastosować ją np do wektora wodzącego $\vec{r}$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_l = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\vec{r}.$$

Jeżeli układ związany z bryłą oprócz ruchu obrotowego wykonuje względem układu laboratoryjnego jeszcze ruch postępowy, wówczas oznaczając przez

$$\vec{v}\,' = (d\vec{r}/dt)_l$$

prędkość PM w układzie laboratoryjnym, zaś przez $\vec{v}$ – w układzie ruchomym, oraz przez $\vec{v}_0$ prędkość ruchu postępowego, mamy

$$\vec{v}\,' = \vec{v}_0 + \vec{v} + \vec{\omega}\times\vec{r}. \tag{7.17}$$

Podobnie możemy znaleźć wzór na przyspieszenie w ruchu w ruchu obrotowym PM względem układu laboratoryjnego

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\vec{v}\,'}{dt}\right)_l &= \left(\frac{d(\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt}\right)_l = \\ &= \left(\frac{d(\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times(\vec{v}+\vec{\omega}\times\vec{r}) = \\ &= \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_r + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\vec{v} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \\ &= \vec{a} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + 2\vec{\omega}\times\vec{v} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}).\end{aligned} \tag{7.18}$$

Jeżeli oprócz ruchu obrotowego PM wykonuje jeszcze ruch postępowy względem układu laboratoryjnego, to

$$\vec{a}' = \vec{a}_0 + \vec{a} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + 2\vec{\omega}\times\vec{v} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}), \tag{7.19}$$

gdzie $\vec{a}_0$ jest przyspieszeniem w ruchu postępowym. Równanie ruchu w układzie laboratoryjnym $\vec{F} = m\vec{a}'$ przyjmie w układzie ruchomym postać

$$\vec{F} - m\vec{a}_0 + m\,\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = m\vec{a}. \tag{7.20}$$

5. Tensor bezwładności

Mając już wyrażenia dla prędkości i przyspieszenia PM w układzie ruchomym i laboratoryjnym, możemy znaleźć wzory dla momentu pędu bryły sztywnej. Układ ruchomy związany jest z samą bryłą, a więc prędkość liniowa PM w tym układzie jest równa zero, podobnie jak przyspieszenie. Stąd (7.17) ma postać

$$\vec{v}\,' = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}.$$

Mamy więc dla momentu pędu

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{J}} &= \sum_i \vec{r_i}\,' \times m_i \vec{v_i}\,' = \sum_i \vec{r_i}\,' \times m_i \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i\right) = \\ &= \sum_i \vec{r_i}\,' \times m_i \vec{v}_0 + \sum_i \vec{r_i}\,' \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right).\end{aligned} \tag{7.21}$$

Ponieważ $\vec{r_i}\,' = \vec{r}_i + \vec{r}_0$, gdzie $\vec{r}_0$ jest odległością początków układu ruchomego i laboratoryjnego, więc

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{J}} &= \sum_i \vec{r_i}\,' \times m_i \vec{v}_0 + \sum_i \left(\vec{r}_i + \vec{r}_0\right) \times m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right) = \\ &= \vec{R}\,' \times M\vec{v}_0 + \vec{r}_0 \times M\left(\vec{\omega} \times \vec{R}\right) + \sum_i \vec{r}_i \times m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right),\end{aligned} \tag{7.22}$$

gdzie $\vec{R}\,'$ i $\vec{R}$ to odpowiednio promienie wodzące środka mas w układzie laboratoryjnym i ruchomym

$$\vec{R}\,' = M^{-1} \sum_i m_i \vec{r_i}\,'.$$

M to całkowita masa układu. Jeżeli środek układu związanego z bryłą umieścimy w środku masy, to $\vec{R} = 0$ i wtedy wzór na moment pędu uprości się do

$$\vec{\mathcal{J}} = \vec{R}\,' \times M\vec{v}_0 + \sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right) m_i. \tag{7.23}$$

Tak więc całkowity moment pędu bryły sztywnej względem układu nieruchomego składa się z dwu części – pierwszej opisującej moment pędu środka mas i drugiej opisującej ruch względem środka mas. Gdy unieruchomimy jeden punkt bryły sztywnej ($v_0 = 0$), wówczas moment pędu będzie miał postać

$$\vec{\mathcal{J}} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right) = \sum_i m_i \left(\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i(\vec{r}_i \vec{\omega})\right). \tag{7.24}$$

Skorzystaliśmy tu z tożsamości wektorowej

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}).$$

Dla składowej x-wej momentu pędu mamy

$$\mathcal{J}_x = \omega_x \sum_i m_i \left(r_i^2 - x_i^2\right) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i. \tag{7.25}$$

Widać więc, że moment pędu jest liniową funkcją prędkości kątowej $\vec{\omega}$ i możemy go otrzymać z $\vec{\omega}$ poprzez przekształcenie liniowe i zapisać w postaci

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ \mathcal{J}_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ \mathcal{J}_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z\end{aligned} \tag{7.26}$$

Wielkości I_{ij} są elementami macierzowymi przekształcenia liniowego. Ponieważ odległości x_i, y_i, z_i nie zmieniają się w czasie, stąd I_{ij} są wielkościami stałymi. Równania (7.26) można przepisać w postaci

$$\vec{\mathcal{J}} = \mathbf{I}\,\vec{\omega}. \tag{7.27}$$

Wielkość $\mathbf{I}$ jest tensorem drugiego rzędu. Ogólnie w 3D tensor rzędu N definiujemy jako wielkość posiadającą 3^N składowych $T_{ij\ldots}$, która przy ortogonalnym przekształceniu współrzędnych zadanym macierzą

A transformuje się zgodnie ze wzorem

$$T'_{ij..} = \sum_{l,m,..} a_{il} a_{jm} ... T_{lm...}. \tag{7.28}$$

W myśl podanej definicji, skalar jest tensorem rzędu zerowego, wektor, który transformuje się jak

$$T'_i = \sum_j a_{ij} T_j \ ,$$

jest tensorem rzędu pierwszego.

Tensor **I** nazywamy **tensorem bezwładności** bryły sztywnej. Posługując się tym tensorem możemy przepisać wzór na całkowity, tzn przy dopuszczeniu translacji układów, wzór na moment pędu bryły sztywnej

$$\vec{\mathcal{J}} = \vec{R}\,' \times M\,\vec{v}_0 + \mathbf{I}\,\vec{\omega}. \tag{7.29}$$

Przyjęliśmy tu, że początek układu związanego z bryłą znajduje się w jej środku mas.

Zdefiniujemy teraz **moment bezwładności** względem osi o kierunku wyznaczonym przez wektor jednostkowy $\vec{e}$ i przechodzącej przez środek mas, jako

$$I_e = \vec{e}\,\mathbf{I}\,\vec{e}. \tag{7.30}$$

Jest to jednocześnie związek miedzy momentem i tensorem bezwładności. Definicja ta, jak nietrudno pokazać, jest równoważna „szkolnej" definicji, zgodnie z którą moment bezwładności bryły sztywnej względem pewnej osi, jest to suma iloczynów mas poszczególnych punktów bryły, pomnożona przez kwadraty ich odległości.

Weźmy teraz jako wektory $\vec{e}$ wersory układu U. Opierając się na (7.25 i 7.26) możemy odpowiednie momenty bezwładności zapisać w postaci

$$I_x = \vec{i}\,\mathbf{I}\,\vec{i} = \sum_s m_s \left[r_s^2 - (\vec{r}_s\vec{i})^2\right] = \sum_s m_s \left(r_s^2 - x_s^2\right) = I_{xx}. \tag{7.31}$$

Podobne wzory są dla pozostałych składowych. Okazuje się, że diagonalne elementy tensora bezwładności są to momenty bezwładności liczone względem poszczególnych osi układu. Wyliczmy teraz pozadiagonalne elementy tensora bezwładności

$$\vec{e}\,\mathbf{I}\,\vec{f} = \sum_s m_s \left[r_s^2 \vec{e}\vec{f} - (\vec{r}_s\vec{e})(\vec{r}_s\vec{f})\right]. \tag{7.32}$$

Podstawiając tu odpowiednie wersory dostajemy

$$\vec{i}\,\mathbf{I}\,\vec{j} = \sum_{s=1}^{3} m_s \left[r_s^2 \vec{i}\vec{j} - (\vec{r}_s\vec{i})(\vec{r}_s\vec{j})\right] = \sum_s m_s y_s x_s \equiv \mathcal{D}_{yx}, \tag{7.33}$$

i podobnie dla pozostałych elementów pozadiagonalnych. Elementy $\mathcal{D}_{ij}$ nazywane są **elementami dewiacji** tensora **I** w płaszczyźnie ij. Można łatwo pokazać, że $\mathcal{D}_{ij} = \mathcal{D}_{ji}$, a więc tensor **I** jest symetryczny. Ostatecznie więc tensor bezwładności **I** możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_x & \mathcal{D}_{xy} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{yx} & I_y & \mathcal{D}_{yz} \\ \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{zy} & I_z \end{pmatrix} \tag{7.34}$$

gdzie elementy diagonalne to momenty bezwładności względem odpowiednich osi układu współrzędnych, natomiast elementy pozadiagonalne to momenty dewiacji.

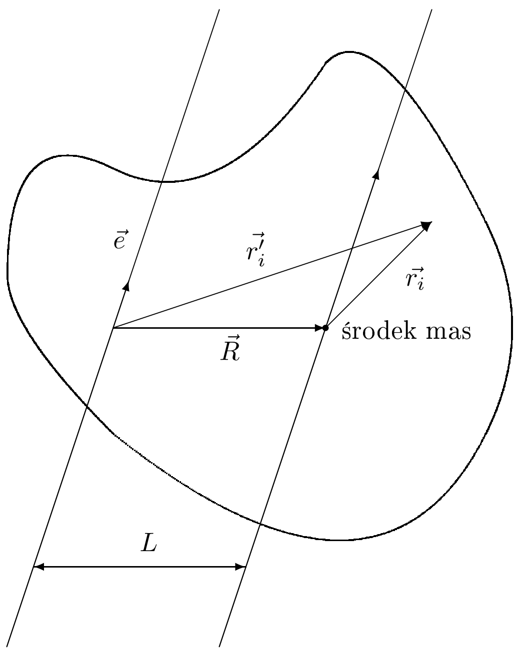
6. Twierdzenie Steinera

Wszystkie momenty liczone były dotąd względem osi przechodzących przez środek masy ciała. Aby odnieść to do osi o tym samym kierunku, lecz przechodzącej przez dowolny inne punkt bryły, stosujemy twierdzenie Steinera

Jeżeli dany jest moment bezwładności I_e bryły sztywnej względem osi przechodzącej przez środek masy bryły, to moment bezwładności $\hat{I}_e$ względem osi o tym samym kierunku, lecz przechodzącej przez punkt oddalony o L od środka masy, dany jest przez

$$\hat{I}_e = ML^2 + I_e. \tag{7.35}$$

M jest tu całkowita masą bryły.



Rysunek 7.1. Położenie wektorów

Dla dowodu zauważmy, że z rysunku 7.1 wynika

$$\vec{r'}_i = \vec{R} + \vec{r}_i,$$

oraz, że zgodnie z definicja środka mas, mamy też $\sum m_i\vec{r}_i = 0$ ponieważ środek mas pokrywa się z początkiem układu ruchomego. Stąd też mamy

$$
\begin{aligned}
\hat{I}_e = \sum_i m_i \left[(\vec{r'}_i)^2 - (\vec{r'}_i\vec{e})^2 \right] = \\
= \sum_i m_i \left[(\vec{R} + \vec{r}_i)^2 - \left((\vec{R} + \vec{r}_i)\vec{e} \right)^2 \right] = \\
= \sum_i m_i \left[\vec{R}^2 - (\vec{R}\vec{e})^2 \right] + \sum_i m_i \left[\vec{r}_i^2 - (\vec{r}_i\vec{e})^2 \right] + 2\vec{R}\sum_i m_i\vec{r}_i - 2(\vec{R}\vec{e})\vec{e}\sum_i m_i\vec{r}_i = \\
= M\left[R^2 - (\vec{R}\vec{e})^2 \right] + I_e = ML^2 + I_e.
\end{aligned}
$$

Wykorzystaliśmy tu fakt, że $\sum m_i\vec{r}_i = 0$ ■
Postępując podobnie, możemy znaleźć wzór dla energii kinetycznej bryły sztywnej. Ponieważ w układzie ruchomym bryła spoczywa, więc $\vec{v}_i = 0$ i dlatego

$$
\begin{aligned}
2T &= \sum_i m_i(\vec{v}_i)^2 = \sum_i m_i \left(\vec{v}_0 + \omega \times \vec{r}_i \right)^2 = \\
&= \sum_i m_i v_0^2 + 2\sum_i m_i\vec{v}_0(\omega \times \vec{r}_i) + \sum_i m_i(\omega \times \vec{r}_i)^2.
\end{aligned}
\tag{7.36}
$$

Wykorzystując w stosunku do ostatniego wzoru tożsamość wektorową

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}),$$

dostajemy

$$
\begin{aligned}
2T &= Mv_0^2 + 2M\vec{v}_0(\vec{\omega} \times \vec{R}) + \sum_i m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \\
&= Mv_0^2 + 2M\vec{v}_0(\vec{\omega} \times \vec{R}) + \sum_i m_i\vec{\omega}\left(\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right) = \\
&= Mv_0^2 + 2M\vec{v}_0(\vec{\omega} \times \vec{R}) + \sum_i m_i\left(r_i^2\vec{\omega} - \vec{r}_i(\vec{\omega}\vec{r}_i) \right) = \\
&= Mv_0^2 + 2M\vec{v}_0(\vec{\omega} \times \vec{R}) + \vec{\omega}\,\mathbf{I}\,\vec{\omega}.
\end{aligned}
\tag{7.37}
$$

Jeżeli początek ruchomego układu współrzędnych pokryje się z środkiem masy, wówczas $\vec{R} = 0$ i dostajemy

$$2T = Mv_0^2 + I_\omega\omega^2. \tag{7.38}$$

Tak więc, podobnie jak poprzednio w przypadku momentu pędu, energia kinetyczna składa się z dwu części – jednej dającej energię kinetyczną ruchu postępowego środka mas i drugiej związanej z energią kinetyczną ruchu obrotowego bryły wokół środka mas. W przypadku pierwszych członów energii i momentu do opisu użyjemy współrzędnych kartezjańskich, natomiast w drugich wyrazach – zmiennych kątowych, np kątów Eulera. W większości fizycznie interesujących przypadków również i energia potencjalna da się podzielić na dwie części – jedną opisywaną przez współrzędne kartezjańskie i drugą opisywaną przez zmienne kątowe. Możemy więc całkiem ogólnie stwierdzić, że dowolne przemieszczenie bryły sztywnej da się przedstawić jako złożenie dwóch ruchów – postępowego i obrotowego. Pozwala to też na oddzielne traktowanie tych ruchów.

7. Osie główne tensora bezwładności

Momenty bezwładności zależą nie tylko od punktu w którym znajduje się początek ruchomego układu współrzędnych, lecz również od tego jak zorientowane są osie tego układu. Szczególnie dogodnym byłby układ, w którym wszystkie momenty dewiacji byłyby równe zeru, tak że tensor **I** byłby diagonalny

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \tag{7.39}$$

W takim układzie składowe momentu pędu dla bryły o jednym punkcie unieruchomionym, będą zależeć tylko od odpowiednich składowych wektora $\vec{\omega}$, tzn

$$\mathcal{J}_x = I_x\omega_x, \quad \mathcal{J}_y = I_y\omega_y, \quad \mathcal{J}_z = I_z\omega_z. \tag{7.40}$$

Również energia kinetyczna ma prostą postać

$$2T = \vec{\omega}\,\mathbf{I}\,\vec{\omega} = I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2. \tag{7.41}$$

Opierając się na tym, że tensor **I** jest symetryczny i ma elementy rzeczywiste można pokazać, że wybór taki jest zawsze możliwy. Istnieje więc przekształcenie przeprowadzające dany układ związany z bryłą sztywną w układ kartezjański, w którym tensor bezwładności jest diagonalny, przy czym elementami znajdującymi się na przekątnej są wartości własne tego tensora. Osie tego nowego układu nazywamy **osiami głównymi** (kierunkami) tensora bezwładności zaś elementy diagonalne I_x, I_y, I_z – *głównymi momentami bezwładności*. Samo przekształcenie nosi nazwę **transformacji do osi głównych**.

8. Elipsoida bezwładności

Pojęcie kierunków głównych można również wprowadzić poprzez rozważania geometryczne, tak jak było to zrobione po raz pierwszy. Moment bezwładności względem danej osi o wersorze $\vec{e}$ to $I_e = \vec{e}\,\mathbf{I}\,\vec{e}$. Oznaczając kosinusy kierunkowe wektora $\vec{e}$ względem osi układu związanego z bryłą, przez α, β, γ mamy $\vec{e} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ i wobec tego

$$\begin{aligned} I_e &= \left(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}\right) \mathbf{I} \left(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}\right) = \sum_i m_i \left(r_i^2\vec{e}^{\,2} - (\vec{r}_i\vec{e})^2\right) = \\ &= \sum_i m_i \left[r_i^2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right) - (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i)^2\right] = \\ &= \alpha^2\sum_i m_i\left(r_i^2 - x_i^2\right) + \beta^2\sum_i m_i\left(r_i^2 - y_i^2\right) + \gamma^2\sum_i m_i\left(r_i^2 - z_i^2\right) - \\ &\quad - 2\alpha\beta\sum_i m_i x_i y_i - 2\alpha\gamma\sum_i m_i x_i z_i - 2\beta\gamma\sum_i m_i z_i y_i = \\ &= \alpha^2 I_{xx} + \beta^2 I_{yy} + \gamma^2 I_{zz} + 2\alpha\beta I_{xy} + 2\alpha\gamma I_{xz} + 2\beta\gamma I_{zy}. \end{aligned} \tag{7.42}$$

Wprowadźmy teraz wektor

$$\vec{\rho} = (\rho_x, \rho_y, \rho_z) = \frac{\vec{e}}{\sqrt{I_e}},$$

związany, jak widać, z momentem bezwładności. Ostatnią równość możemy zapisać poprzez wektor $\vec{\rho}$

$$1 = I_{xx}\rho_x^2 + I_{yy}\rho_y^2 + I_{zz}\rho_z^2 + 2I_{xy}\rho_x\rho_y + 2I_{xz}\rho_x\rho_z + I_{yz}\rho_y\rho_z. \tag{7.43}$$

Traktując wielkości ρ_i jako zmienne, równanie to jest funkcją trzech zmiennych i w przestrzeni wektora $\vec{\rho}$ opisuje powierzchnie elipsoidy bezwładności bryły sztywnej. Jak wiadomo z geometrii analitycznej, zawsze istnieje przekształcenie współrzędnych kartezjańskich, które przeprowadza równanie elipsoidy do postaci kanonicznej

$$1 = I_x\rho_x^2 + I_y\rho_y^2 + I_z\rho_z^2, \tag{7.44}$$

przy czym osie główne skierowane są wzdłuż osi nowego układu współrzędnych. Postać kanoniczna pokrywa się z postacią wyprowadzona poprzednio dla przypadku gdy tensor bezwładności jest diagonalny. Główne momenty bezwładności określają długość osi elipsoidy. Jeżeli tensor momentu bezwładności ma dwie wartości własne równe, wówczas wyróżniony jest trzeci kierunek. Oś ta jest osią symetrii układu, gdyż każdy kierunek prostopadły do niej jest równoprawny i jest kierunkiem głównym. W takim przypadku elipsoida jest elipsoidą obrotową. Jeżeli wszystkie trzy wartości własne są równe, wówczas wszystkie kierunki są równoważne i zamiast elipsoidy mamy kulę, gdzie każdy kierunek jest kierunkiem głównym.

9. Równania Eulera

Poza pewnymi specjalnymi przypadkami, np gdy układ nie jest zachowawczy, wprowadzony do tej pory formalizm jest wystarczający aby utworzyć funkcję Lagrange'a i napisać równania ruchu. Przy odpowiednim wyborze układu współrzędnych (początek układu w środku masy bryły, tensor bezwładności sprowadzony do osi głównych) wyrażenia dla energii kinetycznej i momentu pędu znacznie się upraszczają.

Ponieważ chwilowa oś obrotu jest zawsze prostopadła do płaszczyzny w której odbywa się obrót, więc jeżeli rozpatrywany ruch jest płaski wówczas oś obrotu (wektor $\vec{e}$) pozostaje stała. Ze stałości osi obrotu wynika stałość momentu bezwładności względem tej osi. Liczba współrzędnych uogólnionych potrzebnych do opisu redukuje się do trzech, ponieważ dwie współrzędne kartezjańskie wyznaczają położenie środka mas na płaszczyźnie, natomiast ruch obrotowy można opisać przez jeden kąt. Nie ma tu konieczności wprowadzania kątów Eulera.

Możemy więc napisać równania ruchu bryły w postaci równań Lagrange'a. Okazuje się jednak, że gdy bryła ma jeden punkt unieruchomiony korzystniej jest posługiwać się **równaniami Eulera**. Aby je wyprowadzić skorzystajmy ze znanego związku miedzy momentem pędu i momentem siły

$$\frac{d\vec{\mathcal{J}}}{dt} = \vec{\mathcal{D}}. \tag{7.45}$$

Pochodna brana jest w układzie nieruchomym (laboratoryjnym). Korzystając z (7.16) dostaniemy

$$\left(\frac{d\vec{\mathcal{J}}}{dt}\right)_L = \left(\frac{d\vec{\mathcal{J}}}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\vec{\mathcal{J}} = \vec{\mathcal{D}}. \tag{7.46}$$

Stąd składowa x-owa tego równania (rzut na oś główną)

$$\frac{d\mathcal{J}_x}{dt} + \omega_y\mathcal{J}_z - \omega_z\mathcal{J}_y = \mathcal{D}_x. \tag{7.47}$$

Ponieważ rozpatrujemy to w układzie w którym tensor bezwładności został sprowadzony do osi głównych, więc

$$\mathcal{J}_x = I_x\omega_x, \tag{7.48}$$

i podobnie dla pozostałych składowych. Skoro momenty bezwładności są stałe w układzie ruchomym, to

$$\begin{aligned} I_x\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z\left(I_y - I_z\right) &= \mathcal{D}_x,\\ I_y\dot{\omega}_y - \omega_z\omega_x\left(I_z - I_x\right) &= \mathcal{D}_y,\\ I_z\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y\left(I_x - I_y\right) &= \mathcal{D}_z. \end{aligned} \tag{7.49}$$

Są to równania Eulera opisujące ruch bryły sztywnej o jednym punkcie unieruchomionym.

Jako przykład posługiwania sie równaniami Eulera znajdziemy ruch swobodnego ciała sztywnego, tzn ciała na które nie działają żadne siły. Środek mas takiego ciała będzie albo poruszał się jednostajnie po prostej, albo będzie spoczywał. Możemy przyjąć, że ciało spoczywa i że jedyny ruch to ruch obrotowy. Dla prostoty przyjmijmy, że ciało jest symetryczne i jako oś symetrii przyjmijmy oś Oz. Wówczas $I_x = I_y$, jako że każdy kierunek prostopadły do osi symetrii jest równoprawny, momenty sił znikają i równania Eulera przyjmują postać

$$\begin{aligned} I_x\dot{\omega}_x &= (I_x - I_z)\,\omega_z\omega_y, \\ I_y\dot{\omega}_y &= -\,(I_x - I_z)\,\omega_z\omega_x, \\ I_z\dot{\omega}_z &= 0. \end{aligned} \tag{7.50}$$

Z ostatniego równania wynika, że ω_z jest wielkością stałą. Można ja wiec traktować jako wielkość daną. Obliczmy teraz pochodna względem czasu pierwszego równania

$$I_x\ddot{\omega}_x \;\; (I_x - I_z)\,\omega_z\dot{\omega}_y$$

i zamiast $\dot{\omega}_y$ podstawmy wartość z drugiego równania. Dostaniemy

$$\ddot{\omega}_x = -\left(\frac{(I_x - I_z)\,\omega_z}{I_x}\right)^2 \omega_x.$$

Jest to równanie opisujące drgania harmoniczne ($\ddot{x} + \Omega^2\,x = 0$) o znanym rozwiązaniu

$$\omega_x(t) = A\sin\Omega t, \tag{7.51}$$

gdzie prędkość kątowa

$$\Omega = \frac{I_x - I_z}{I_z}\omega_z.$$

Funkcję $\omega_y(t)$ znajdziemy podstawiając rozwiązanie $\omega_x(t)$ do pierwszego z równań. Otrzymamy wtedy

$$\omega_y(t) = \frac{I_x}{(I_x - I_z)\omega_z}\,A\Omega\cos\Omega t. \tag{7.52}$$

Widać stąd, że wektor $\omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j}$ ma stałą długość A oraz równomiernie obraca się wokół osi Oz z prędkością kątową Ω. Cały wektor $\vec{\omega}$ wykonuje precesja wokół osi Oz z prędkością Ω. Jest to precesja wokół osi związanych z bryłą, natomiast sama bryła obraca się wokół układu nieruchomego z prędkością $\vec{\omega}$. Ze związku Ω z ω_z widać, że im mniejsza jest różnica pomiędzy momentem bezwładności względem osi o kierunku symetrii i momentem bezwładności względem osi do niego prostopadłej, tym mniejsza jest prędkość precesji wektora $\vec{\omega}$. Jeżeli bryła sztywna jest taka, że $I_x = I_y + I_z$, wówczas $\Omega = 0$, precesji nie ma i bryła obraca się ze stałą prędkością $\vec{\omega}$.

ROZDZIAŁ 8

Wprowadzenie do teorii chaosu

1. Wahadło z siłą wymuszającą

Do tej pory interesowaliśmy się dynamiką układów, których równania są liniowe, tzn zawierają szukaną zmienną i jej pochodne w pierwszej potędze. Przykładem może być równanie Newtona, lub równanie oscylatora, także z siłą wymuszającą $F(t)$, a siła F nie zawiera zmiennej x :

$$m\ddot{x} = k\dot{x} + F(t), \tag{8.1}$$

Jednakże już równanie, które w przybliżeniu prowadzi do podobnego ruchu, czyli równanie wahadła, gdzie L to długość nici na której zawieszona jest masa m, a ϕ to kąt wychylenia masy z położenia równowagi, nie jest równaniem liniowym. Mamy bowiem

$$mL^2\ddot{\phi} = -mgL\sin\phi, \tag{8.2}$$

i szukana wielkość ϕ jest argumentem funkcji sinus. Dopiero kiedy zastosujemy przybliżenie małych kątów $\sin\phi \approx \phi$, otrzymujemy równanie liniowe.

Podstawową różnicą pomiędzy rozwiązaniami równań liniowych i nieliniowych jest to, że dla tych pierwszych stosuje się zasada superpozycji, a więc każda kombinacja liniowa znanych już rozwiązań, też jest rozwiązaniem. Niech x_1, x_2 będą takimi rozwiązaniami, wówczas

$$x_3 = ax_1 + bx_2,$$

gdzie a, b to stałe, też jest rozwiązaniem, co można sprawdzić podstawiając takie rozwiązanie do równania liniowego, np równania Newtona. Rozwiązania równań nieliniowych takiej własności nie mają. Istnieje też dużo mniej typów równań nieliniowych, które mogą być rozwiązane analitycznie. Okazuje się, że równania nieliniowe prowadzą do bardzo bogatego spektrum rozwiązań, m.in. do rozwiązań opisujących chaos, rozumiany jako ruch, który nie wykazuje żadnych stałych, bądź powtarzających się cech. Równania takie są bardzo czułe na dobór warunków początkowych i ich niewielka zmiana może prowadzić do zupełnie różnego zachowania. Badania równań nieliniowych, które z konieczności prowadzone są przy pomocy metod numerycznych, wykazały, że wprawdzie nieliniowość jest warunkiem koniecznym powstania chaosu, nie jest jednak warunkiem wystarczającym. Tak np proste równanie (8.2) nie daje ruchu chaotycznego.

2. Wahadło tłumione z siłą wymuszającą

Aby z równania tego otrzymać równanie prowadzące do ruchu chaotycznego, dodajmy tłumienie, charakteryzowane przez współczynnik tłumienia b, oraz zależną od czasu siłę wymuszającą $LF(t)$. Otrzymamy wtedy

$$mL^2\ddot{\phi} = -mgL\sin\phi - bL\dot{\phi} + LF(t). \tag{8.3}$$

Tłumienie w ośrodku związane jest z jego oporem, który jest proporcjonalny do szybkości ruchu $v = L\dot{\phi}$. Aby móc dokładniej analizować równanie wahadła, należy zdecydować się na konkretną postać siły wymuszającej. Zwykle przyjmuje się, że zmienia się ona okresowo, czyli

$$F(t) = F_0\cos(\omega t). \tag{8.4}$$

F_0 jest amplitudą siły, zaś ω – częstością. Równanie (8.3) można przepisać w innej formie, wprowadzając współczynniki, którym będziemy mogli nadać sens fizyczny:

$$\ddot{\phi} + 2\beta\dot{\phi} + \omega_0^2 \sin\phi \;=\; \gamma\cos(\omega t) \tag{8.5}$$

gdzie

$$2\beta \;=\; \frac{b}{mL} \tag{8.6}$$

i β jest *współczynnikiem tłumienia*, natomiast

$$\omega_0^2 \;=\; \frac{g}{L}, \tag{8.7}$$

jest *naturalną częstością* wahadła, zaś

$$\gamma \;=\; \frac{F_0}{mL} \tag{8.8}$$

jest wielkością siły wymuszającej. Jeżeli $\gamma < 1$, możemy oczekiwać, że siła wymuszająca jest zbyt słaba aby spowodować istotne zmiany w zachowaniu układu.

Zobaczmy najpierw jak będzie się zachowywało wahadło jeżeli zastąpimy $\sin\phi$ w (8.5) przez ϕ, czyli zlinearyzujemy to równanie. Mamy tu do czynienia z wahadłem tłumionym, na które działa słaba siła wymuszająca. Zależność od warunków początkowych, charakterystyczna dla równań nieliniowych, jest w tym przypadku słaba i po stosunkowo krótkim czasie, w każdym przypadku ruch wahadła staje się harmoniczny o okresie równym okresowi drgań wymuszających, a rozwiązaniem jest

$$\phi(t) \;=\; A\cos(\omega t - \eta).$$

η jest fazą wyznaczaną z warunku początkowego. Możemy więc powiedzieć, że ruch ten charakteryzowany jest przez jeden *atraktor* określający typ trajektorii.

Jeżeli zwiększymy wartość siły wymuszającej, a więc zwiększymy wartość stałej γ, to możemy oczekiwać, że kąt wychylenia wahadła się zwiększy i przybliżenie liniowe funkcji sinus nie będzie już dobre. Jeżeli ϕ nie jest bardzo duże, to wystarczy w rozwinięciu funkcji sinus w szereg Taylora uwzględnić następny wyraz, czyli

$$\sin\phi \;\simeq\; \phi - \frac{1}{6}\phi^3.$$

Da to następujące równanie dla wahadła

$$\ddot{\phi} + 2\beta\dot{\phi} + \omega_0^2\left(\phi - \frac{1}{6}\phi^3\right) \;=\; \gamma\cos(\omega t). \tag{8.9}$$

Rozwiązania tego równania szukamy w postaci podobnej do uzyskanego poprzednio rozwiązania, tzn

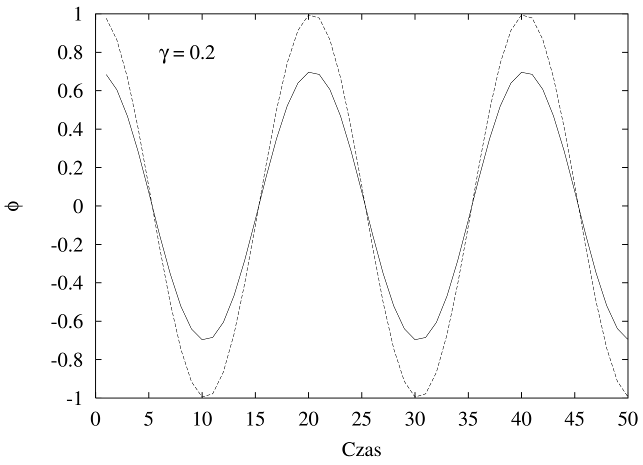
$$\phi(t) \;=\; A\cos(\omega t - \eta).$$

Jeżeli taką funkcję wstawimy do (8.9), wówczas pojawi się wyraz $\cos^3(\omega t - \eta)$. Wykorzystując tożsamość trygonometryczną

$$\cos^3 x \;=\; \frac{1}{4}\left(\cos 3x + 3\cos x\right),$$

widzimy, że lewa strona równania zależy od $3\omega t$, podczas gdy prawa strona tylko od ωt. Zależność musi być taka sama, co oznacza, że musimy zmodyfikować nasze założenie dotyczące przewidywanej postaci rozwiązania. Powinno ono mieć postać

$$\phi(t) \;=\; A\cos(\omega t - \eta) + B\cos 3(\omega t - \eta), \tag{8.10}$$



RYSUNEK 8.1. Zależność od czasu wychylenia ϕ, dla wahadła ze słabą siłą wymuszającą $\gamma = 0.2$, otrzymana z równania (8.5) dla przypadku gdy $\omega = 2\pi, \phi_0 = 0, \dot{\phi}_0 = 0$ oraz $\beta = \frac{\omega_0}{4}$ (linia ciągła) oraz dla porównania wykres funkcji cosinus (linia przerywana)

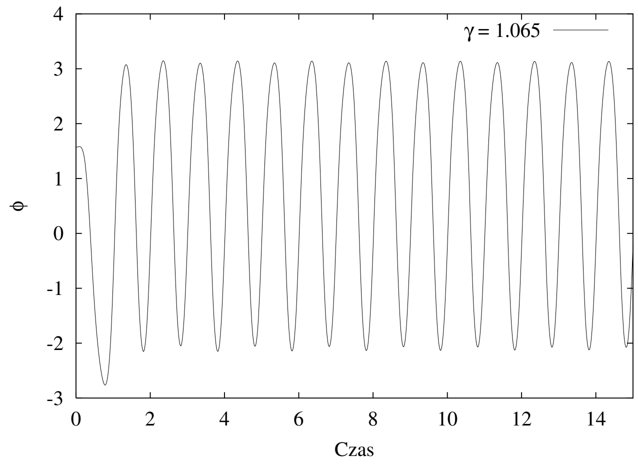
przy czym stała B powinna być dużo mniejsza od A, tak aby dodany człon był tylko poprawką do rozwiązania ze słabą siłą wymuszającą. W stałych tych mieszczą się współczynniki charakteryzujące dany układ.

Możemy proces ten kontynuować, uwzględniając kolejne wyrazy w szeregu Taylora i otrzymując w rozwiązaniu (8.10) kolejne dodatki w postaci funkcji trygonometrycznych typu $\cos n(\omega t - \eta)$, mnożonych przez coraz mniejsze współczynniki. Wszystkie takie wyrazy opisują ruch harmoniczny i noszą nazwę *harmonik* związanych z częstością wymuszającą ω. Z przedstawionej analizy widać, że w miarę tego jak rośnie siła wymuszająca, pojawiają się w rozwiązaniu coraz to nowe harmoniki. Ponieważ częstość drgań związanych z harmonikami jest całkowitą wielokrotnością częstości drgań siły wymuszającej, więc też i ruch wahadła będzie przez nie zmieniony. Objawia się to w postaci odstępstw od dokładnej zgodności wykresu ruchu z wykresem funkcji cosinus, co widać na rysunku 8.1.

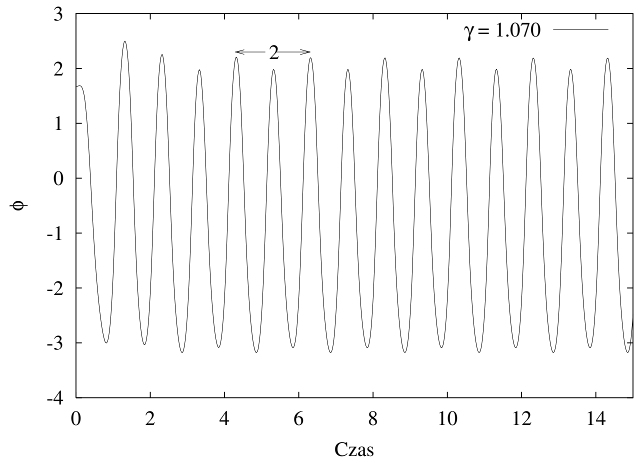
3. Droga do chaosu

Rozpatrzyliśmy, w sposób przybliżony, ruch prawie liniowego tłumionego wahadła z siłą wymuszającą. Jak było widać, nie obserwuje się, w tym zakresie zmienności parametru γ, zachowań, które można by określić jako chaotyczne.

Rozpatrzymy teraz większe wartości siły wymuszającej, a więc większe γ, np $\gamma = 1.065$. Jak widać na rysunku 8.2, na którym przedstawiona jest zależność od czasu wychylenia z położenia równowagi, początkowe zachowanie układu trudno jest nazwać periodycznym, jednak po stosunkowo krótkim czasie, ruch układu jest już okresowy. Po pewnym czasie, np po 10 okresach, położenia maksimów wypadają z dużą dokładnością w tym samym miejscu i mają tę samą wartość.
Dalsze zwiększenie wartości γ, do wartości 1.070, prowadzi już do nowego efektu. Oprócz jeszcze większego zaburzenia początkowej części wykresu ruchu wahadła, dochodzi coś nowego – wysokości kolejnych maksimów nie są już sobie równe, lecz też zaczynają oscylować. Co drugie z nich ma tę samą wartość, co oznacza, że okres wahadła uległ podwojeniu w stosunku do poprzedniego, równego okresowi siły wymuszającej. Możemy to określić też jako pojawienie się nowego atraktora. Jeżeli okres się wydłużył



RYSUNEK 8.2. Zależność od czasu wychylenia ϕ, dla wahadła z siłą wymuszającą $\gamma = 1.065$, otrzymana z równania (8.5) dla przypadku gdy $\omega = 2\pi, \phi_0 = pi/2, \dot{\phi}_0 = 0$.

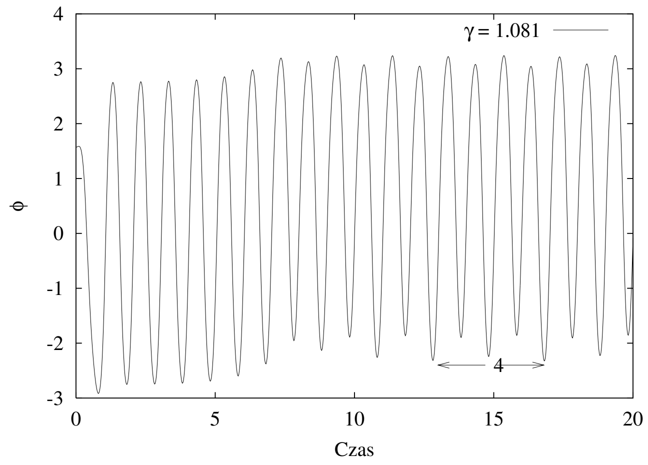


RYSUNEK 8.3. Zależność od czasu wychylenia ϕ, dla wahadła z siłą wymuszającą $\gamma = 1.070$, przy takich samych warunkach jak na rysunku 8.2.

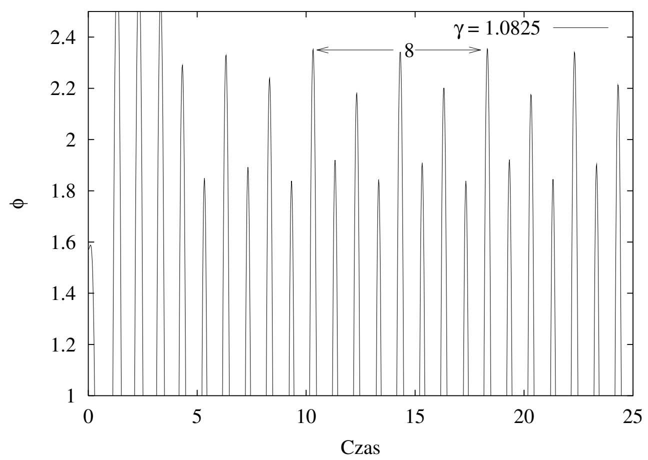
dwukrotnie to częstość zmniejszyła dwukrotnie – do $\omega/2$. Ponieważ współczynnik przy wyrazie zawierającym tę częstość jest dużo mniejszy niż współczynnik (A) przy wyrazie z częstością podstawową (ω), więc też i ruch wydaje się być sinusoidalnym.

Dalsze zwiększanie siły wymuszającej γ, prowadzi do kolejnego wydłużania okresu drgań. Dla $\gamma = 1.081$ okres jest równy 4 okresom początkowym,(rysunek 8.4), natomiast dla $\gamma = 1.0825$ okres zwiększa się do 8 (rysunek 8.5).

Zwiększanie wartości γ prowadzi do podwajania okresu drgań wahadła – otrzymujemy kolejno okresy równe 2,4,8,16,... okresom siły wymuszającej. Czasami nazywa się ten efekt *kaskadą podwajania okresu.*



RYSUNEK 8.4. Zależność od czasu wychylenia ϕ, dla wahadła z siłą wymuszającą $\gamma = 1.0781$, przy takich samych warunkach jak na rysunku 8.2.

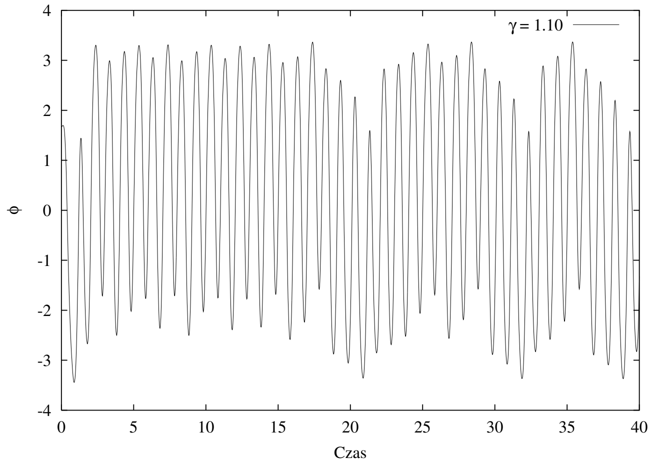


RYSUNEK 8.5. Zależność od czasu wychylenia ϕ, dla wahadła z siłą wymuszającą $\gamma = 1.0825$, przy takich samych warunkach jak na rysunku 8.2.

Z efektami tego typu spotykamy się zresztą nie tylko w układach mechanicznych, takich jak rozpatrywane tuCześć trzecia wahadło, lecz także i w układach chemicznych, biologicznych czy elektrycznych. Ważne jest aby zachowanie takiego układu było regulowane przez pewien zewnętrzny parametr, nazywany parametrem kontrolnym.

Kolejne wartości γ, przy których występuje podwojenie okresu (nazywane też *bifurkacją*) układają się w ciąg

$$\gamma = 1.05, 1.078, 1.081, 1.0816, ... \tag{8.11}$$



RYSUNEK 8.6. Zależność od czasu wychylenia ϕ, dla wahadła z siłą wymuszającą $\gamma = 1.10$, przy takich samych warunkach jak na rysunku 8.2.

i jak widać wartości te leżą coraz bardziej gęsto. Wartości przedstawione powyżej są wartościami przybliżonymi, a ich dokładne wyznaczenie nie jest sprawą prostą. Ograniczając się do pewnej dokładności, np do 5 cyfr znaczących, mamy ciąg odległości pomiędzy poszczególnymi punktami bifurkacji

$$odl \;=\; 0.0130, 0.0028, 0.0006, ... \tag{8.12}$$

Przy końcu lat 70-ych ubiegłego wieku Mitchell Feigenbaum pokazał, że dla wielu systemów, które wykazują zjawisko bifurkacji, odległości pomiędzy punktami bifurkacji dają się wyznaczyć ze wzoru

$$(\gamma_{n+1} - \gamma_n) \approx \frac{1}{\delta}\left(\gamma_n - \gamma_{n-1}\right). \tag{8.13}$$

Występująca tu stała

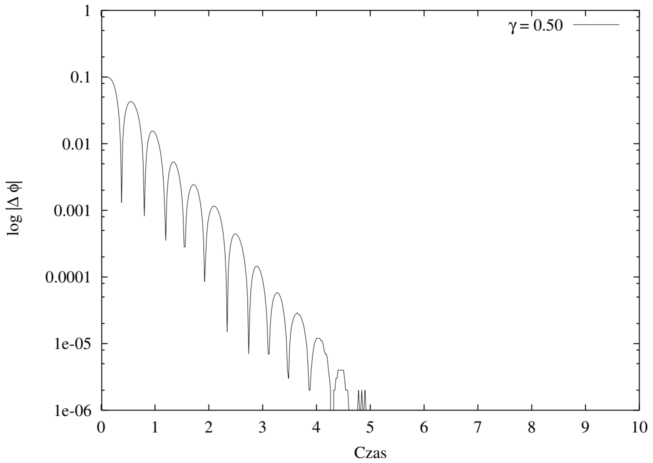
$$\delta \;=\; 4.6692016$$

znana jest jako *stała Feigenbauma*. Jak nietrudno się domyśleć, skoro ciąg (8.11) jest malejący, to istnieje wartość graniczna, dla której, w ramach założonej dokładności, nie ma już różnicy pomiędzy kolejnymi wartościami γ, obliczonymi ze wzoru (8.13). Wartość ta wynosi

$$\gamma_c \;=\; 1.0829. \tag{8.14}$$

4. Chaos

Co się dzieje z układem gdy siła wymuszająca ma wartość większą niż γ_c ? Okazuje się, że układ rozpoczyna ruch chaotyczny. Zależy on w sposób decydujący od warunków początkowych. Ruch naszego wahadła dla wartości $\gamma = 1.10$ ma postać przedstawioną na rysunku 8.6. Jeżeli teraz rozpatrzymy dwa wahadła opisywane tym samym równaniem, poddane tej samej sile wymuszającej, lecz startujące z nieco tylko różnych warunków początkowych, to pytanie jakie możemy sobie zadać będzie – czy po dostatecznie długim czasie trajektorie obu wahadeł zbliżą się do siebie, czy będą się coraz bardziej różniły. Gdy siła była niewielka, początkowe różnice torów, wynikające z różnych warunków początkowych, były dość szybko niwelowane i oba wahadła poruszały się tak samo (patrz rysunek 8.7). Aby lepiej zaobserwować ten proces (różnice są bardzo małe) narysujmy zależność nie samej różnicy dwu rozwiązań $\Delta\phi$, lecz wolniej zmiennej funkcji $\ln\Delta\phi$. Malenie różnicy pomiędzy rozwiązaniami oznacza, że ruch jest nieczuły



RYSUNEK 8.7. Zależność od czasu różnicy wychylenia $\Delta\phi$, dla wahadła z siłą wymuszającą $\gamma = 0.5$, przy dwóch różnych warunkach początkowych – $\phi(0) = \pi/2, \dot{\phi}(0) = 0$ oraz $\phi(0) = \pi/2 + 0.1, \dot{\phi}(0) = 0$.

na warunki początkowe. Taka sytuacja jest bardzo korzystna, ponieważ na ogół nie jesteśmy w stanie wyznaczyć warunków początkowych doświadczenia dowolnie dokładnie. Jeżeli nasz układ jest opisywany liniowymi, lub prawie liniowymi,Cześć trzecia równaniami, to precyzja w wyznaczeniu warunków początkowych nie jest więc istotna. W przypadku równań nieliniowych jest już gorzej. Gdy wartość γ jest mniejsza niż wartość krytyczna γ_c, wówczas także rozwiązania startujące z różnych warunków początkowych, zbliżają się do siebie, i to w tempie eksponencjalnym. Gdy jednak $\gamma > \gamma_c$ jest już inaczej.

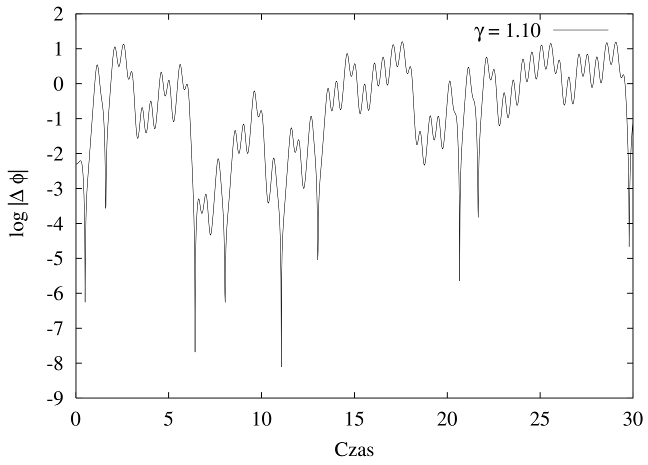
Na rysunku 8.7 przedstawiona jest zależność od czasu różnicy, $\ln \Delta\phi(t)$, pomiędzy dwoma rozwiązaniami nieliniowego równania wahadła (8.5) gdy nie osiągnięty został jeszcze zakres parametru γ odpowiadający ruchowi chaotycznemu. Na następnym rysunku (8.8) pokazana jest ta sama zależność gdy wartość γ jest większa niż γ_c

Oznacza to, że w przypadku ruchu chaotycznego dwa rozwiązania, różniące się bardzo nieznacznie na początku ewolucji czasowej układu, będą prowadziły do zupełnie innego ruchu w późniejszych chwilach czasu. Można pokazać, że różnica między takimi dwoma rozwiązaniami może być opisana zależnością potęgową

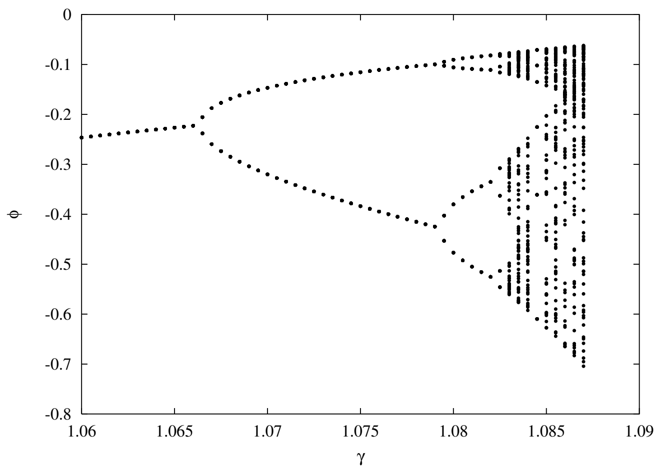
$$\Delta\phi(t) \sim Ke^{\lambda t}, \tag{8.15}$$

gdzie K jest stałą, natomiast λ nazywane jest **wykładnikiem Liapunowa**. Dla układów nie wykazujących chaosu, a więc asymptotycznie dążących do ruchu periodycznego, λ jest ujemne, czyli $\Delta\phi(t)$ maleje wykładniczo, natomiast dla ruch chaotycznego λ jest dodatnie, a więc różnica pomiędzy rozwiązaniami rośnie z czasem.

Często do przedstawienia całej zależności typu ruchu od wartości parametru kontrolnego (w tym przypadku siły wymuszającej) konstruuje się tzw *diagram bifurkacyjny.* W płaszczyźnie $(\gamma, \phi(t))$ oznacza się wartości jakie asymptotycznie może przyjmować ϕ dla danej wartości γ. Gdy γ jest mniejsze od γ_1 $= 1.0663$, ruch jest periodyczny z jednym okresem i możliwa jest tylko jedna wartość ϕ. Na wykresie odpowiada temu linia dochodząca do γ_1. Przy tej wartości następuje bifurkacja, czyli podwojenie okresu – pojawiają dwie możliwe wartości kąta ϕ i w kolejnych chwilach czasu układ przeskakuje od jednej do drugiej wartości. Na wykresie (rysunek 8.9) pojawiają się dwie linie, które dochodzą do wartości



Rysunek 8.8. Zależność od czasu różnicy wychylenia $\Delta\phi$, dla wahadła z dużą siłą wymuszającą $\gamma = 1.10$, przy dwóch różnych warunkach początkowych – $\phi(0) = \pi/2, \dot{\phi}(0) = 0$ oraz $\phi(0) = \pi/2 + 0.1, \dot{\phi}(0) = 0$.



Rysunek 8.9. Diagram bifurkacyjny, pokazujący jakie są możliwe rozwiązania równania (8.5) przy zadanej wartości γ. Widoczne jest zarówno podwajanie okresu jak i to, że dla dużych wartości γ istnieją obszary o niższej periodyczności

$\gamma_2 = 1.0793$, gdzie następuje kolejna bifurkacja, tak więc mamy odtąd 4 okresy, którym na wykresie odpowiadają cztery linie. Kolejna bifurkacja prowadzi do pojawienia się 8 okresów (i 8 linii) itd. Wreszcie, dla $\gamma_c = 1.0829$, pojawiają się rozwiązania chaotyczne, co na wykresie przedstawione jest jako zbiór bardzo wielu punktów, czyli bardzo wielu „okresów”. Jednakże przy dalszym zwiększaniu γ można zauważyć jasne obszary na wykresie, co odpowiada sytuacji, w której istnieje tylko kilka możliwych okresów, a więc ruch z powrotem stał się prawie periodyczny.

Przedstawione tutaj rozważania stanowią, w gruncie rzeczy, tylko wstępne informacje dotyczące jednego rodzaju chaosu – chaosu w układach dysypatywnych, a więc takich, które tracą energię, w tym przypadku na skutek tłumienia.

5. Odwzorowanie logistyczne

W wielu przypadkach opisujemy układ, który charakteryzowany jest przez dyskretny czas. Może to być np coroczne zbieranie danych dotyczących liczby narodzin i zgonów, godzinowy zapis liczebności populacji muszki owocowej w badaniach biologicznych, czy też jakiekolwiek inne, cyklicznie zbierane dane. Interesujące jest w takich przypadkach znalezienie prawidłowości w czasowym rozwoju badanej wielkości. Można to zapisać jako związek pomiędzy wartością badaną n w chwili t i w następnej chwili $t+1$

$$n_{t+1} = f(n_t). \tag{8.16}$$

Równania tego typu są znane i często stosowane przez ekologów przy badaniach wzrostu populacji. Wtedy równanie to ma postać

$$n_{t+1} = r\,n_t = f(n_t), \tag{8.17}$$

gdzie r nazywany jest **parametrem wzrostu** populacji, a równanie nosi nazwę **równania logistycznego**. Iterując to równanie dostajemy

$$n_1 = rn_0 \Rightarrow n_3 = rn_2 = r^2n_0, \quad n_t = r^tn_0.$$

Oczywiście przy $r > 1$ otrzymujemy niekontrolowany wzrost populacji, dla $r = 1$ populacja ma stałą liczebność, natomiast dla $r < 1$ populacja ginie. Sytuacja taka jest wprawdzie matematycznie bardzo prosta, ale mało realistyczna. Szczególnie dotyczy to wykładniczego wzrostu populacji. W rzeczywistości każda populacja żyje na pewnym terytorium, które może pomieścić i gdzie może się wyżywić pewna skończona liczba osobników. W ekologii taką wielkość nazywa się **pojemnością środowiska**. Oznaczmy ja przez N. W 1838 roku

belgijski matematyk i fizyk P. F. Verhulst zaproponował wprowadzenie czynnika ograniczającego wzrost populacji, znanego obecnie jako **czynnik Verhulsta**. Równanie logistyczne z czynnikiem Verhulsta ma postać

$$n_{t+1} = rn_t\left(1 - \frac{n_t}{N}\right). \tag{8.18}$$

Zwykle wielkości występujące w równaniu logistycznym normuje się do pojemności środowiska

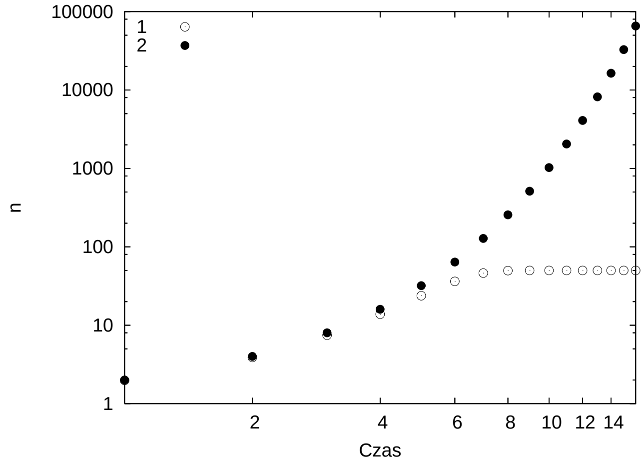
$$x = \frac{n}{N}, \qquad 0 \le x \le 1,$$

przy czym wielkość x nazywana jest często *koncentracją populacji* a równanie (8.18) ma wówczas postać

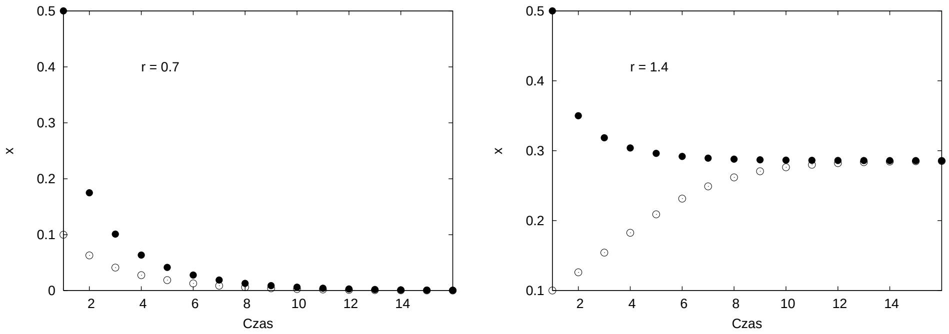
$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t). \tag{8.19}$$

Porównanie dynamiki populacji opisywanej równaniem (8.17), a więc bez czynnika Verhulsta i populacji gdzie włączony jest czynnik Verhulsta (równanie (8.18)) pokazuje rysunek 8.10 W dalszym ciągu wykładu korzystać będziemy z równania logistycznego zawierającego czynnik Verhulsta. Równanie to bywa także czasem nazywane *odwzorowaniem, lub mapą logistyczną*. Jeżeli ustalimy wartość czynnika wzrostu np na $r = 0.7$ i $r = 1.4$, a więc poniżej i powyżej wartości dla której populacja ma stałą liczebność, to otrzymamy wykresy jak na rysunku 8.11 Jak widać, pojawiły się punkty stałe przekształcenia (8.18), to znaczy począwszy od pewnej wartości parametru t wartość x nie zmienia się, co można zapisać jako

$$x_{t+1} = x_t = x^*, \quad \text{albo} \quad f(x^*) = x^* \quad \text{dla} \quad t > t^*. \tag{8.20}$$



Rysunek 8.10. Porównanie zachowania populacji w której działa (krzywa 1) i w której nie działa (krzywa 2) czynnik Verhulsta

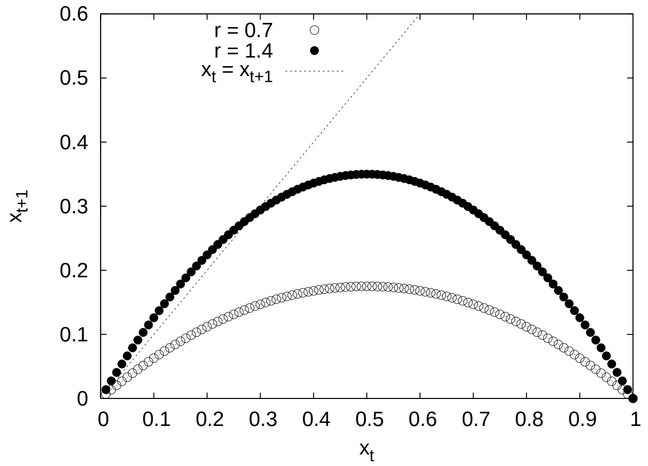


Rysunek 8.11. Zachowanie populacji startujących z dwu początkowych koncentracji $x(0) = 0.1$ i $x(0) = 0.5$ dla przypadku gdy czynnik wzrostu $r < 1$ (lewy wykres) i gdy $r > 1$ (prawy wykres)

Rozwiązując równanie logistyczne dla punktu stałego, dostaniemy

$$rx^*(1 - x^*) = x* \quad \Rightarrow x^* = 0 \quad \text{albo} \quad x^* = \frac{r-1}{r} \tag{8.21}$$

Zainteresowanie równaniami logistycznymi wzrosło znacznie po roku 1960, kiedy to E. Lorenz rozwiązywał numerycznie zgadnienie prognozowania pogody. Rozpatrywał układ 12 równań wiążących takie parametry jak temperatura, siła wiatru, wilgotność, ciśnienie itp i, jak większość naukowców w tamtych czasach, był przekonany,że niewielkie różnice we wprowadzanych danych początkowych będą prowadziły do również niedużych różnic wyników. Okazało się to być nieprawdziwym założeniem. W jednej fazie obliczeń przyjął na początku jako wartość wejściową liczbę 0.506127, a w drugim 0.506. Wprawdzie różnica była dopiero na czwartej cyfrze znaczącej, jednak po pewnym czasie rozwiązania różniły się już bardzo znacznie. Ten typ zależności rozwiązania od, nawet niewielkich, różnic w warunkach początkowych zyskał nazwę *efektu motyla*, co ma wyrażać fakt, że machnięcie skrzydłami motyla w Polsce może wpłynąć



RYSUNEK 8.12. Metoda graficzna otrzymania punktu stałego x^* dla dwu wartości r - mniejszej i większej od 1.

na opady w Australii. Podobnym problemem przy rozwiązywaniu równań nieliniowych jest kwestia dokładności obliczeń. Aby się o tym przekonać wystarczy obliczyć kilkadziesiąt iteracji równania logistycznego np dla $r = 3$, korzystając z podręcznego kalkulatora, arkusza kalkulacyjnego czy też pisząc program na komputer wykorzystujący 32-bitowy procesor. Wyniki mogą się różnić nawet o kilka rzędów !

Wracając do naszego równania logistycznego (8.18) to jego punkty stałe możemy również wyznaczyć posługując się metodą graficzną. Polega ona na tym, że wykreślamy zależność pomiędzy kolejnymi wartościami iterowanej wielkości (tutaj jest to x_t) oraz prostą $x_t = x_{t+1}$. Przecięcie się tych linii daje nam punkt stały , x^*, odwzorowania (8.18). Jest to przedstawione na rysunku 8.12

Jak widać, jeżeli $r \leq 1$, wówczas istnieje tylko jeden punkt wspólny $(0, 0)$. Dla r większego od 1 pojawia się drugi, bardziej nas interesujący punkt. Metoda graficzna jest szczególnie przydatna wtedy gdy nie możemy analitycznie wyznaczyć wartości punktu stałego.

Jeżeli zaczniemy obliczenia w równaniu logistycznym od wartości x^*, wówczas oczywiście wszystkie kolejne wartości x będą też równe x^*. Pytanie jakie możemy postawić to czy jeżeli jako wartość początkową weźmiemy x bliskie, ale nie równe x^*, czy także rozwiązania zdążać będą do x^*. Jeśli tak będzie, wówczas punkt ten będzie **atraktorem** odwzorowania i będzie punktem stabilnym. Sytuacja jest analogiczna do badania warunków równowagi mechanicznej.

5.1. Test stabilności punktu stałego. Oznaczmy przez Δx_t różnicę pomiędzy x^* i wartością x_t

$$\Delta x_t = x_t - x^*. \tag{8.22}$$

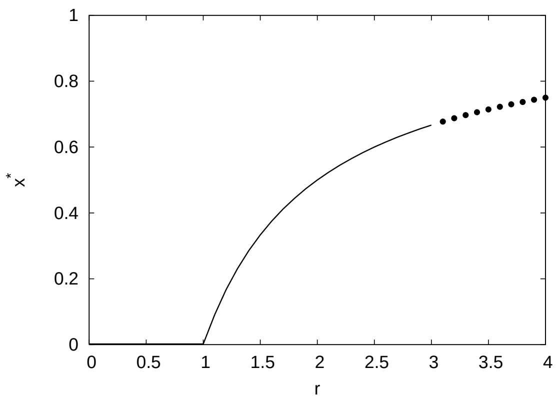
Zakładając, że Δx_t jest małe, możemy rozłożyć x_{t+1} w szereg i zachować tylko wyraz liniowy

$$x_{t+1} = f(x_t) = f(x^* + \Delta x_t) = f(x^*) + f'(x^*)\Delta x_t + ... \approx x^* + f'(x^*)\Delta x_t, \tag{8.23}$$

gdzie wykorzystaliśmy to, że $f(x^*) = x^*$. Oznaczając pochodną $f'(x^*)$ przez μ mamy

$$x_{t+1} = x^* + \Delta x_{t+1} = x^* + \mu\Delta x_t \quad \Rightarrow \Delta x_{t+1} = \mu\Delta x_t. \tag{8.24}$$

Jeśli więc $|\mu| \leq 1$, to kolejne kroki czasowe będą dawały wartości leżące bliżej x^*, natomiast gdy moduł μ jest większy od zera, punkty te będą leżeć dalej.



RYSUNEK 8.13. Wykres stabilności punktów stałych równania (8.18). Linia ciągła to obszar wartości r gdzie punkt x^* jest stabilny, linia przerywana - gdzie jest niestabilny

Możemy więc sformułować następujące kryterium stabilności punktu stałego:
Jeżeli $x_{t+1} = f(x_t)$ *i* $|f\prime(x_t)| \leq 1$ *to* $x^* = f(x^*)$ *jest stabilnym punktem stałym.* Sprawdzimy to teraz na odwzorowaniu logistycznym (8.18)

$$f(x) = rx(1-x) \quad f'(x) = r(1-2x). \tag{8.25}$$

Tak więc dla $x^* = 0$ mamy

$$f'(x) = r$$

natomiast dla drugiego rozwiązania $x^* = \frac{r-1}{r}$ mamy

$$f'(x) = 2 - r. \tag{8.26}$$

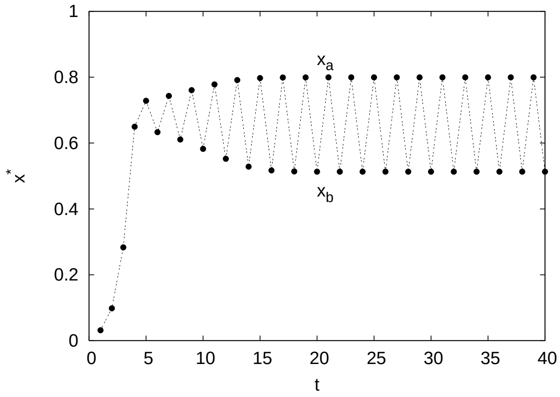
Widać więc, że drugi punkt stały jest stabilny w przedziale $1 \leq r \leq 3$. Pokazuje to rysunek 8.13

Pozostaje jeszcze pytanie, co się dzieje gdy r jest większe niż 3. Jeżeli chcemy utrzymać dotychczasową interpretację zmiennej x jako koncentracji, a więc wielkości ograniczonej przez 0 i 1, to wartość r musi być zawarta w przedziale $[0, 4]$.

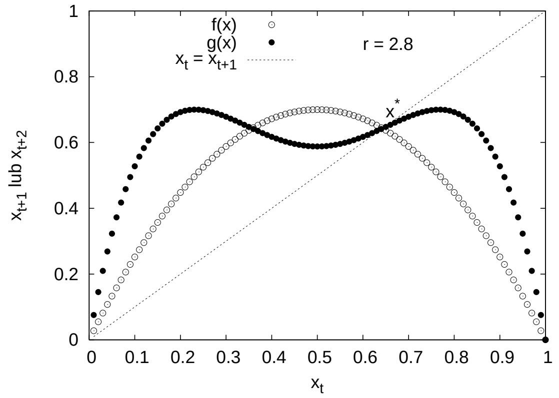
Weźmy teraz w równaniu logistycznym (8.18) $r = 3.2$. Jak widać z rysunku 8.14, w miejsce jednego punktu stałego pojawiły się dwa (x_a i x_b) i rozwiązania oscylują, „przeskakując" w kolejnych krokach pomiędzy x_a i x_b. Oznacza to, że okres zmian uległ podwojeniu - np populacja w latach parzystych koncentrację x_a, natomiast w latach nieparzystych koncentrację x_b. Jak widać też ani x_a ani x_b nie są punktami stałymi badanego odwzorowania. Możemy teraz zdefiniować nowe odwzorowanie, $g(x)$, które będzie nam dawało związek wartości zmiennej x w danej chwili t z wartością zmiennej wyznaczona dwa kroki czasowe wcześniej

$$x_{t+2} = g(x_t) = f(f(x_t)). \tag{8.27}$$

Aby znaleźć punkty stałe odwzorowania g możemy zastosować poznaną wcześniej metodę graficzną. Tym razem tablicować będziemy wartości x_{t+2}, x_t wyznaczone z równania (8.27). Na rysunku 8.15 przedstawione są dwa rozwiązania - dla funkcji $f(x)$ oraz $g(x)$ oraz $r = 2.8$. Dostajemy, zgodnie z tym co znaleźliśmy uprzednio, jedno rozwiązanie, ponieważ prosta $x_{t+2} = x_t$ przecina wykres funkcji $g(x)$ w jednym miejscu (poza zerem). Rozwiązanie to (x^*) jest tożsame z rozwiązaniem otrzymanym dla funkcji $f(x)$. Gdy $r = 3$ prosta jest styczna do prawego „garbu" krzywej $g(x)$ mamy $|g'(x^*)| = 1$, co oznacza, że dla $r = 3$, rozwiązanie przestaje być stabilne. Biorąc $r = 3.5$ otrzymujemy wykres jak na rysunku 8.16, gdzie



RYSUNEK 8.14. Zależność czasowa wartości asymptotycznej zmiennej x dla $r = 3.2$



RYSUNEK 8.15. Wykresy funkcji f(x) oraz g(x) i prostej $x_{t+2} = x_t$ dla $r = 2.8$

pojawiły się dwa dodatkowe punkty przecięcia prostej z funkcją $g(x)$ - jedno w x_a, drugie w x_b., natomiast punkt x^* jest już niestabilny.

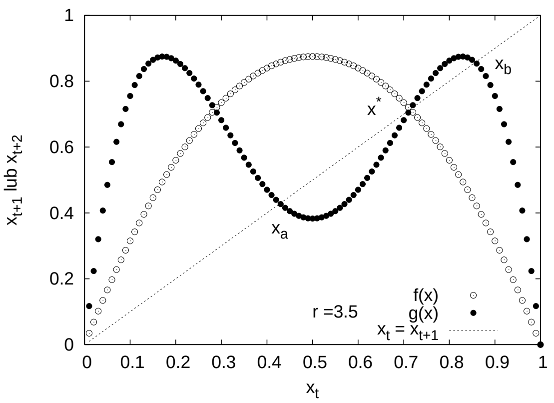
Co będzie jeżeli dalej będziemy zwiększać r ? Okazuje się, że dla

$$r = 1 + \sqrt(6) = 3.449$$

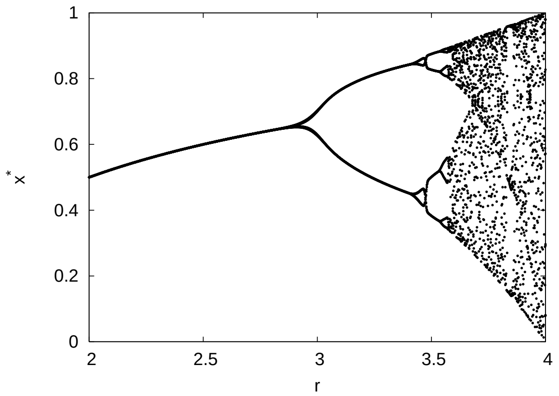
podwójny okres staje sie też niestabilny i pojawia się stabilny cykl poczwórny, a więc co cztery jednostki czasowe układ powraca do tej samej wartości - populacja co cztery lata ma tę sama koncentrację. Dalsze zwiększanie r, ale nie powyżej 4, prowadzi do powstania diagramu bifurkacyjnego (rysunek 8.17), analogicznego do tego, który otrzymaliśmy w przypadku wahadła z tłumieniem i siłą wymuszającą. Obserwujemy więc także dla równania logistycznego obszar chaosu, a wartości parametru r, przy których następuje podwojenie okresu układają się w ciąg

$$r_1 = 3,\ r_2 = 3.4495,\ r_3 = 3.5441,\ r_4 = 3.5644,\ r_5 = 3.5688, r_6 = 3.5697, ... \tag{8.28}$$

Wykres ten ma ciekawą własność. Jeżeli wytniemy z niego kawałek i powiększymy do rozmiarów poprzedniego wykresu, otrzymany rysunek będzie wyglądał tak samo jak oryginalny. Taka własność nazywamy

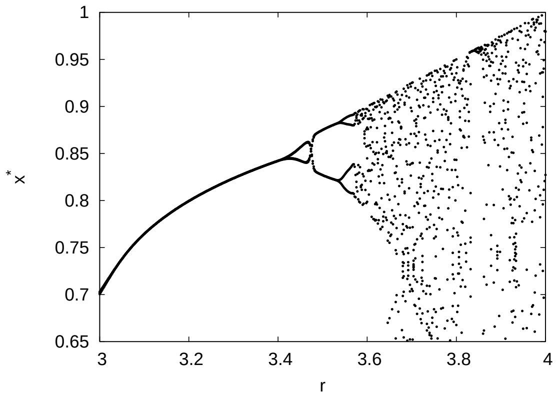


RYSUNEK 8.16. Wykresy funkcji f(x) , g(x) oraz prostej $x_{t+2} = x_t$ dla $r = 3.5$



RYSUNEK 8.17. Diagram bifurkacyjny pokazujący zależność liczby punktów stałych w funkcji wartości parametru r.

samopodobieństwem a obiekty, które tę własność wykazują nazywamy *fraktalami*. Z reguły sa one zresztą tworzone w inny sposób, jako prosty proces iteracyjny, np trójkąt Sierpińskiego, gdzie boki wyjściowego trójkąta równobocznego dzieli się w połowie, łączy liniami i otrzymuje w ten sposób cztery trójkąty równoboczne wpisane w trójkąt wyjściowy. Usuwamy trójkąt centralny, a na pozostałych stosujemy procedurę podziału boków o tworzenia nowych trójkątów.



RYSUNEK 8.18. Fragment diagramu bifurkacyjnego z rysunku 8.17

ROZDZIAŁ 9

Szczególna teoria względności

Zajmiemy się teraz badaniem ruchu PM w układzie inercjalnym, przy czym ruch ten odbywać się będzie mógł z prędkością porównywalną z prędkością światła c. Doświadczenia prowadzące do konieczności powstania takiej teorii są znane z kursu podstaw fizyki i nie będziemy ich tu omawiać.

Podstawowym postulatem szczególnej teorii względności jest *równoważność zjawisk fizycznych we wszystkich układach inercjalnych.* Jest to tzw **zasada względności Einsteina**. Można ją sformułować też następująco: *przy pomocy doświadczeń fizycznych nie jesteśmy w stanie rozróżnić „układu spoczywającego" i układu poruszającego się względem niego ruchem jednostajnym.* Zasada Einsteina wymaga więc aby prawa fizyki miały tę samą postać we wszystkich układach inercjalnych. Zasada Einsteina jest uogólnieniem **zasady Galileusza**, która mówi, że prawa mechaniki są identyczne w układach inercjalnych.

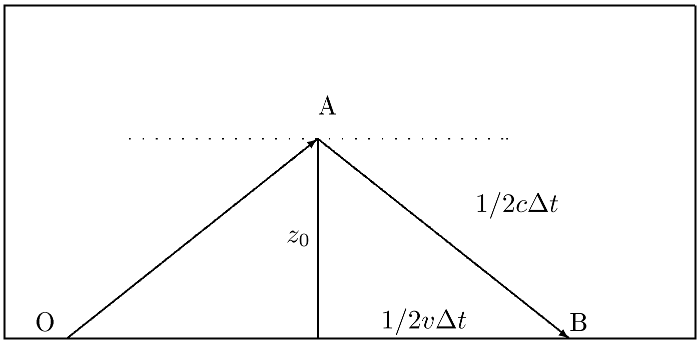
Jeżeli prawa fizyki są takie same we wszystkich układach inercjalnych, to również prędkość światła względem obserwatora jest stała i nie zależy od tego czy obserwator porusza się czy spoczywa. Przyjęcie, za Einsteinem, że prędkość ta jest skończona, co często nazywane jest **drugim postulatem Einsteina**, prowadzi do wielkich zmian obrazu świata.

W mechanice newtonowskiej, gdzie słuszna jest zasada Galileusza, aby przejść od jednego układu współrzędnych do drugiego (zawsze będą to układy inercjalne) posługiwaliśmy się przekształceniem Galileusza

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t, \quad \Delta t' = \Delta t\,. \tag{9.1}$$

gdzie $\vec{v}$ jest prędkością jednego układu względem drugiego, zaś $\Delta t'$ i Δt są przedziałami czasu mierzonymi odpowiednio w każdym z układów. Jeżeli jednak prędkość światła jest skończona i stała w każdym układzie, to przekształcenie to nie uwzględnia tego faktu. Jeśli bowiem w początku układu U znajduje się źródło światła promieniujące falę kulistą, wówczas prędkość punktu na powierzchni takiej sfery będzie $\dot{\vec{r}} = c\vec{n}$, gdzie $\vec{n}$ jest wersorem skierowanym wzdłuż $\vec{r}$. Różniczkując przekształcenie Galileusza względem czasu otrzymamy $\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} - \vec{v}$, a więc prędkość punktu na powierzchni sfery liczona w układzie U' będzie $\dot{\vec{r}}' = c\vec{n} - \vec{v}$. Będzie ona na ogół różna od c i nie będzie falą kulistą.

Również i prawo transformacji przedziałów czasowych (9.1) nie jest słuszne. Niech bowiem punkt A będzie równo-odległy od punktów B i C w układzie U. Sygnał świetlny wysłany z A dotrze w tym samym czasie do punktów B i C, z których zostanie on w tej samej chwili odesłany z powrotem. W układzie U sygnały te spotkają się w połowie drogi między B i C, a więc w A. Rozpatrzmy teraz tę samą sytuację z punktu widzenia obserwatora w układzie U' (zakładamy odtąd, że układy U i U' poruszają się względem siebie). Przyjmijmy, że w chwili gdy w U do punktów B i C dotrą sygnały, punkty te pokrywają się z punktami B' i C' układu U'. Ponieważ jednak U i U' poruszają się względem siebie, więc sygnały wysłane z B i C nie spotkają się w połowie drogi między B' i C', lecz bliżej jednego z nich (np B'). Prędkość światła jest stała, więc ponieważ w U' sygnały1 spotkały się nie w połowie drogi, oznacza to, że zostały wysłane nie jednocześnie, lecz sygnał z C' został wysłany wcześniej. Co znaczy, że zjawiska, w naszym przypadku wysłanie sygnałów świetlnych z B i C, które są jednoczesne w jednym układzie, nie są takimi w innym układzie, jeśli układy te poruszają się wzajemnie. Tak więc przekształcenie $\Delta t' = \Delta t$ nie może być spełnione.



RYSUNEK 9.1. Droga sygnału w ruchomym układzie współrzędnych.

Trzeba poszukać innego przekształcenia, które zastąpi (9.1). Z drugiej jednak strony cała mechanika newtonowska oparta jest właśnie na tym przekształceniu i wiadomo, że gdy prędkości PM nie są duże, jest ona słuszna. Jeżeli przyjąć, że prędkość światła jest nieskończona to przedstawione powyżej problemy znikają. Uogólnienie wynikające z postulatu Einsteina staje się istotne wtedy gdy prędkości PM są tak duże, że prędkości światła nie można już uważać za nieskończoną. Nowe przekształcenie powinno zachowywać stałą prędkość światła i jednocześnie dla małych prędkości przechodzić w przekształcenie Galileusza. Przekształcenie takie istnieje i nosi nazwę przekształcenia Lorentza (PL).

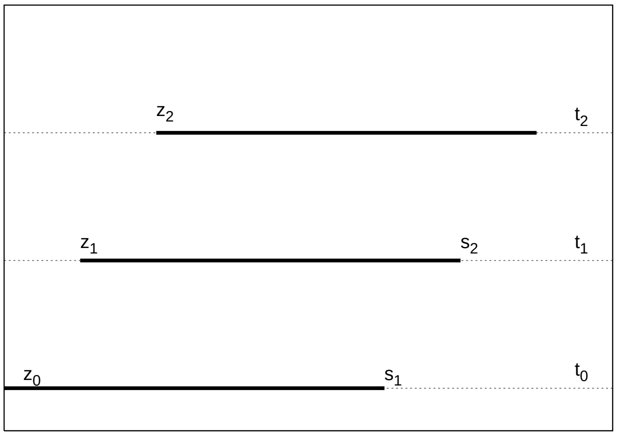
Równania Newtona są niezmiennicze względem przekształcenia Galileusza, które trzeba będzie zastąpić przez PL. Dlatego też prawdopodobnie równania te nie będą niezmiennicze względem przekształcenia Lorentza.Podobnie może być i dla innych znanych nam równań fizyki. Trzeba więc będzie znaleźć taką postać tych równań, która będzie niezmiennicza względem PL.

Ustalmy najpierw jak będziemy charakteryzowali zdarzenia. Będziemy to robić przez podanie trzech współrzędnych przestrzennych miejsca, względem danego układu współrzędnych, oraz czasu w jakim zdarzenie zaszło. Zakładamy, że w każdym punkcie przestrzeni mamy do dyspozycji zegar. Wszystkie zegary w danym układzie są zsynchronizowane. Można to osiągnąć w ten sposób, że (dla 1D) w punkcie odległym od początku układu o x, początek odczytu czasu ustawiony jest na chwilę $t = x/c$ i1 uruchamiany przez sygnał świetlny wysłany z początku układu w chwili $t = 0$.

1. Wydłużenie czasu i skrócenie lorentzowskie

Przyjmując zasadę Einsteina można pokazać, że przedział czasu między dwoma zdarzeniami, mierzony w układzie, w którym ciało spoczywa, jest krótszy niż przedział między tymi samymi zdarzeniami mierzony w układzie poruszającym się względem niego. Inaczej mówiąc, przedział czasu mierzony jednym zegarem jest zawsze krótszy niż mierzony dwoma (lub więcej) zegarami.

Rozpatrzmy dwa układy U i U', o względnej prędkości $\vec{v}$. Dla prostoty przyjmijmy, jak to będziemy często dalej robić, że układy poruszają się wzdłuż jednej osi, np Ox. Niech teraz w U' w początku układu O' umieszczony będzie zegar i źródło światła. Na osi prostopadłej do kierunku ruchu, np na osi Oz', w punkcie A i odległości z'_0 od O' znajduje się zwierciadło. Sygnał świetlny wysłany ze źródła dotrze do lustra, odbije się i powróci do punktu O' w czasie $\Delta t' = 2z'_0/c$. Taką sytuację zobaczy obserwator w U'. W U będzie to wyglądało inaczej. Wysłanie i zarejestrowanie sygnału nastąpi nie w jednym, lecz w dwu punktach O i B (p.rysunek 9.1). Przedział czasu Δt zmierzony będzie w U przy pomocy dwu zegarów. Odległość między punktami O i B wynosi $v\Delta t$. Ponieważ prędkość światła jest stała, więc



RYSUNEK 9.2. Pomiar długości w układzie nie związanym z prętem.

trójkąt OAB jest równoramienny i stąd

$$z_0^2 + \frac{1}{4}v^2\Delta t^2 = \frac{1}{4}c^2\Delta t^2,$$

a więc

$$\Delta t = \frac{2z_0}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2z_0}{c\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{gdzie} \quad \beta = \frac{v}{c}\,.$$

Ponieważ długość w kierunku prostopadłym do ruchu nie ulega zmianie, więc $z_0 = z_0'$ i zamiast z_0' możemy podstawić $\frac{1}{2}c\Delta t'$. Ostatecznie dostajemy

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{9.2}$$

W U' oba zdarzenia zaszły w tym samym miejscu, a więc przedział czasu między nimi zmierzony został jednym zegarem. Taki przedział czasu nazywać będziemy przedziałem **czasu własnego** dla tych zdarzeń. Ponieważ pierwiastek w ostatnim wyrażeniu jest nie większy od jedności, więc $\Delta t' \leq \Delta t$, czyli przedział czasu własnego jest najmniejszy.

Zajmiemy się teraz zmianą długości prętów położonych równolegle do kierunku względnego ruchu układów. Niech pręt ten spoczywa w U'. Pomiar długości pręta jest tu prosty. Wystarczy podać współrzędne, względem U', początku i końca pręta. Zrobić to można oczywiście w dowolnych dwu, lub jednej chwilach. W układzie U, względem którego pręt się porusza, współrzędne jego końców muszą być oczywiście zmierzone jednocześnie (z punktu widzenia obserwatora w U). Pomiaru dokonajmy w następujący sposób. Lewy koniec pręta umieśćmy w początku U' tzn w O' i tam ustawmy źródło światła z'. Na prawym końcu pręta niech będzie lustro s. Rozpatrzmy dwa zdarzenia - pierwsze to wysłanie z O', w chwili $t' = 0$ sygnału, drugie to zarejestrowanie tego sygnału w O', po jego odbiciu od lustra. Oba te zdarzenia zaszły w jednym miejscu, stąd przedział czasu między nimi to $\Delta t'$ - przedział czasu własnego. Jest on równy $\Delta t' = 2l'/c$, gdzie l' jest długością pręta mierzoną w układzie, w którym on spoczywa. W analogii do czasu, długość tę nazywamy **długością własną**. Wszystkie pomiary z jakimi mamy do czynienia w życiu codziennym dotyczą długości własnej, podobnie jak i czasu własnego.

Dla obserwatora w U zjawiska te mają inny przebieg. W chwili początkowej $t = t' = 0$ z początku układu U, tzn z $O = O'$, wysłany zostaje sygnał. Lustro znajduje się w położeniu s_1. Nim jednak sygnał do niego dotrze, przebędzie ono pewną drogę i znajdzie się w położeniu s_2, zaś źródło w z_1. Sygnał po odbiciu zostanie zarejestrowany w lewym końcu pręta, który teraz przesunie się do z_2. Dla obserwatora w U przedział czasu między wysłaniem sygnału a jego rejestracja po odbiciu od zwierciadła, to $\Delta t = t_2 - t_0 = (t_2 - t_1) + (t_1 - t_0)$. Względna prędkość układów jest v, możemy więc skorzystać z wyprowadzonego poprzednio wzoru

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2l}{c\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Z drugiej strony mamy

$$\Delta t = \frac{z_0 s_2}{c} + \frac{s_2 z_2}{c}$$

Ponieważ lustro przemieszcza się z prędkością v, więc

$$z_0 s_2 = l + v\frac{z_0 s_2}{c} \quad \text{skąd} \quad z_0 s_2 = \frac{l}{1-\beta}$$

$$s_2 z_2 = l - v\frac{z_2 s_2}{c} \quad \text{skąd} \quad s_2 z_2 = \frac{l}{1+\beta}.$$

Ostatecznie

$$\Delta t = \frac{l}{c}\,\frac{2}{1-\beta^2}, \tag{9.3}$$

gdzie l jest nieznaną narazie (ale stałą) długością pręta mierzoną w U. Porównując teraz oba wzory dla Δt, dostajemy

$$\frac{l'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{1-\beta^2} \quad \text{czyli}$$

$$l = l'\sqrt{1-\beta^2}. \tag{9.4}$$

Wzór ten mówi nam jak zmieni się długość pręta jeżeli mierzyć ją będziemy w układzie, w którym pręt spoczywa (l') i w poruszającym się względem pręta. Jak widać, $l \leq l'$, czyli pręt ma największą długość w układzie własnym. Przy przejściu granicznym do mechaniki newtonowskiej, $c \to \infty$, mamy $\Delta t = \Delta t'$ i $l = l'$.

2. Przekształcenia Lorentza

2.1. Przestrzeń pseudoeuklidesowa. Zbiór $\mathcal{R}$ elementów x, y, z nazywa się **przestrzenią liniową lub wektorową**, jeżeli dla dowolnych dwu jego elementów $x, y \in \mathcal{R}$, określona jest suma $x + y \in \mathcal{R}$ i dla każdego $x \in \mathcal{R}$ i dowolnej liczby rzeczywistej α określony jest iloczyn $\alpha x \in \mathcal{R}$, tak że spełnione są warunki

(1) $x + y = y + x$,
(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
(3) $\exists 0 \in \mathcal{R}$, takie że $x + 0 = x$
(4) $\exists -x \in \mathcal{R}$, takie że $x + (-x) = 0$
(5) $\exists 1 \in \mathcal{R}$, takie że $1x = x$
(6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
(7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
(8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Niech dana będzie przestrzeń liniowa. Wprowadzenie metryki w przestrzeni oznacza wybranie sposobu mierzenia odległości między punktami tej przestrzeni. Metrykę w przestrzeni liniowej można wprowadzać na różne sposoby, m.in. poprzez iloczyn skalarny (x, y). Dla rzeczywistych wektorów x, y, z ma on następujące własności

(1) $\forall x, y \in \mathcal{R}$ mamy$(x, y) = (y, x)$
(2) $\forall x \in \mathcal{R}$ i dowolnej liczby rzeczywistej α $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
(3) $\forall x, y, z \in \mathcal{R}$ $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
(4) $\forall x \in \mathcal{R}$ mamy $(x, x) \geq 0$, a $(x, x) = 0 \iff x = 0$.

Mówimy, że w przestrzeni liniowej $\mathcal{R}$ zadany jest iloczyn skalarny, jeżeli każdej parze wektorów $x, y \in \mathcal{R}$ przyporządkowana jest liczba (x, y), tak aby spełnione były warunki 1 - 3.

Przestrzeń liniową z zadanym iloczynem skalarnym spełniającym dodatkowo warunek 4 nazywamy **przestrzenią euklidesową**. Długością wektora $x \in \mathcal{R}$ jest $|x| = \sqrt{(x, x)}$. W przestrzeni tej wprowadźmy bazę ortonormalną $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Weźmy teraz dwa wektory $x, y \in \mathcal{R}$ i utwórzmy ich iloczyn skalarny ($\mathcal{R}$ jest przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym, $e_1, \ldots, e_2$ dowolną bazą)

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n, \quad y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n$$

$$(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} x_i y_k (e_i, e_k) = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik} x_i y_k \tag{9.5}$$

gdzie wielkość $g^{ik} = (e_i, e_k)$ nosi nazwę **tensora metrycznego**. Jeżeli przestrzeń $\mathcal{R}$ jest euklidesowa, zaś $(e_1, \ldots, e_n)$ jest układem ortonormalnym, wówczas $(e_i, e_k) = \delta_{ik}$ i dostajemy

$$(x, y) = \sum x_i y_i \quad \Rightarrow \quad (x, x) = \sum x_i x_i = |x|^2 .$$

Jeżeli jednak $\mathcal{R}$ jest przestrzenią liniową, lecz nie jest euklidesową, wówczas wektor którego nie wszystkie składowe równe są zeru, może mieć zerową długość. Może nawet mieć długość czysto urojoną, tzn $(x, x) = -a^2$. Jeżeli kwadrat długości wektora $x \in \mathcal{R}$ da się przedstawić, w przestrzeni $\mathcal{R}$, jako suma i różnica kwadratów poszczególnych składowych, to taką przestrzeń nazywamy **pseudoeuklidesową**. Mamy wtedy np

$$(x, x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + \ldots + x_n^2 .$$

Jeżeli tensor metryczny przestrzeni pseudoeuklidesowej $\mathcal{R}$ ma na przykład postać

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

to iloczyn pary wektorów $x, y \in \mathcal{R}$ jest równy

$$(x, y) = \sum g^{ik} x_i y_k =$$

$$= x_1 y_1 (e_1, e_1) + x_2 y_2 (e_2, e_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)(e_1, e_2) = x_1 y_1 - x_2 y_2 .$$

Tak też, tzn przy pomocy tensora metrycznego, będziemy dalej zapisywać iloczyn skalarny. Podobnie jak w przestrzeni euklidesowej, dwa wektory nazwiemy ortogonalnymi jeżeli ich iloczyn skalarny znika $(x, y) = 0$.

Przekształcenie liniowe $\mathbf{A}$ przestrzeni pseudoeuklidesowej $\mathcal{R}$ nazywamy **pseudoortogonalnym** jeżeli zachowuje ono iloczyn skalarny, tzn jeżeli dla $\forall x, y \in \mathcal{R}$ mamy

$$(\mathbf{A}x, \mathbf{A}y) = (x, y) . \tag{9.6}$$

Niech teraz $\mathbf{A}$ będzie przekształceniem przestrzeni pseudoeuklidesowej $\mathcal{R}$, przy czym macierz tego przekształcenia $\mathbf{A}$ jest postaci

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Wówczas przejście pomiędzy dwoma bazami (w U i U') dane jest przez

$$e'_1 = \mathbf{A}e_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n\,,$$
$$e'_2 = \mathbf{A}e_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{2n}e_n\,, \quad \text{itd.}$$

Mamy więc,

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}e_i, \mathbf{A}e_j) &= a_{i1}a_{j1}(e_1,e_1) + a_{i1}a_{j2}(e_1,e_2) + \ldots + a_{i1}a_{jn}(e_1,e_n) + \\ &\quad + a_{i2}a_{j1}(e_2,e_1) + \ldots + a_{in}a_{jn}(e_n,e_n) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{i1}a_{jk}(e_1,e_k) + \sum_k a_{i2}a_{jk}(e_2,e_k) + \ldots + \sum_k a_{in}a_{jk}(e_n,e_k) = \\ &= \sum_k \sum_l a_{il}a_{jk}(e_l,e_k) \equiv \sum_{lk} g^{lk} a_{il}a_{jk}\,.\end{aligned}$$

Niech teraz $\mathbf{A}$ będzie przekształceniem pseudoortogonalnym. Mamy wtedy

$$(\mathbf{A}e_i, \mathbf{A}e_j) = (e_i, e_j) \equiv g^{ij}\,.$$

Łącząc oba wyniki możemy napisać warunek na to aby przekształcenie zadane przez macierz $\mathbf{A}$ było pseudoortogonalne:

$$\sum_{lk} g^{lk} a_{il}a_{jk} = g^{ij} \tag{9.7}$$

lub macierzowo $\mathbf{AGA}^T = \mathbf{G}$. Warunek ortogonalności w przestrzeni euklidesowej jest tu zawarty, ponieważ wtedy $g^{ij} = \delta_{ij}$ i (9.7) redukuje się do znanego iloczynu skalarnego.

Mając wprowadzoną przestrzeń pseudoeuklidesową powróćmy do mechaniki relatywistycznej. Wyprowadzimy teraz przekształcenie Lorentza. Punktem wyjścia jest żądanie aby prędkość światła była stała we wszystkich układach inercjalnych. Równanie czoła fali w układach U i U' winno mieć wobec tego postać

$$c^2t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \quad \text{oraz} \quad c^2t'^2 - (x'_1)^2 - (x'_2)^2 - (x'_3)^2 = 0\,.$$

Przyrównując oba wyrażenia dostajemy

$$c^2t^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = c^2t'^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i'^2\,, \quad (x_i = x, y, z)\,. \tag{9.8}$$

Wprowadźmy czwartą składową, rzeczywistą, proporcjonalną do czasu, także o wymiarze długości, i oznaczmy ją przez $x_0 = ct$. Wskaźniki greckie $(\alpha, \beta, \dots)$ przebiegać będą cztery wartości $0, 1, 2, 3$. Możemy teraz (9.8) zapisać jako

$$x_o^2 - \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = x_o'^2 - \sum_{i=1}^{3} x_i'^2\,.$$

Ale wyrażenie $x_o^2 - \sum_{i=1}^3 x_i^2$ jest kwadratem długości czterowektora w przestrzeni pseudoeuklidesowej. Możemy je zapisać korzystając z tensora metrycznego jako $\sum_{\mu=0}^3 g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu$, gdzie $g^{\mu\nu}$ ma różne od zera wyrazy tylko na przekątnej i tam $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$. Wobec tego warunek (9.8) oznacza, że szukane przekształcenie Lorentza nie powinno zmieniać iloczynu skalarnego w przestrzeni o tensorze metrycznym

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{9.9}$$

Czterowymiarową przestrzeń tak zbudowaną, tzn zawierającą składową proporcjonalną do czasu oraz trzy składowe przestrzenne, nazywamy **czasoprzestrzenią** lub **przestrzenią Minkowskiego**. Jest to przestrzeń pseudoeuklidesowa, a szukane przekształcenie Lorentza jest przekształceniem pseudoortogonalnym. Elementy $a_{\mu\nu}$ tego przekształcenia powinny więc spełniać warunek

$$g^{\mu\nu} = \sum_{\lambda,\rho=0}^{3} a_{\mu\lambda} a_{\nu\rho} g^{\lambda\rho}\,. \tag{9.10}$$

Ponieważ czasoprzestrzeń jest jednorodna, więc związek łączący x_μ i x'_μ powinien być liniowy. Tylko wtedy bowiem zmiana początku układu U prowadzi do takiego samego dla wszystkich punktów przesunięcia początku układu U', co jest konieczne aby układy te były równoważne. Niech względna prędkość obu układów będzie skierowana wzdłuż osi x_1. Przyjmiemy też, że osie układów są wzajemnie prostopadłe i że początki układów pokrywają się w chwili $t = t' = 0$. Tak więc z $y = 0$ i $z = 0$ powinno wynikać $y' = 0$ oraz $z' = 0$. Ponieważ obroty wokół osi przestrzennych nie powinny zmieniać fizyki, nie będziemy ich tu rozpatrywać i przyjmiemy, że płaszczyzna $y = 0$ przechodzi w płaszczyznę $y' = 0$ a $z = 0$ w $z' = 0$. Oznacza to, że $y' = ay$ oraz $z' = az$. Aby układy były zupełnie równoważne a powinno być równe 1. Macierz PL powinna więc wiązać ze sobą tylko dwie składowe czteroprzestrzeni - czas oraz składową wzdłuż osi której odbywa się ruch (w naszym przypadku x_1):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.11}$$

Jednocześnie współczynniki macierzy **A** powinny spełniać warunki pseudoortogonalności (9.7):

$$g^{00} = \sum_{\rho,\nu=0}^{3} g^{\rho\nu} a_{0\rho} a_{0\nu} = g^{00} a_{00}^2 + g^{01} a_{00} a_{01} + g^{10} a_{01} a_{00} + g^{11} a_{01}^2 + \ldots + g^{33} a_{03}^2\,,$$

stąd uwzględniając wartości elementów a_{ij} danych przez (9.11), dostajemy

$$a_{00}^2 - a_{01}^2 = g^{00} = 1\,. \tag{9.12}$$

Podobnie dla g^{11}

$$a_{10}^2 - a_{11}^2 = g^{11} = -1\,, \tag{9.13}$$

oraz dla g^{10}

$$a_{00} a_{10} - a_{01} a_{11} = g^{10} = 0\,. \tag{9.14}$$

Ponieważ warunków tych jest za mało aby jednoznacznie określić współczynniki $a_{\mu\nu}$, skorzystamy z równania ruchu środka układu U' (tzn punktu $x'_1 = 0$) względem układu U. Porusza się on ze stałą prędkością v wzdłuż osi Ox_1, a więc po upływie czasu t jego współrzędna w układzie U ma wartość

$$x_1 = vt \equiv \beta x_0, \quad (\beta \equiv \frac{v}{c})\,.$$

Dlatego też, korzystając z ogólnego wzoru na transformację wektora $\vec{x}$, początek układu U' może być opisany przez

$$x'_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = (a_{10} + \beta a_{11})x_0 = 0\,,$$

a stąd

$$a_{10} = -\beta a_{11}\,. \tag{9.15}$$

Drugi warunek pseudoortogonalności (9.13) możemy teraz przepisać jako

$$\beta^2 a_{11}^2 - a_{11}^2 = -1\,,$$

a stąd

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

oraz

$$a_{10} = \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Wstawiając otrzymane związki do trzeciego warunku dostajemy

$$a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad a_{01} = \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Szukane PL ma więc postać

$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma(x_0 + \beta x_1), \\ x'_1 &= \gamma(-\beta x_0 + x_1), \\ x'_2 &= x_2, \\ x'_3 &= x_3, \end{aligned} \tag{9.16}$$

lub, zapisane poprzez zmienne x, y, z, t

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t + \frac{v}{c^2}), \\ x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{9.17}$$

a jego macierz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9.18}$$

gdzie $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$. Aby otrzymać macierz przekształcenia odwrotnego należy zamienić v na $-v$, czyli β na $-\beta$.

3. Wnioski z przekształcenia Lorentza

Jednoczesność. PL jest to sposób na przetłumaczenie współrzędnych zdarzenia z jednego układu współrzędnych do innego. Z postaci (9.16) wynika od razu, że jeżeli układy te poruszają się względem siebie to zdarzenia, które są jednoczesne w jednym układzie nie mogą nimi być w drugim. Rozpatrzmy bowiem dwa zdarzenia jednoczesne w U o współrzędnych $(x_1, y_1, z_1, t_1 = t)$ oraz $(x_2, y_2, z_2, t_2 = t)$. Korzystając z PL (9.16) mamy dla odpowiednich czasów w U':

$$t_1' = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1) = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x_1)\,,$$

$$t_2' = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x_2)\,.$$

Różnica tych czasów

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{v}{c^2}(x_1 - x_2) \neq 0 \quad \text{gdy} \quad x_1 \neq x_2\,. \tag{9.19}$$

Jeżeli więc dwa zdarzenia zaszły w różnych punktach, to nie są one jednoczesne w U', mimo że były takie w U. To samo dotyczy synchronizacji zegarów. Zegary zsynchronizowane w U będą niezsynchronizowane w U' i różnica wskazań będzie rosła wraz z odległością między nimi. Przyjmując, że prędkość światła jest nieskończona, otrzymujemy zachowanie jednoczesności.

Zmiana długości poruszającego się pręta. Podobnie korzystając z PL (9.16) można pokazać, że długość własna jest największa. Aby zmierzyć długość pręta w układzie poruszającym się względem niego, należy pomiaru końców pręta dokonać w tej samej chwili. Mamy więc z (9.16)

$$x_2' = \gamma(x_2 - vt), \quad x_1' = \gamma(x_1 - vt), \quad \text{bo} \quad t_1 = t_2 = t\,.$$

Stąd

$$L_0 = x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L,$$

czyli

$$L = L_0\sqrt{1 - \beta^2}\,. \tag{9.20}$$

Oczywiście taka zmiana długości pręta nie oznacza, że ulega on rzeczywistemu skróceniu, czyli że przy badaniu go w jednym z układów pojawią się w nim naprężenia. Byłoby to sprzeczne z podstawową zasadą szczególnej teorii względności, że prawa fizyki są takie same we wszystkich układach inercjalnych. Różnica sprowadza się więc do sposobu pomiaru, czy jest on dokonywany przy pomocy jednego czy też więcej zegarów. Jeżeli pomiar dokonywany musi być przy pomocy więcej niż jednego zegara, wówczas nie jest zachowana jednoczesność i mierzona jest inna wartość niż w układzie, gdzie pomiaru dokonuje się przy użyciu jednego zegara. Można też pokazać, opierając się o PL, że jeżeli w U' w punkcie (x_1', y_1', z_1') zaszły dwa zdarzenia, jedno w chwili t_1', drugie w t_2', to w U okaże się, że

$$x_1 = \gamma(x_1' + vt_1'), \quad x_2 = \gamma(x_2' + vt_2'),$$

i jeżeli $t_1' \neq t_2'$, to podobnie jak nie była zachowana jednoczesność, teraz nie jest zachowana jedność miejsca. Jedynie zjawiska, które zachodzą w tym samym czasie i w tej samej chwili pozostają takimi po przejściu do innego układu współrzędnych.

Przyczynowość. Jeżeli w układzie U zaszły dwa zdarzenia, przy czym zdarzenie 1 było przyczyną zdarzenia 2, to oczywiście najpierw powinno zajść 1 a potem dopiero 2. Ten stan rzeczy, tzn związek przyczynowy między dwoma zjawiskami, powinien zostać zachowany w dowolnym innym układzie, wszystkie one są bowiem równoprawne. Weźmy teraz jedno z równań PL

$$t = \gamma(t' - \frac{v}{c^2}x')$$

i zróżniczkujmy je. Otrzymamy

$$dt = \gamma(dt' - \frac{v}{c^2}dx').$$

Ponieważ $dx'/dt' = v'_x$, więc

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma(1 - \frac{v}{c^2}v'_x). \tag{9.21}$$

Aby utrzymana była sekwencja zdarzeń w obu układach, stosunek przyrostów czasu musi być taki sam, czyli $dt/dt' > 0$, ponieważ dt to czas między zdarzeniami 1 i 2 mierzony w układzie U, natomiast dt' to czas między tymi samymi zdarzeniami mierzony w układzie U'. Prędkość względna v obu układów może być dodatnia lub ujemna, lecz zawsze mniejsza od c, tak więc aby zachować znak stosunku przyrostów czasu, v'_x musi być mniejsze od c. Oznacza to, że jeżeli dwa zdarzenia mają być powiązane ze sobą związkiem przyczynowym, to prędkość z jaką przesyłany jest sygnał zawierający informację powodującą zależność przyczyna - skutek, musi być mniejsza od prędkości światła.

4. Przedziały między zdarzeniami i ich klasyfikacja

Rozpatrzmy dwa zdarzenia I i II. Dla prostoty rachunków przyjmijmy, że zaszły one na osi Ox układu U, natomiast U' porusza się względem U wzdłuż osi Ox. Współrzędne tych zdarzeń będą miały postać (jeżeli będziemy używać zmiennej ct zamiast x_0)

$$I \quad (ct_1, x_1, 0, 0), \quad (ct'_1, x'_1, 0, 0),$$
$$II \quad (ct_2, x_2, 0, 0), \quad (ct'_2, x'_2, 0, 0).$$

Stosując PL (9.16) mamy

$$x'_2 - x'_1 = \gamma\,[\,(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)\,]$$
$$t'_2 - t'_1 = \gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{\beta}{c}(x_2 - x_1)\right]. \tag{9.22}$$

Widać więc, że warunkiem na to aby zachowana była jednoczesność i jedność miejsca, jest aby $x_2 = x_1$ oraz $t_2 = t_1$. Pojęcie przedziału pomiedzy dwoma chwilami lub dwoma punktami w przestrzeni jest względne i wartość jego zmienia się przy przejściu od jednego układu do drugiego. Można postawić pytanie czy wartość ta może się zmieniać dowolnie. Zauważmy najpierw, że istnieje, z założenia, wielkość która jest niezmiennikiem PL. Jest to odległość w przestrzeni Minkowskiego jaką w ustalonym czasie przebędzie sygnał świetlny. Oznaczmy ją przez s_{12}:

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0. \tag{9.23}$$

Wielkość związana z odległością w czteroprzestrzeni między dwoma zdarzeniami to

$$s_{12} = \sqrt{c^2\,(t_2 - t_1)^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2} \tag{9.24}$$

jest również niezmiennikiem PL i nazywamy ją **przedziałem** między zdarzeniami I i II. W postaci różniczkowej

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dx_0^2 - \sum dx_i^2 = \sum g^{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu = (dx, dx).$$

Wzór ten można zinterpretować następująco: jeżeli w trójwmiarowej przestrzeni porusza się PM, wówczas w cztero wymiarowej czasoprzestrzeni odpowiadający PM będzie przebiegał pewien tor, który za Minkowskim nazwiemy **linią świata** tego PM. Poszczególne punkty na linii świata to położenia PM w różnych chwilach czasu. Oznaczając przez dx_μ wektor przesunięcia wzdłuż tej linii, możemy powiedzieć, że

$$ds^2 = \sum g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = (dx, dx) \tag{9.25}$$

jest kwadratem długości łuku linii świata. Wiemy już, że ds^2 jest niezmiennikiem PL, podczas gdy dt i dx_i nimi nie są. Postarajmy się teraz znaleźć niezmiennik PL proporcjonalny do czasu. W tym celu podzielmy ds^2 przez inny niezmiennik c^2. Oznaczając otrzymaną wielkość przez $d\tau^2$ mamy

$$d\tau^2 = c^{-2} \sum g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = c^{-2}(dx, dx)\,. \tag{9.26}$$

Aby znaleźć sens fizyczny wielkości $d\tau$, obliczmy $d\tau^2$ w układzie U', względem którego cząstka spoczywa. Będzie to więc układ poruszający się wraz z cząstką wzdłuż jej linii świata. Wobec tego w U' współrzędne przestrzenne cząstki nie ulegają zmianie, tzn $dx'_\mu = 0$ i cały wektor $dx'_\mu = (c\,dt', 0, 0, 0)$. Stąd

$$d\tau^2 = c^{-2} \sum g^{\mu\nu} dx'_\mu dx'_\nu = (dt')^2\,.$$

Oznacza to, że $d\tau = dt'$, czyli $d\tau$ jest przedziałem czasu mierzonym w układzie w którym cząstka spoczywa, czyli jest to czas własny. Rozpisując definicję $d\tau$ można znaleźć związek między czasem własnym i czasem w innym układzie :

$$d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}\,.$$

Powróćmy do naszych dwu zdarzeń I i II. Niech w U współrzędne przestrzenne będą odległe o

$$L_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

zaś czasowe o $t_{12} = t_2 - t_1$, Możemy więc napisać

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - L_{12}^2\,,$$

przy czym przedział czasoprzestrzenny jest niezmiennikiem PL. Niech

$$c^2 t_{12}^2 > L_{12}^2\,.$$

Oznacza to, że kwadrat przedziału między zdarzeniami w czteroprzestrzeni jest dodatni, a więc sam przedział jest rzeczywisty. Wielkość ta jest niezmiennikiem PL, a więc zachowuje się przy przejściu z jednego układu do drugiego. Dla przedziału takiego mamy

$$ct_{12} > L_{12} \tag{9.27}$$

i nazywamy go **czasopodobnym**. Dwa zdarzenia, które dotyczą tego samego ciała oddzielone są zawsze przedziałem typu czasowego ponieważ poruszające się ciało w czasie t_{12} przejdzie drogę przestrzenną L_{12}, natomiast światło przejdzie drogę ct_{12}. Ponieważ $c > v$, więc $L_{12} < ct_{12}$. Jeżeli $ct_{12} < L_{12}$, wówczas kwadrat odległości jest ujemny i przedział taki nazywamy przedziałem **typu przestrzennego**, natomiast jeżeli $ct_{12} = L_{12}$, to jest to przedział **świetlny**. Przedziałem takiego typu oddzielone są zdarzenia związane z rozchodzeniem się fali świetlnej.

Jeżeli przedział jest typu czasowego, to pojęcia „wcześniej" i „później" mają sens. Dla przedziału typu przestrzennego nie mają, ponieważ

$$c\,dt' = \gamma\left(c\,dt - \frac{v}{c}\,dx\right) = \gamma c\,dt\left(1 - \frac{v}{c}\,\frac{dx}{c\,dt}\right),$$

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{v}{c}\,\frac{dx}{c\,dt}\right)\,.$$

Przyjmijmy, że $dt \geq 0$. Wówczas jeżeli

(1) przedział jest typu czasowego, to $c\,dt > dx$, czyli $dx/(c\,dt) < 1$, a wtedy na pewno
$$1 - \frac{v}{c}\frac{dx}{c\,dt} > 0\,,$$
a więc znaki dt i dt' będą takie same;

(2) przedział jest typu przestrzennego, to znaczy $c\,dt < dx$, a wtedy $1 - \frac{v}{c}\frac{dx}{c\,dt}$ może być ujemne, czyli znaki dt i dt' mogą być różne.

Jeżeli dwa zdarzenia oddzielone są przedziałem typu czasowego, to może między nimi istnieć powiązanie przyczynowe. Mamy bowiem wtedy
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 < c^2(t_2 - t_1)^2\,,$$
a więc w ciągu czasu jaki upłynął między zdarzeniem I i II, sygnał świetlny na pewno zdążyłby pokonać odległość przestrzenną między I i II. Mogłaby w ten sposób zostać przekazana informacja do zdarzenia II o zdarzeniu I i mogłoby ono w ten sposób stać się przyczyną zdarzenia II.

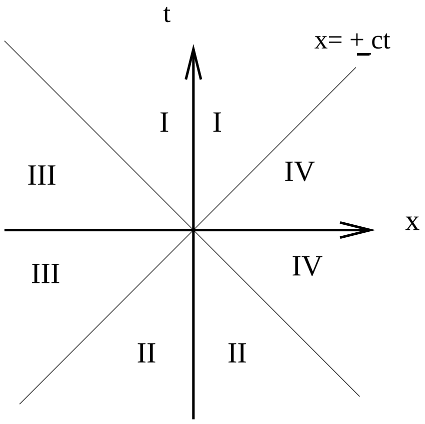
Dla przedziałów przestrzennopodobnych kolejność zdarzeń nie jest zachowana i pojęcia „wcześniej" i „później" są względne. Zawsze można znaleźć taki układ w którym kolejność ta będzie odwrócona. Nie istnieje więc związek przyczynowy między zdarzeniami, ponieważ $L_{12} > ct_{12}$, więc w czasie oddzielającym te dwa zdarzenia sygnał świetlny nie zdąży przebyć drogi L_{12}. Nie może być więc przekazana informacja o zdarzeniu I do punktu w którym zajdzie zdarzenie II przed jego nastąpieniem.

Rozpatrzmy teraz dowolne zdarzenie i przyjmijmy je za początek układu współrzędnych czasoprzestrzeni. Dla prostoty przyjmijmy, że zagadnienie ma tylko jedną współrzędną przestrzenną, np x i czas t. Taka sytuacja przedstawiona jest na rysunku 9.3. W płaszczyźnie (x, t) utwórzmy kartezjański układ współrzędnych z początkiem w zdarzeniu A. Wszystkie zdarzenia będą teraz przedstawiane jako punkty w płaszczyźnie (x, t). Linia świata to tor PM w czteroprzestrzeni. Jednostajny, prostoliniowy ruch PM znajdującego się w chwili $t = 0$ w $x = 0$ to prosta przechodząca przez początek układu. Tangens nachylenia tej prostej to prędkość PM, a jej maksymalna wartość to c. Stąd też linie świata sygnałów świetlnych mają równania $x = \pm ct$. Wszystkie zdarzenia leżące na prostych $x = \pm ct$ oddzielone są przedziałami typu zerowego. Ponieważ największa możliwa prędkość to c, więc linie świata PM mogą leżeć tylko w obszarach I i II. W obszarach tych przedział między zdarzeniem A i dowolnym innym jest $s_{12} = c^2t^2 - x^2 > 0$, a więc jest czasopodobny, zaś w obszarach III i IV jest przestrzenny. W obszarze I mamy $t > 0$, tzn wszystkie zdarzenia są tam późniejsze niż zdarzenie A. Stąd też, oraz ponieważ dla zdarzeń oddzielonych przedziałem czasowym pojęcia „wcześniej" i „później" są bezwzględne, obszar I nazywamy **absolutną przyszłością** zdarzenia A, natomiast obszar II, z analogicznych powodów, **absolutną przeszłością** zdarzenia A, Zdarzenia leżące w obszarach III i IV oddzielone są od A przedziałami typu przestrzennego, a więc nie może być żadnych związków przyczynowych między nimi a zdarzeniem A.

Powracając do czteroprzestrzeni, zamiast prostych $x = \pm ct$ otrzymamy tam stożek $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$. Stożek ten nazywamy **stożkiem światła**. Obszar wewnątrz stożka odpowiada zdarzeniom oddzielonym od zdarzenia A przedziałami czasowymi, natomiast na zewnątrz stożka leżą zdarzenia oddzielone przedziałami przestrzennymi od A.

5. Czterowektory i równania ruchu

Znamy już przekształcenie, które w mechanice relatywistycznej zastąpiło przekształcenie Galileusza oraz znamy przestrzeń w jakiej się ona powinna „rozgrywać", czyli przestrzeń Minkowskiego. Zdarzenia są tam reprezentowane przez punkty, natomiast procesy przez linie świata. Należy teraz znaleźć w tej przestrzeni odpowiedniki wielkości z jakich zbudowana jest mechanika newtonowska. Kierować się będziemy intuicją, tym bardziej, że szukane wielkości powinny, dla małych prędkości, przejść w znane nam wzory mechaniki newtonowskiej. Ściślej, powinny w nie przejść składowe przestrzenne czterowektorów.



Rysunek 9.3. Stożek światła

Każde zdarzenie można w czasoprzestrzeni określić podając jego czterowektor wodzący x_μ. W mechanice newtonowskiej ruch opisany był przez podanie zależności trzech współrzędnych przestrzennych od czasu, który był niezmiennikiem przekształcenia Galileusza. W mechanice relatywistycznej czas jest traktowany na równi ze współrzędnymi przestrzennymi i nie jest niezmiennikiem PL. Należy więc znaleźć inny parametr i opisać zmianę wszystkich czterech współrzędnych w funkcji tego parametru. Powinien on mieć też charakter czasu i być niezmiennikiem PL, chodzi bowiem o to aby dla małych prędkości powrócić do wzorów mechaniki newtonowskiej. Możemy więc jako parametr wybrać czas własny $d\tau$. Jest on niezmiennikiem PL i dla $c \to \infty$ przechodzi w czas klasyczny - newtonowski. Wektor wodzący x_μ jest przykładem czterowektora, natomiast $d\tau$ to czteroskalar, drugim czteroskalarem jest s_{12}. Znajomość tego czy dana wielkość jest czteroskalarem, czterowektorem itd. przyda się niedługo przy poszukiwaniu relatywistycznych odpowiedników równań ruchu. Mają one być niezmiennicze wobec PL i ich część przestrzenna powinna dla $c \to \infty$ przechodzić w równania Newtona. Prawa fizyki nie mogą zależeć od tego jak zorientujemy osie układu współrzędnych, muszą więc być niezmiennicze wobec przekształceń ortogonalnych, a w przypadku przestrzeni pseudoeuklidesowej wobec przekształceń pseudoortogonalnych. Osiągane jest to dzięki temu, że przyrównujemy do siebie wielkości tego samego typu, tzn dwa skalary, dwa wektory itd. czyli tensory tego samego rzędu. O równaniu mówi się wówczas, że jest współzmiennicze (kowariantne), ponieważ obie jego strony transformują się w ten sam sposób. Szukamy więc praw fizyki, które byłyby współzmiennicze wobec PL, podobnie jak prawa Newtona były współzmiennicze wobec przekształcenia Galileusza. Jest to więc żądanie aby obie strony równania były czterotensorami tego samego rzędu.

Analogicznie do podziału przedziałów na czaso-, przestrzenno- i światłopodobne możemy podzielić czterowektory. Czterowektor x_μ nazywamy czasopodobnym jeżeli

$$(x, x) = \sum g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu > 0\,,$$

przestrzennopodobnym jeżeli

$$(x, x) < 0$$

i świetlnym jeżeli

$$(x, x) = 0\,.$$

Podział ten, podobnie jak dla przedziałów, jest niezmienniczy wobec PL ponieważ (x, x) jest niezmiennikiem PL.

Przystąpmy teraz do skonstruowania czterowektora prędkości. Wiemy, że ruch w czteroprzestrzeni opisywany jest przez linię świata, jest więc to zmiana czterech składowych jako funkcja parametru niezmienniczego wobec PL. Ruch ten powinien być opisywany zależnością $x_\mu = x_\mu(\tau)$. Czterowektor prędkości można określić jako

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx_\mu}{dt}\,. \tag{9.28}$$

Składowe przestrzenne mają postać

$$u_i = \gamma \frac{dx_i}{dt} = \gamma v_i$$

i zgodnie z naszym żądaniem dla $c \to \infty \quad (\gamma \to 1)$ przechodzą w składowe klasycznej, newtonowskiej prędkości. Składowa czasowa

$$u_0 = \frac{dx_0}{d\tau} = \gamma \frac{d(ct)}{dt} = \gamma c\,.$$

Widać stąd, że jeżeli PM spoczywa, wówczas $v_i = 0$ i składowe przestrzenne czteroprędkości znikają, natomiast $u_0 \neq 0$. Można interpretować to tak, że ruch PM w przestrzeni może być zatrzymany, natomiast w czasie nie.

Czterowektor prędkości możemy zapisać jako $u_\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v})$. Sprawdźmy jakiego typu czterowektorem jest czteroprędkość

$$(u,u) = \sum g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = \gamma(c^2 - v^2) = c^2 > 0\,.$$

A więc czteroprędkość jest wektorem typu czasowego. Jest to zresztą oczywiste ponieważ $c > v$.

Policzmy teraz $d(u,u)/d\tau$. Ponieważ $(u,u) = c^2$ oraz iloczyn skalarny jest symetryczny, tzn $(u,v) = (v,u)$, więc $(u, du/d\tau) = 0$. Oznacza to, że czterowektory prędkości, u_μ i przyspieszenia, $du_\mu/d\tau$, są pseudoortogonalne.

Postarajmy się teraz znaleźć relatywistyczne odpowiedniki pędu i siły, tak aby móc napisać relatywistyczne równania ruchu. Newtonowskie prawo ruchu, gdzie masa cząstki była skalarem, ma postać

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}\,. \tag{9.29}$$

Mnożąc to skalarnie przez $\vec{v}dt$, otrzymujemy

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}\,\vec{v}\,dt\,. \tag{9.30}$$

Jak wiemy jest to zasada zachowania energii cząstki swobodnej. Wyrażenie po lewej stronie to zmiana energii odpowiadająca pracy określonej przez wyrażenie po prawej stronie. Dla cząstki swobodnej możemy więc powiedzieć, że klasyczna energia ciała wyznaczona jest stąd jako

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + const.$$

Chcąc aby energia spoczywającego ciała była równa zero, przyjmujemy stałą też za równą zero. Całkowita energia swobodnego, tzn bez sił zewnętrznych, PM jest więc równa jego energii kinetycznej. Formalne uogólnienie drugiego prawa Newtona jest łatwe, zapiszmy je bowiem w postaci

$$F_i = \frac{d}{dt}(mv_i) = \frac{dp_i}{dt}\,.$$

Jego czterowymiarowy odpowiednik powinien mieć więc postać

$$K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau} \tag{9.31}$$

gdzie K_μ jest czterowektorem siły, tzw **siłą Minkowskiego**, zaś p_μ - **czteropędem**. W analogii do zwykłego pędu możemy p_μ wprowadzić jako

$$p_\mu = m u_\mu \,. \tag{9.32}$$

Ponieważ dla $c \to \infty$ składowe przestrzenne czteroprędkości przechodzą w prędkość newtonowską, więc i składowe przestrzenne pędu przejdą w odpowiednie składowe zwykłego pędu. Mamy dla nich

$$p_i = m u_i = \gamma m v_i \,.$$

Składowe przestrzenne relatywistycznego równania Newtona możemy napisać jako

$$K_i = \frac{dm\, u_i}{d\tau} = \gamma \frac{dm\, u_i}{dt} = \gamma^2 \frac{dm\, v_i}{dt} .$$

Jeżeli, znów przez analogię, przyjmiemy $K_i = \gamma F_i$, gdzie F_i są składowymi newtonowskiej siły, to dostaniemy

$$\gamma F_i = m\gamma \frac{du_i}{dt} \quad \Rightarrow \quad F_i = \frac{d}{dt}(m u_i)\,,$$

co jest prędkością zmian relatywistycznego pędu. Nasze relatywistyczne równanie ruchu (9.31) pomnóżmy skalarnie przez u_μ

$$(K_\mu, u_\mu) = (\frac{dp_\mu}{d\tau}, u_\mu) = m(\frac{du_\mu}{d\tau}, u_\mu) = 0\,,$$

ponieważ czteroprędkość jest ortogonalna do czteroprzyspieszenia. Stąd

$$K_0 u_0 - \sum K_i u_i = 0 \quad \Rightarrow \quad K_0 = \frac{\sum K_i u_i}{c\gamma} = \frac{\gamma}{c} \sum F_i v_i \,.$$

Tak więc relatywistyczne równania Newtona można zapisać oddzielnie dla części przestrzennej

$$K_i = \frac{d}{d\tau} m u_i \quad \text{albo} \quad F_i = \frac{d}{dt} m u_i \tag{9.33}$$

i dla części czasowej

$$K_0 = \frac{d}{d\tau} m u_0 \quad \text{albo} \quad \frac{\gamma}{c} \vec{F}\, \vec{v} = \gamma \frac{dm u_0}{dt} \,. \tag{9.34}$$

lub

$$d(mc^2\gamma) = \vec{F}\, \vec{v}\, dt \,. \tag{9.35}$$

Odpowiednikiem ostatniego równania w mechanice newtonowskiej jest

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}\, \vec{v}\, dt \quad \Rightarrow \quad E = \frac{mv^2}{2} \,.$$

W mechanice relatywistycznej ostatnia równość ma postać

$$E = \gamma m c^2 + const. \tag{9.36}$$

Wybieramy $const = 0$.

Zobaczmy teraz jaki jest sens składowej czasowej czteropędu. Jak wynika z (9.32)

$$p_0 = m u_0 = \gamma m c = \frac{E}{c} \,. \tag{9.37}$$

Składowa ta jest więc proporcjonalna do energii. Stąd też często mówi się o **czterowektorze energii-pędu**. Możemy go zapisać jako

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, p_i = \gamma m v_i\right) \,. \tag{9.38}$$

p_i jest relatywistycznym pędem trójwymiarowym.

Równanie (9.36) jest całkowitą energią swobodnej cząstki, która dla $c \to \infty$ przechodzi we wzór klasyczny. Rozwińmy bowiem w szereg wyrażenie $E = \gamma mc^2$ dla małych (w porównaniu z c) prędkości

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = mc^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4-\dots\right] \simeq$$

$$\simeq mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} - \dots \quad \simeq mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

Jeżeli cząstka spoczywa ($\vec{v}=0$), wówczas jej energia (tzw energia spoczynkowa) jest równa

$$E_{spocz} = mc^2\,. \tag{9.39}$$

Masę m nazywamy masą spoczynkową. Energia (9.39) jest stała, moglibyśmy więc tak dobrać stałą występującą w definicji energii (9.36) aby upraszczała się z E_{spocz}, złamałoby to jednak korespondencję z przypadkiem nierelatywistycznym. Wykorzystajmy teraz PL dla dowolnego czterowektora A_μ, które dla przypadku gdy układy poruszają się wzdłuż osi Ox ma postać

$$A_0{}' = \gamma(A_0 - \beta A_1), \quad A_1{}' = \gamma(A_1 + \beta A_0). \tag{9.40}$$

Dla składowych przestrzennych czteropędu będziemy mieli

$$p_x' = \gamma\left(p_x - \frac{v}{c^2}E\right),$$

gdzie v to względna prędkość obu układów.

$$mv_x' = \gamma\left(mv_x - \frac{v}{c^2}E\right).$$

Przyjmijmy teraz, że

$$E = \gamma mc^2 + const = \gamma mc^2 - mc^2$$

tak aby stała upraszczała się z energią spoczynkową. Mamy wtedy

$$mv_x' = \gamma mv_x - \gamma^2 vm - \gamma v\frac{(-mc^2)}{c^2} = \gamma mv_x\,.$$

Po przejściu do granicy nierelatywistycznej ($\gamma \to 1$) i podzieleniu przez m otrzymalibyśmy

$$v_x' = v_x\,,$$

a więc sprzeczność z transformacją Galileusza (niezależność od względnej prędkości układów).

Możemy wprowadzić nową wielkość - **masę relatywistyczną**, zależną od prędkości

$$m_r = \gamma m \tag{9.41}$$

i wtedy czterowektor energii-pędu

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, p_i = m_r v_i\right).$$

Obliczmy teraz kwadrat czteropędu

$$(p,p) = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m^2(u,u) = m^2c^2 > 0\,.$$

Jest to wielkość stała, a sam czterowektor pędu jest wektorem czasowym. Stąd też otrzymujemy relatywistyczny związek między energią i pędem

$$E = c\sqrt{p^2+m^2c^2}\,. \tag{9.42}$$

Jeżeli rozpatrywany przez nas PM nie jest swobodny lecz znajduje się w polu o potencjale V, wówczas zamiast (9.36) i (9.42) dostaniemy

$$E = \gamma mc^2 + V \quad \text{oraz} \quad E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} + V.$$

Mechanika newtonowska powinna być zastąpiona przez relatywistyczną gdy $v \cong c$. Ten sam warunek możemy też sformułować inaczej, jako

$$\gamma = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/2} \gg 1\,,$$

a to jest równoważne warunkowi

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} \gg 1\,.$$