Wzór interpolacyjny Newtona

Uzupełnienie

Janusz Szwabiński

szwabin@ift.uni.wroc.pl

Ilorazy różnicowe

$$f[x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}; \ldots; x_{i+n}] - f[x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$

x_i	$f(x_i)$	Ilorazy różnicowe			
		rzędu 1	rzędu 2	rzędu 3	rzędu 4
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0; x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0; x_1; x_2]$		
		$f[x_1; x_2]$		$f[x_0; x_1; x_2; x_3]$	
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1; x_2; x_3]$		$f[x_0; x_1; x_2; x_3; x_4]$
		$f[x_2; x_3]$		$f[x_1; x_2; x_3; x_4]$	
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2; x_3; x_4]$		
		$f[x_3; x_4]$			
x_4	$f(x_4)$				

Wzór Newtona

$$W_n(x) = f(x_0) + f[x_0; x_1]\omega_0(x) + \ldots + f[x_0; \ldots; x_n]\omega_{n-1}(x),$$

$$\omega_i(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_i)$$

$\Rightarrow$ potrzebujemy tylko część ilorazów różnicowych

Implementacja

```
for(i=0; i<=n; i++) W[i]=y[i];
for(i=1; i<=n; i++) {
  for(j=n; j>=i; j--)
  {
      W[j]=(W[j]-W[j-1])/(x[j]-x[j-i]);
  }
}
```

Sprawdzenie ($n = 2$):

$$
\begin{array}{lll}
i = 1, & j = 2, & W[2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = f[x_1, x_2] \\
 & j = 1, & W[1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1] \\
i = 2, & j = 2, & W[2] = \frac{f[x_1,x_2] - W[1]}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ tablica W zawiera potrzebne ilorazy różnicowe w kolejności:

$$W[0] = f(x_0), \;\; W[1] = f[x_0, x_1], \ldots, \;\; W[n] = f[x_0, \ldots, x_n]$$

Współczynniki wielomianu

Chcemy zapisać wielomian interpolacyjny w postaci

$$W_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

Przykład $(n = 2)$:

$$\begin{aligned} W(x) &= f[x_0, x_1, x_2]x^2 \\ &+\{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_2](x_0 + x_1)\}x \\ &+\{f(x_0) - f[x_0, x_1]x_0 + f[x_0, x_1, x_2]x_0 x_1\} \end{aligned}$$

Jak liczyć?

```
for(i=0; i<=n; i++) a[i]=W[i];
for(i=0; i<=n-1; i++)
{
    for(j=n-1; j>=i; j--)
    {
        a[j]=a[j]-x[j-i]*a[j+1];
    }
}
```

Sprawdzenie ($n = 2$):

$$
\begin{array}{lll}
i = 0 & j = 1 & a[1] = f[x_0, x_1] - x_1 f[x_0, x_1, x_2] \\
 & j = 0 & a[0] = f(x_0) - x_0\{f[x_0, x_1] - x_1 f[x_0, x_1, x_2]\} \\
i = 1 & j = 1 & a[1] = f[x_0, x_1] - (x_0 + x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\
i = 2 & & a[2] = f[x_0, x_1, x_2]
\end{array}
$$

Schemat Hornera

Wielomian

$$W_n(x) = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0$$

możemy zapisać jako

$$W_n(x) = x(x(x \ldots x(a_n x + a_{n-1}) + a_{n-2}) + \ldots + a_1) + a_0$$

$\Rightarrow$ dwukrotna redukcja liczby mnożeń

Schemat Hornera:

$$\begin{aligned} w_n &= a_n \\ w_k &= x w_{k+1} + a_k, \quad k = n-1, \ldots, 0 \end{aligned}$$