Reprezentacja krzywych ...

Reprezentacja przy pomocy **funkcji dwóch zmiennych** (krzywe płaskie płaskie - jednej):

$$z = f(x, y), \quad x \in [x_1, x_2], \; y \in [y_1, y_2]$$

albo

$$z = f(x), \quad y = g(x), \quad x \in [x_1, x_2]$$

Wady:

- krzywe które dla pewnych *x*, i *y* mogą przyjmować wiele wartości *z* trzeba reprezentować w postaci segmentów;
- brak inwariancji ze względu na obroty;

Reprezentacja przy pomocy **funkcji uwikłanej**:

$$F(x, y, z) = 0$$

Wady:

- dane równanie może mieć więcej niż jedno rozwiązanie (wtedy trzeba zadać warunki dodatkowe - dzielić krzywą na segmenty),
- co z punktami sklejenia krzywej? - gładkość krzywej jest często kluczowa!

Zalety obu metod:

- łatwo określić położenie punktu wzgl. krzywej
- łatwo obliczyć normalną do krzywej

... reprezentacja krzywych

Reprezentacja ***parametryczna***:

$$Q(t) = (x(t), y(t), z(t)), \;\; t \in [a,b]$$

gdzie x, y, z są ciagłymi funkcjami zmiennej t.

Przykład - linia śrubowa:

$$Q(t) = (r\cos t, ht, r\sin t)$$

Tę samą krzywą można parametryzować w różny sposób.

Dwa ***przedstawienia parametryczne*** krzywej Q: $Q_1(t)$, $t \in [a,b]$ i $Q_2(\tau)$, $\tau \in [\alpha,\beta]$ ***są równoważne*** gdy istnieje ciągła i niemalejąca funkcja $t = t(\tau)$, $t:[\alpha,\beta] \rightarrow [a,b]$, taka że $Q_1(t(\tau)) = Q_2(\tau)$.

Przedstawienia równoważne dają tę samą krzywą z jednakowym uporządkowaniem punktów.

Krzywą można podzielić na fragmenty punktami $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_k = b$ i każdy z fragmentów traktować osobno. Wprowadza się ***parametryzację lokalną***:

$$t = t_i + u(t_{i+1} - t_i), \quad u \in [0,1]$$

Krzywe parametryczne ...

Wektor styczny do krzywej $Q(t) = (x(t), y(t), z(t))$ w punkcie $t = t_0$:

$$\frac{dQ(t_0)}{dt} = \left[\frac{dx(t_0)}{dt}, \frac{dy(t_0)}{dt}, \frac{dz(t_0)}{dt} \right]$$

Przykład - dla linii śrubowej wektor styczny to

$$[-r \sin t_0, h, r \cos t_0]$$

Punkt osobliwy to taki, w którym pochodna krzywej $Q(t)$ nie istnieje lub jest wektorem zerowym.

Długość łuku krzywej wyznacza się ze wzoru:

$$s = \int_a^b \left| \frac{dQ}{dt} \right| dt = \int_a^b \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} dt$$

Przykład: długość linii śrubowej w przedziale $[0,T]$ to

$$s = \int_0^T (...)^{1/2} dt = T\sqrt{r^2 + h^2}$$

... krzywe parametryczne ...

Można znaleźć odwrotność funkcji $s = s(t)$ i znaleźć przedstawienie krzywej w ***parametryzacji łukowej*** $Q = Q(s) = Q(t(s))$. Dla linii śrubowej:

$$Q(s) = \left(r\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}},\ \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}s,\ r\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)$$

Niech P będzie punktem nieosobliwym na krzywej parametrycznej Q, a R punktem leżącym na tej krzywej w otoczeniu P.

Krzywiznę krzywej parametrycznej Q określamy jako

$$\kappa = \lim_{R\to P}\frac{\varphi}{h}$$

gdzie φ jest kątem między stycznymi do krzywej w punktach P i R, a h - długością łuku krzywej między nimi.

Jeśli krzywa jest klasy C^2 to krzywizna jest określona w każdym jej punkcie.

Param. łukowa: $\kappa = \left|\frac{d^2Q}{ds^2}\right|$

Param. dowolna: $\kappa = \frac{|\dot{Q}\times\ddot{Q}|}{|\dot{Q}|^3}$

Przykład - dla linii śrubowej: $\kappa = \frac{r}{r^2+h^2}$

... krzywe parametryczne.

Inne przykłady krzywych parametrycznych:

- wielomiany interpolacyjne (Lagrange'a i Hermite'a),
- krzywe sklejane trzeciego stopnia,

- krzywe Beziera
- krzywe sklejane typu B (B-spline)
- ...

Zadaniem jest znalezienie jak najlepszego dopasowania krzywej zadanej klasy (np. wielomianu) do zadanych z góry wartości (punktów interpolacji).

Przykładowo możemy chcieć jak najlepiej odtworzyć przebieg funkcji znając jej wartości w pewnych punktach (FIZYKA!).

Zadaniem jest modelowanie krzywej, a więc utworzenie zupełnie nowego kształtu, nie tracąc przy tym możliwości ścisłego matematycznego jej opisu (np. obliczenia całek, pochodnych etc.)

Krzywe Beziera - wstęp.

Krzywą Beziera $Q(t)$ definiujemy jako kombinację liniową

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_i^n(u), \quad u = t_0 + u(t_1 - t_0), \; u \in [0,1]$$

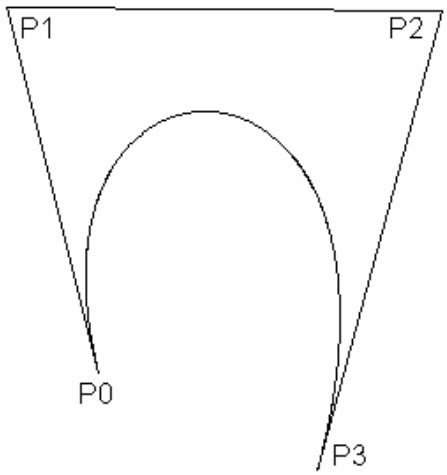
wielomianów Bernsteina

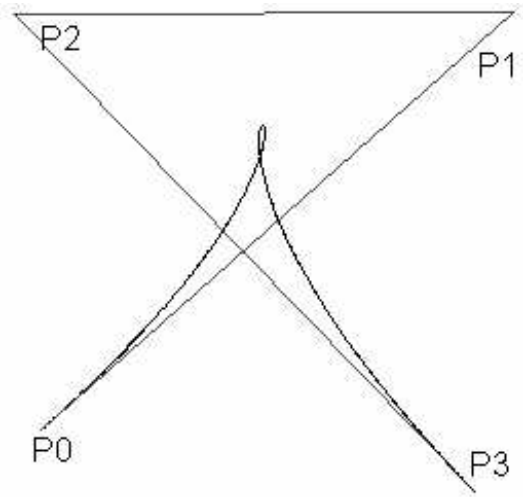
$$B_i^n(u) = \binom{n}{i}(1-u)^{n-i}u^i, \quad u \in [0,1]$$

Punkty P_i nazywamy ***punktami kontrolnymi***, a łamaną, która je łączy - ***łamaną Beziera***.

Przykład - krzywe Beziera trzeciego stopnia (n=3):

$$Q(t) = P_0(1-t)^3 + P_1 3(1-t)^2 t + P_2 3(1-t)t^2 + P_3 t^3$$





Własności:

$$Q(0) = P_0, \quad Q(1) = P_3,$$

$$Q'(0) = 3(P_1 - P_0), \; Q'(1) = 3(P_3 - P_2)$$

Ogólnie, dla dowolnego n zachodzi:

$$Q(t_0) = P_0, \qquad Q(t_1) = P_n,$$

$$\frac{d^k}{dt^k} Q(t) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k P_i B_i^{n-k}(t),$$

$$\Delta^0 P_i = P_i, \;\; \Delta^k P_i = \Delta^{k-1} P_{i-1} - \Delta^{k-1} P_i = \Delta(\Delta^{k-1} P_i).$$

a więc

$$Q'(t_0) = n(P_1 - P_0), \;\; Q(t_1) = n(P_n - P_{n-1})$$

Wielomiany Bernstaina

Najważniejsze własności:

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(u) = 1$$

$$B_i^n(u) \geq 0 \qquad dla \qquad u \in [0,1]$$

$$B_i^n(u) = (1-u) B_i^{n-1}(u) + u B_{i-1}^{n-1}(u)$$

$$B_i^n(1-u) = B_i^n(u)$$

Z dwóch pierwszych wynika, że krzywa Beziera leży wewnątrz ***powłoki wypukłej*** swoich ***punktów kontrolnych***.

Trzecia własność pozwala obliczyć położenie punktu leżącego na krzywej (rysowanie!).

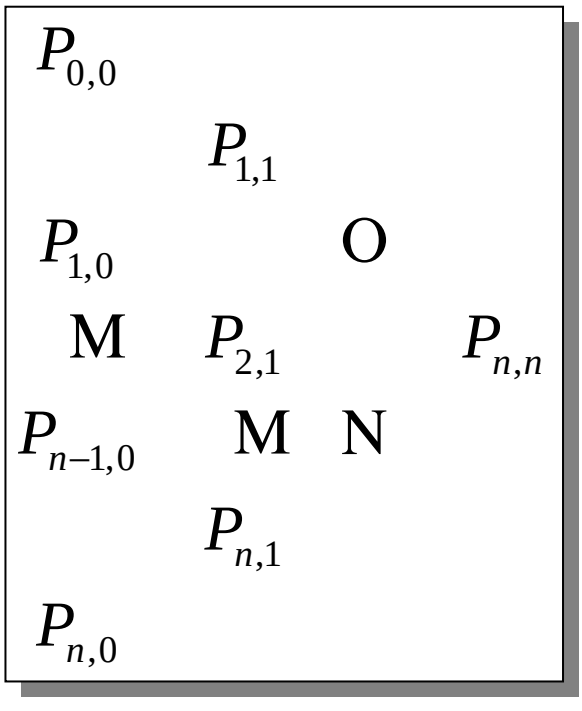
Algorytm De Casteljau

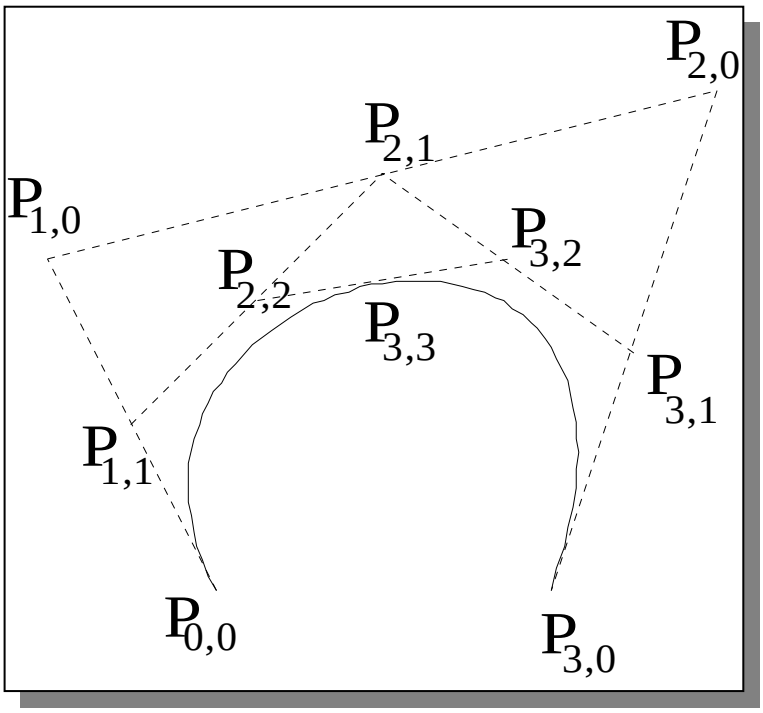
oblicz wartość odpowiadającą lokalnej parametryzacji: $u = (t-t_0)/(t_1-t_0)$.

dla $i = 0, 1, \ldots, n$ podstaw $P_{i,0} = P_i$
dla $j = 1, 2, \ldots, n$
  dla $i = j, j+1, \ldots, n$
    $P_{i,j} = (1-u)P_{i-1,j-1}+uP_{i,j-1}$

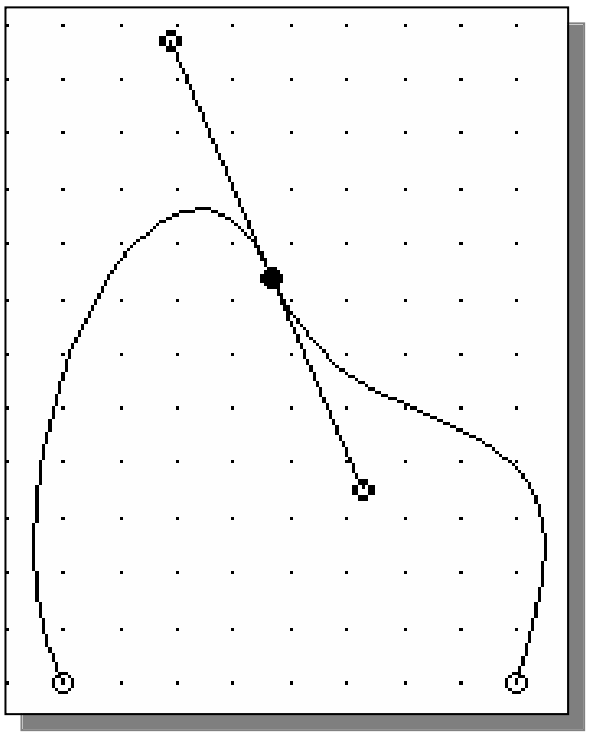
Każdy punkt nowej kolumny powstaje poprzez podział w stosunku u : 1-u odcinka łączącego dwa punkty z kolumny poprzedniej.

Można dowieść, że punkt $P_{n,n}$ leży na krzywej Beziera i dzieli ją na dwa segmenty o punktach kontrolnych $P_{0,0}, P_{2,2}, \ldots, P_{n,n}$, oraz $P_{n,0}, P_{n,1}, \ldots, P_{n,n}$





Łączenie krzywych Beziera



Dwie krzywe Beziera mają połączenie klasy C^k w punkcie *t* jeśli zarówno obie krzywe jak i ich pochodne są równe aż do rzędu *k* włącznie. Inaczej mówiąc styczne do tych krzywych są współliniowe i mają równe długości.

Dwie krzywe Beziera mają połączenie klasy G^k w punkcie *t* jeśli żądamy aby styczne były współliniowe, ale niekoniecznie równe.

W programch graficznych często mamy możliwość zapewnienia ciągłości G^1, czy nawet C^1 ale nie wyższej (ograniczenia na położenia punktów kontrolnych!).

Przykład: interpolacja zadanych punktów krzywą sklejaną klasy C^1 składającą się z segmentów będących krzywymi Beziera trzeciego stopnia (np. CorelDraw!).

Interpolacja ...

Mamy zadane punkty P_i (i=1,2,...,k) i odpowiające im wartości parametu t_i. Szukamy krzywej $Q(t)$ o własnościach:

- w każdym z przedziałów $[t_i,t_{i+1}]$ $Q(t)$ jest wielomianem stopnia 3,
- $Q(t_i) = P_i$ (interpolacja!)
- $Q(t)$ jest klasy C^1

Krzywa $Q(t)$ nie jest określona jednoznacznie!

Możliwe rozwiązanie: w każdym podprzedziale krzywą $Q(t)$ zadamy przy pomocy krzywej Beziera trzeciego stopnia. Zdefiniowane segmenty skleimy tak aby uzyskać ciągłość klasy C^1.

Dla segmentu Beziera od P_{i-1} do P_i trzeba dookreślić dwa punkty: $P_{i-2/3}$ oraz $P_{i-1/3}$, tak aby zachodziło $P_{i-1/3}P_i = P_iP_{i+1-2/3}$ (czyli równość i współliniowość stycznych).

... interpolacja

Kierunek stycznej s_i w punkcie P_i dobieramy tak aby pokrywał się on z kierunkiem stycznej do paraboli wyznaczonej przez punkty P_{i-1}, P_i, P_{i+1} i wartości t_{i-1}, t_i, t_{i+1} parametru t.

Można pokazać, że styczna w punkcie P_i

$$s_i = (1-\alpha_i)c_{i-1} + \alpha_i c_i$$

gdzie

$$c_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{t_{i+1} - t_i}, \quad \alpha_i = \frac{t_{i+1} - t_i}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

natomiast dla punktów brzegowych (i=0, i=k)

$$s_0 = 2c_0 - s_1, \quad s_k = 2c_{k-1} - s_{k-1}$$

Teraz możemy określić punkty $P_{i-1/3}$ i $P_{i-2/3}$ (i=1,2,...,k):

$$P_{i-2/3} = P_{i-1} + \frac{1}{3}(t_{i-1} - t_{i-2})s_{i-1}$$

$$P_{i-1/3} = P_i - \frac{1}{3}(t_i - t_{i-1})s_i$$

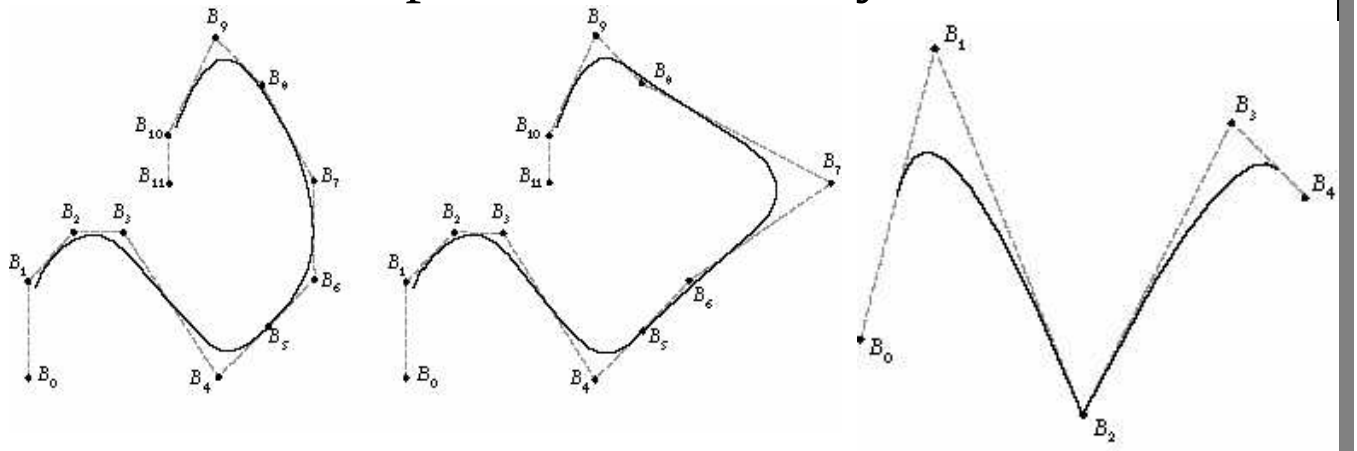
Uogólnienia

W programach CAD czesto oczekuje się aby modelowane krzywe były odpowiednio wysokiej klasy (obliczenia!).

Sklejane krzywe Beziera można uogólnić – zdefiniować krzywe, które będą miały zalety krzywych Beziera i dodatkowo (automatycznie) będą spełniały odpowiednie warunki ciągłości:

- jednorodne krzywe sklejane typu B (B-spline),
- niejednorodne krzywe B-sklejane,
- niejednorodne wymierne krzywe B-sklejane (NURBS - niezmienniczość wzgl. rzutowania)

Te ostatnie pozwalają tworzyć w zasadzie dowolne kształty – krzywe stożkowe, krzywe wielomianowe, proste a także krzywe z ostrzami.



Krzywe Beziera - uwagi

Krzywa Beziera nie zależy od kierunku 'przeglądania' punktów kontrolnych (ich kolejność gra istotną rolę!).

Zmiana jednego punktu kontrolnego powoduje zmianę ***całej krzywej***.

Najczęściej stosuje się więc krzywe Beziera trzeciego stopnia - krzywe wyższego stopnia trudno 'nagiąć' do oczekiwanego kształtu.

Powyższych wad pozwalają uniknąć łączone krzywe Beziera (choć najlepiej byłoby użyć B-spline'ów - inaczej kłopoty z ciągłością!).

Konstrukcja krzywej Beziera jest afinicznie niezmiennicza - obraz punktów po dowolnym przekształceniu afinicznym wyznacza obraz krzywej po tym przekształceniu!

Przy obliczaniu wielu punktów na krzywej Beziera może opłacać się przejść od bazy wielomianów Bernsteina do bazy naturalnej i skorzystać z uogólnionego algorytmu Hornera.

Powierzchnie parametryczne

Przedstawienie parametryczne powierzchni:

$$S(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

x, y, z - ciągłe funkcje zmiennych (u, v) z dziedziny D (najczęściej jest to 'prostokąt' $[u_0, u_1]\times[v_0, v_1]$) - mówimy wtedy o ***płacie powierzchni***.

Ustalając wartość jednego z parametrów np. $u=u_R$ otrzymujemy pewną krzywą param. leżącą na powierzchni - tzw. ***linię współrzędnej*** v

$$Q(v) = S(u_R, v) = (x(u_R, v), y(u_R, v), z(u_R, v))$$

(analogicznie dla ustalonego v).

Parametry u i v są nazywamy ***współrzędnymi krzywoliniowymi*** punktu powierzchni.

Wektor styczny do linii współrzędnej u

$$\frac{\partial S}{\partial u} = \left[\frac{\partial x(u,v_R)}{\partial u}, \frac{\partial y(u,v_R)}{\partial u}, \frac{\partial z(u,v_R)}{\partial u}\right]$$

Wektor styczny do linii współrzędnej v - podobnie.

Wektor normalny do powierzchni $\mathbf{n} = \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v}$

Iloczyn tensorowy krzywych

Niech

$$S(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i F_i(u), \quad u \in [u_0, u_1]$$

będzie parametrycznym przedstawieniem krzywej w bazie $F_i(u)$.

Niech każdy ze współczynników P_i porusza się po pewnej krzywej $P_i(v)$, którą można zapisać jako kombinację funkcji bazowych G_j

$$P_i(v) = \sum_{i=0}^{m} P_{i,j} G_j(v), \quad v \in [v_0, v_1]$$

Podstawiając wzór drugi do wzoru pierwszego otrzymujemy ***przedstawienie powierzchni*** w postaci ***iloczynu tensorowego*** dwóch rodzin krzywych

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{i,j} G_j(v) F_i(u)$$

Iloczyny $G_j(v)F_i(u)$ są funkcjami bazowymi.

Biorąc różne rodzaje funkcji F i G otrzymamy różne rodzaje powierzchni, np. wielomianowe powierzchnie interpolacyjne Lagrange'a.

Powierzchnie Beziera ...

Iloczyn tensorowy wielomianów Bernsteina określa ***płat powierzchni Beziera***:

$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{i,j}B_j^m(q)B_i^n(r)$$

Parametry u i v leżą w prostokącie $[u_0, u_1]\times[v_0, v_1]$ (q i r są parametrami lokalnymi).

Punkty $P_{i,j}$ są ***punktami kontrolnymi*** płata $S(u,v)$.

Związek między punktami kontrolymi a wartościami ***bikubicznej powierzchni Beziera*** S i jej pochodnych S_u i S_v w punktach narożnych:

$$\begin{bmatrix} S(u_0,v_0) & S(u_0,v_1) & S_v(u_0,v_0) & S_v(u_0,v_1) \\ S(u_1,v_0) & S(u_1,v_1) & S_v(u_1,v_0) & S_v(u_1,v_1) \\ S_u(u_0,v_0) & S_u(u_0,v_1) & S_{uv}(u_0,v_0) & S_{uv}(u_0,v_1) \\ S_u(u_1,v_0) & S_u(u_1,v_1) & S_{uv}(u_1,v_0) & S_{uv}(u_1,v_1) \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-3}{\Delta u} & \frac{3}{\Delta u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3}{\Delta u} & \frac{3}{\Delta u} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-3}{\Delta v} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\Delta v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{\Delta v} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{\Delta v} \end{bmatrix}$$

Własności płatów Beziera

Większość własności krzywych Beziera daje się uogólnić na płaty Beziera:

- Na ogół tylko punkty $P_{0,0}$, $P_{0,\mathrm{m}}$, $P_{n,0}$, $P_{\mathrm{n,m}}$ leżą na płacie powierzchni,
- Płat Beziera leży w powłoce wypukłej punktów kontrolnych,
- styczne do płata na brzegach zależą tylko od dwóch brzegowych wierszy (kolumn) punktów kontrolnych np. dla $u = u_0$

$$\frac{\partial S(u_0, v)}{\partial u} = \frac{n}{\Delta u} \sum_{j=0}^{m} (P_{1,j} - P_{0,j}) B_j^m(r)$$

Dodatkowo:

- Brzegi płata są krzywymi Beziera kontrolowanymi przez odpowiednie brzegowe punkty kontrolne,
- ogólniej - dowolna linia współrzędnej u jest krzywą Beziera o punktach kontrolnych

$$P_i(v) = \sum_{j=0}^{m} P_{i,j} B_j^m(r)$$

... powierzchnie Beziera

Punkt leżący na płacie powierzchni Beziera można wyznaczyć stosując wielokrotnie alg. De Casteljau:

najpierw obliczamy punkty kontrolne linii współ-rzędnej *u* a potem wyznaczamy punkt leżący na tej linii (może być taniej przejść do bazy naturalnej i alg. Hornera).

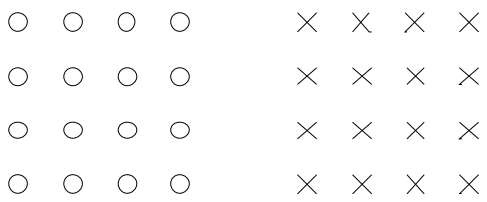
Inny sposób - dzielenie płata Beziera na cztery mniejsze płaty (punkt na krzywej dzieli ją na dwa segmenty z odpowiednimi punktami kontrolnymi). Jeśli otoczka wypukła punktów kontrolnych jest (dostatecznie) płaska to możemy płat przybliżyć płaszczyzną (uwaga na tzw. ***cracking problem***).

Łączenie płatów Beziera:

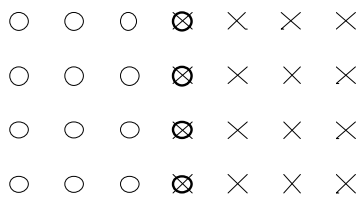
- dla zapewnienia ciągłości wystarcza aby brzegowe punkty kontrolne obu płatów pokryły się.
- dla zapewnienia ciągłości klasy C^1 trzeba zapewnić współliniowość i równość wartości odpowiednich pochodnych na brzegach płatów - narzuca to ograniczenia na położenia dalszych punktów kontrolnych.

Łączenie płatów

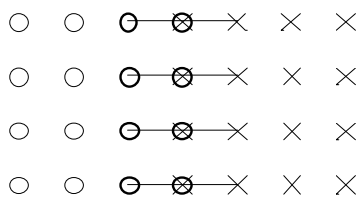
Łączenie dwóch płatów Beziera



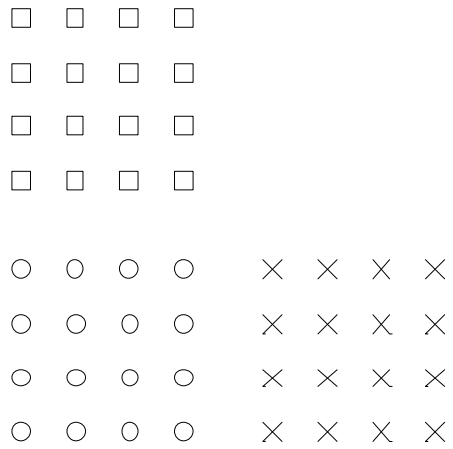
Zapewniamy ciągłość C^0



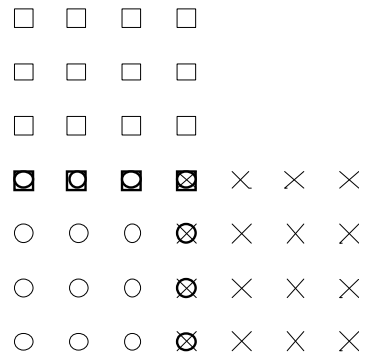
Zapewniamy ciągłość C^1



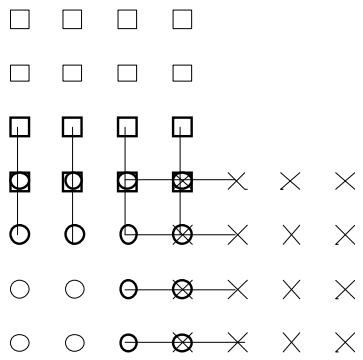
Łączenie trzech płatów Beziera



Zapewniamy ciągłość C^0



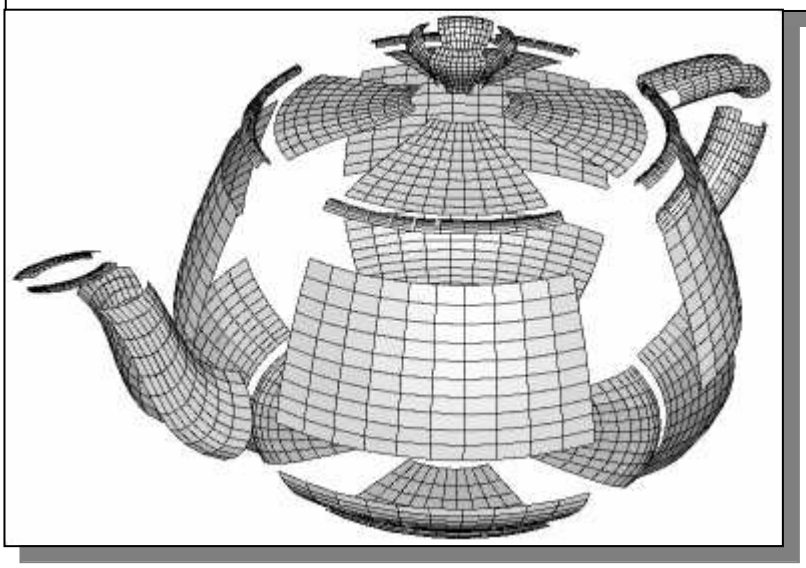
Zapewniamy ciągłość C^1



Inne rodzaje powierzchni

Trójkątne płaty Beziera
(tak, tak - to da się zrobić)

Powierzchnie B-sklejane
(znacznie bardziej elastyczne niż powierzchnie Beziera - większe możliwości modelowania np. ostrza i krawędzie)

Powierzchnie Coonsa
(odtwarzamy powierzchnię mając zadane dwie pary krzywych na brzegach)

Powierzchnie Gordona
(odtwarzamy powierzchnię mając zadane dwie rodziny krzywych przecinających się)