Metody numeryczne I

Równania nieliniowe

Janusz Szwabiński

szwabin@ift.uni.wroc.pl

Równania nieliniowe

1. Równania nieliniowe z pojedynczym pierwiastkiem
   - Metoda bisekcji
   - Regula falsi i metoda siecznych
   - Metoda Newtona
   - Rząd metod przybliżonego obliczania pierwiastków
2. Pierwiastki wielokrotne
3. Równania algebraiczne
   - Liczba pierwiastków rzeczywistych
   - Lokalizacja pierwiastków rzeczywistych
4. Układy równań nieliniowych

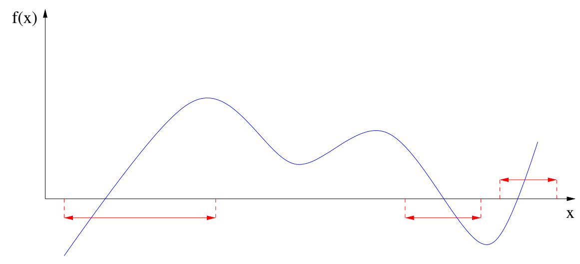
Równania nieliniowe z pojedynczym pierwiastkiem

Szukamy przybliżonych rozwiązań równania

$$f(x) = 0$$

$f(x)$ - funkcja ciągła na pewnym przedziale

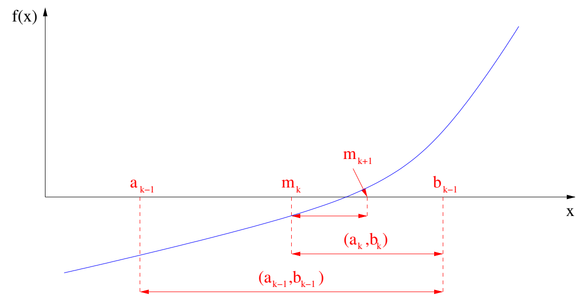
Definicja Jeżeli w rozważanym przedziale równanie $f(x) = 0$ funkcja ma tylko jeden pierwiastek α, to przedział ten nazywamy przedziałem izolacji pierwiastka α



Metoda bisekcji

Zakładamy, że funkcja $f(x)$

1. jest ciągła na przedziale $\langle a, b\rangle$,
2. spełnia warunek $f(a)f(b) < 0$,
3. posiada w przedziale $\langle a, b\rangle$ tylko jeden pierwiastek α równania $f(x) = 0$



Wyznaczamy ciąg $(a_0, b_0) \supset (a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset \ldots$ w następujący sposób:

1. znajdujemy środek przedziału (a_{k-1}, b_{k-1}),

$$m_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + b_{k-1})$$

2. jeśli $f(m_k) = 0 \Rightarrow$ znaleźliśmy pierwiastek
3. jeśli $f(m_k) \neq 0$, to

$$(a_k, b_k) = \begin{cases} (m_k, b_{k-1}), & \text{jeśli } f(m_k)f(b_{k-1}) < 0, \\ (a_{k-1}, m_k), & \text{jeśli } f(a_{k-1})f(m_k) < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\alpha \in (a_k, b_k), \quad k = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow$ po n krokach otrzymamy przedział o długości

$$\frac{1}{2^n}(b-a)$$

$\Rightarrow$ wartość przybliżona pierwiastka

$$\alpha = m_{n+1} \pm d_n, \quad d_n = \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$$

Zalety:

- prostota
- kontynuując podziały odpowiednio długo otrzymamy ZAWSZE wynik z żądaną dokładnością

Wady:

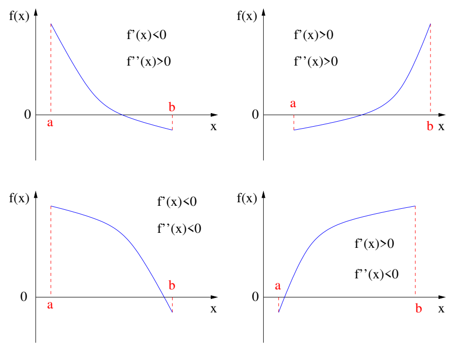
- po każdym podziale zyskujemy jedną dokładną cyfrę dwójkową (wolna zbieżność)

$\Rightarrow$ jedną cyfrę dziesiętną zyskuje się średnio co 3,3 kroków

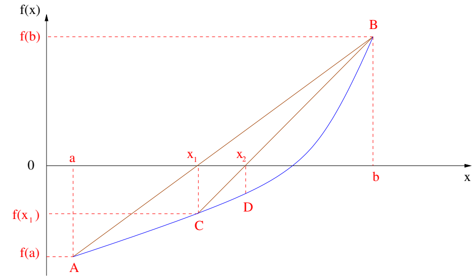
Regula falsi

Zakładamy, że funkcja $f(x)$

1. jest ciągła na przedziale $\langle a, b\rangle$,
2. spełnia warunek $f(a)f(b) < 0$,
3. posiada w przedziale $\langle a, b\rangle$ tylko jeden pierwiastek pojedynczy α równania $f(x) = 0$
4. jest klasy C^2, przy czym jej pierwsza i druga pochodna mają stały znak w $\langle a, b\rangle$



Niech $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$



Równanie cięciwy AB:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Stąd wynika

$$-f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_1 - a) \quad \Rightarrow x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

W przypadku ogólnym (o ile wcześniej nie trafimy w pierwiastek):

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}(b - x_k), \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ jest rosnący i ograniczony z góry

$\Rightarrow$ jest zbieżny

Niech

$$\lim_{k \to \infty} x_k = g$$

Z równania rekurencyjnego wynika

$$g = g - \frac{f(g)}{f(b) - f(g)}(b - g) \quad \Rightarrow \quad f(g) = 0$$

$\Rightarrow$ ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ jest zbieżny do pierwiastka równania $f(x) = 0$

Z twierdzenia Lagrange'a o przyrostach,

$$f(x_n) - f(\alpha) = f'(c)(x_n - \alpha), \quad x_n < c < \alpha,$$

wynika

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{f(x_n)}{m}, \quad m = \inf_{x \in \langle a,b \rangle} |f'(x)|$$

Ze wzoru rekurencyjnego otrzymamy

$$f(\alpha) - f(x_k) = \frac{f(x_k) - f(b)}{x_k - b}(x_{k+1} - x_k).$$

Z twierdzenia Lagrange'a

$$(\alpha - x_k)f'(\xi_k) = (x_{k+1} - x_k)f'(\bar{x}_k), \quad \xi_k \in (x_k, \alpha), \bar{x}_k \in (x_k, b)$$

Dodajemy obustronnie $-x_{k+1}f'(\xi_k)$:

$$|\alpha - x_{k+1}| = \frac{|x_k - x_{k+1}| \cdot |f'(\xi_k) - f'(\bar{x}_k)|}{|f'(\xi_k)|} \leq \frac{M - m}{m}|x_{k+1} - x_k|$$

$$m = \inf_{x \in \langle a,b \rangle} |f'(x)|, \quad M = \sup_{x \in \langle a,b \rangle} |f'(x)|$$

W niewielkim otoczeniu pierwiastka α

$$|\alpha - x_{k+1}| \sim \left| \frac{f(x_{k+1})}{f'(x_{k+1})} \right| \sim \left| \frac{x_{k+1} - x_k}{f(x_{k+1}) - f(x_k)} \right| \cdot |f(x_{k+1})|$$

Własności metody:

- zbieżna dla funkcji ciągłej na $\langle a, b\rangle$, jeśli
  - spełniony jest warunek $f(a)f(b) < 0$
  - $f'(x)$ jest ograniczona i różna od zera w otoczeniu pierwiastka
- jeśli $f''(x)$ ma stały znak w $\langle a, b\rangle$, to ten punkt skrajny, w którym $ff'' > 0$, jest punktem stałym iteracji
- wolna zbieżność

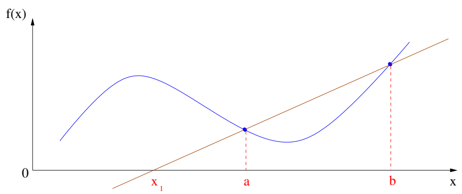
Metoda siecznych

Zakładamy, że funkcja $f(x)$

1. jest ciągła na przedziale $\langle a, b\rangle$
2. spełnia warunek $f(a)f(b) < 0$
3. posiada w przedziale $\langle a, b\rangle$ tylko jeden pierwiastek pojedynczy α równania $f(x) = 0$
4. jest klasy C^2, przy czym jej pierwsza i druga pochodna mają stały znak w $\langle a, b\rangle$

Natomiast nie wymagamy, aby

- funkcja miała w punktach wytyczających następną cięciwę różne znaki



- dla pierwszej cięciwy warunek $f(a)f(b) < 0$ obowiązuje!

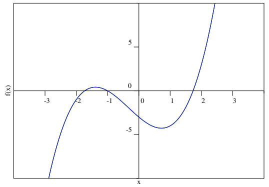
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Własności:

- zbieżność na ogół szybsza niż dla regula falsi
- gdy $(x_k - x_{k-1})$ jest tego samego rzędu, co oszacowanie błędu, następne przybliżenie może już być błędne
- gdy początkowe przybliżenia nie leżą dostatecznie blisko pierwiastka, metoda może nie być zbieżna
- jeżeli w trakcie obliczeń odległości między kolejnymi przybliżeniami zaczynają wzrastać, należy je przerwać i zawężyć przedział izolacji

Przykład Chcemy znaleźć dodatni pierwiastek równania

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$



$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2x - 3 \\ f''(x) &= 6x + 2 \end{aligned}$$

Z wykresu funkcji wynika, że

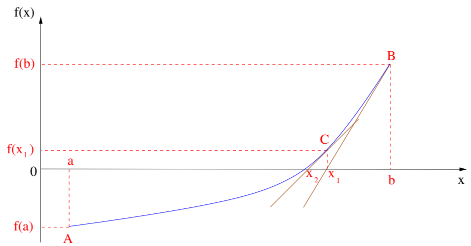
- przedziałem izolacji pierwiastka dodatniego jest np. $(1, 2)$
- obie pochodne są dodatnie w tym przedziale

Regula falsi		Metoda siecznych	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
$a = 1$	-4	$a = 1$	-4
$b = 2$	3	$b = 2$	3
$x_1 = 1,57142$	-1,36449	$x_1 = 1,57142$	-1,36449
$x_2 = 1,70540$	-0,24784	$x_2 = 1,70540$	-0,24784
$x_3 = 1,72788$	-0,03936	$x_3 = 1,73513$	0,02920
$x_4 = 1,73140$	-0,00615	$x_4 = 1,73199$	0,000576

Metoda Newtona

Ponownie zakładamy, że funkcja $f(x)$

1. jest ciągła na przedziale $\langle a, b\rangle$
2. spełnia warunek $f(a)f(b) < 0$
3. posiada w przedziale $\langle a, b\rangle$ tylko jeden pierwiastek pojedynczy α równania $f(x) = 0$
4. jest klasy C^2, przy czym jej pierwsza i druga pochodna mają stały znak w $\langle a, b\rangle$



- styczną do wykresu prowadzimy od końca przedziału, w którym $f f'' > 0$

Z równania stycznej otrzymamy

$$f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n) = 0$$

Stąd

$$x_{n+1} = x_n + h_n, \quad h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Jeśli $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$, to

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \quad \Rightarrow \quad x_1 < b$$

Ze wzoru Taylora wynika

$$\alpha = b - \frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(b)}(\alpha - b)^2, \quad c \in \langle a, b \rangle$$

czyli

$$\alpha - x_1 = -\frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(b)}(\alpha - b)^2 < 0$$

$\Rightarrow$ $\alpha < x_1 < b$

$\Rightarrow$ x_1 leży rzeczywiście bliżej α niż b

$\Rightarrow$ ciąg generowany przez wzór Newtona jest malejący i ograniczony przez α

$\Rightarrow$ ciąg ten jest zbieżny

Niech $\lim_{n\to\infty} x_n = g$

$\Rightarrow$ $g = g - \frac{f(g)}{f'(g)} \quad \Rightarrow \quad f(g) = 0 \quad \Rightarrow \quad g = \alpha$

$\Rightarrow$ ciąg jest zbieżny do α

Ponieważ

$$f(x_n) - f(\alpha) = f'(c)(x_n - \alpha), \quad c \in \begin{cases} (x_n, \alpha), & x_n < \alpha \\ (\alpha, x_n), & \alpha < x_n \end{cases}$$

więc

$$|x_n - \alpha| \le \left|\frac{f(x_n)}{m}\right|, \quad m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} |f'(x)|$$

Ze wzorów Taylora i Newtona wynika

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0$$

Stąd

$$|f(x_n)| \le \frac{1}{2}M(x_n - x_{n-1})^2, \quad M = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|$$

$$|\alpha - x_n| \le \frac{1}{2}\frac{M}{m}(x_n - x_{n-1})^2 = \frac{M}{2m}\left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right]^2$$

Dla x_n dostatecznie bliskich α

$$|\alpha - x_n| \approx \left|\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\right|$$

Przykład

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
$x_0 = 2$	3	$x_0 = 1$	-4
$x_1 = 1,76923$	0,36048	$x_1 = 3$	24
$x_2 = 1,73292$	0,00823	$x_2 = 2,2$	5,88800
$x_3 = 1,73205$	-0,000008	$x_3 = 1,83015$	0,98899
		$x_4 = 1,7578$	0,24782
		$x_5 = 1,73195$	-0,00095

Twierdzenie Jeżeli mamy przedział $\langle a,b\rangle$ taki, że:

(i) $f(a)$ i $f(b)$ mają przeciwne znaki,

(ii) f'' jest ciągła i nie zmienia znaku na $\langle a,b\rangle$,

(iii) styczne do krzywej $y = f(x)$ poprowadzone w punktach o odciętych a i b przecinają oś OX wewnątrz przedziału $\langle a,b\rangle$,

wówczas równanie $f(x) = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek α w przedziale $\langle a,b\rangle$ i metoda Newtona jest zbieżna do α dla dowolnego punktu startowego $x_0 \in \langle a,b\rangle$.

Przykład Obliczanie pierwiastka kwadratowego z liczby dodatniej c:

$$x^2 - c = 0.$$

Ze wzoru Newtona otrzymujemy (dla $x_n \neq 0$):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right).$$

$\Rightarrow$ metoda zawsze zbieżna w przedziale $\langle a,b\rangle$ takim, że

$$0 < a < c^{1/2}$$
$$b > \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right)$$

Rząd metod przybliżonego obliczania pierwiastków

Definicja Mówimy, że metoda jest rzędu p, jeżeli istnieje stała K taka, że dla dwu kolejnych przybliżeń x_k i x_{k+1} zachodzi nierówność

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq K|x_k - \alpha|^p.$$

Metoda	Rząd
bisekcji	1
regula falsi	1
siecznych	$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \simeq 1,62$
Newtona	2

Pierwiastki wielokrotne

Definicja Liczbę α nazywamy r–krotnym pierwiastkiem równania $f(x) = 0$, jeżeli

$$0 < |g(\alpha)| < \infty, \quad g(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha)^r}.$$

Krotności nieparzyste:

⇒ warunek $f(a)f(b) < 0$ spełniony

⇒ można stosować wszystkie metody

⇒ rząd metody Newtona i siecznych obniża się

Krotności parzyste:

⇒ warunek $f(a)f(b) < 0$ nie jest spełniony

⇒ można stosować metodę Newtona, jeśli tylko istnieje odpowiednie lewo- lub prawostronne sąsiedztwo szukanego pierwiastka, w którym znak $f'(x)$ i $f''(x)$ pozostaje stały

⇒ rząd metody obniża się

Jeżeli krotność pierwiastka jest znana, metodę Newtona można zmodyfikować w sposób następujący:

$$x_{n+1} = x_n + rh_n, \quad h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Jeżeli krotność nie jest znana, zakładamy, że $f(x)$ ma r–tą pochodną ciągłą w otoczeniu pierwiastka α o krotności r:

$$f^{(i)}(\alpha) = 0, \quad i < r$$

Ze wzoru Taylora wynika

$$f(x) = \frac{1}{r!}(x-\alpha)^r f^{(r)}(\xi), \quad f'(x) = \frac{1}{(r-1)!}(x-\alpha)^{r-1} f^{(r)}(\xi'),$$

przy czym ξ i ξ' leżą w przedziale między x i α
Niech

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \lim_{x\to\alpha} \frac{u(x)}{x-\alpha} = \frac{1}{r}$$

$\Rightarrow$ równanie $u(x) = 0$ ma pierwiastek pojedynczy α

Metoda Newtona:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)}, \quad u'(x_n) = 1 - \frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} u(x_n)$$

Metoda siecznych:

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{u(x_n) - u(x_{n-1})}$$

Równania algebraiczne

$$w(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

- równanie ma dokładnie n pierwiastków
- jeśli współczynniki $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są rzeczywiste, to ewentualne pierwiastki zespolone występują w parach sprzężonych

Liczba pierwiastków rzeczywistych

Definicja Ciąg $w(x) \equiv w_0(x), w_1(x), \ldots, w_m(x)$ wielomianów rzeczywistych nazywamy ciągiem Sturma, jeśli

1. $w_0(x)$ ma tylko pojedyncze zera
2. $\mathrm{sign} w_1(\xi) = -\mathrm{sign} w_0'(\xi)$ dla wszystkich rzeczywistych zer wielomianu $w_0(x)$
3. dla $i = 1, \ldots, m-1$
   $$w_{i+1}(\xi) w_{i-1}(\xi) < 0$$
   jeśli ξ jest zerem rzeczywistym wielomianu $w_i(x)$
4. ostatni wielomian $w_m(x)$ nie zmienia swojego znaku

Algorytm Euklidesa:

$$\begin{aligned} w_1(x) &= -w_0'(x) = -w'(x) \\ w_{i-1}(x) &= q_i(x)w_i(x) - c_i w_{i+1}(x), \quad i = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

$c_i > 0$:

- dowolne stałe dodatnie
- dla wygody najlepiej jest je dobierać tak, aby wielomian $c_i w_{i+1}(x)$ miał całkowite współczynniki

Stopień wielomianów $w_i(x)$ maleje z i

$\Rightarrow$ ciąg przerywa się najpóźniej po m krokach (m - stopnień w_0)

$\Rightarrow$ $w_{m-1}(x) = q_m(x)w_m(x),\ w_m(x) \neq 0$

$\Rightarrow$ $w_m(x)$ jest największym wspólnym podzielnikiem wielomianów $w(x)$ i $w'(x)$

$w(x)$ ma tylko zera pojedyncze

$\Rightarrow$ $w_m(x)$ jest stałą różną od zera

$\Rightarrow$ spełniony jest warunek 4 definicji ciągu Sturma

Jeśli $w_i(\xi) = 0$, to

$$w_{i-1}(\xi) = -c_i w_{i+1}(\xi)$$

Gdyby $w_{i+1}(\xi) = 0$, to musiałoby być również

$$w_{i+2}(\xi) = \ldots = w_m(\xi) = 0$$

$\Rightarrow$ sprzeczność z $w_m(\xi) \neq 0$

$\Rightarrow$ spełniony jest warunek 3 definicji ciągu Sturma

Twierdzenie (Sturma) Liczba rzeczywistych zer wielomianu $w(x) \equiv w_0(x)$ w przedziale $\langle a, b)$ jest równa

$$N(b) - N(a),$$

przy czym $N(x)$ jest liczbą zmian znaku, w punkcie x, w ciągu Sturma $w_0(x), \ldots w_m(x)$.

Przykład Chcemy określić liczbę pierwiastków rzeczywistych równania

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

Budujemy ciąg Sturma:

$$\begin{aligned} w_0(x) &= x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ w_1(x) &= -3x^2 - 2x + 2 \\ w_2(x) &= 2x + 1 \\ w_3(x) &= -1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	∞
w_0	-	+
w_1	-	-
w_2	-	+
w_3	-	-
$N(x)$	0	3

$$N(\infty) - N(-\infty) = 3$$

$\Rightarrow$ równanie ma trzy pierwiastki rzeczywiste

Twierdzenie Sturma

- pozwala ściśle określić liczbę zer rzeczywistych w dowolnym zadanym przedziale, ale ...
- wymaga ono uciążliwych rachunków

Niech

$w(x), w'(x), \ldots, w^{(n)}(x)$	-	ciąg pochodnych wielomianu
$M(x)$	-	liczba zmian znaku w tym ciągu

Twierdzenie (Fouriera) Jeżeli $w(x)$ jest wielomianem stopnia n określonym w przedziale (a, b) oraz $w(a)w(b) \neq 0$, to liczba zer wielomianu w tym przedziale wynosi

$$M(a) - M(b),$$

lub jest od tej liczby mniejsza o liczbę parzystą.

Przykład

$$w(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 5$$

Tworzymy ciąg pochodnych:

$$\begin{aligned} w'(x) &= 3x^2 - 4x - 5 \\ w''(x) &= 6x - 4 \\ w'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	∞	0	1	3
w	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
w'	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
w''	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
w'''	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$M(x)$	3	0	2	1	0

$$M(-\infty) - M(\infty) = 3$$

$\Rightarrow$ równanie ma jeden lub trzy pierwiastki rzeczywiste

Ponadto

$$\begin{aligned} M(-\infty) - M(0) &= 1 \\ M(0) - M(1) &= 1 \\ M(1) - M(3) &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ równanie ma trzy pierwiastki, po jednym w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, 3)$

Lokalizacja zer rzeczywistych

Twierdzenie Niech K będzie kresem górnym dodatnich zer wielomianu $w(x)$. Jeżeli wprowadzimy równania pomocnicze

$$\begin{aligned} w_1(x) &= x^n w\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \\ w_2(x) &= w(-x) = 0, \\ w_3(x) &= x^n w\left(-\frac{1}{x}\right) = 0, \end{aligned}$$

dla których kresy górne zer dodatnich są odpowiednio równe K_1, K_2 i K_3, to wszystkie dodatnie zera wielomianu $w(x)$ będą leżały w przedziale $\left(\frac{1}{K_1}, K\right)$, a wszystkie zera ujemne w przedziale $\left(-K_2, -\frac{1}{K_3}\right)$.

Twierdzenie (Lagrange'a) Niech $a_0 \neq 0$ i a_k ($k \geq 1$) będzie pierwszym ujemnym współczynnikiem wielomianu

$$w(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Wszystkie dodatnie zera tego wielomianu są mniejsze niż

$$K = 1 + \sqrt[k]{\frac{A}{|a_0|}},$$

gdzie A oznacza maksimum modułu ujemnych współczynników wielomianu. Jeżeli wszystkie współczynniki są nieujemne, to wielomian nie posiada zer dodatnich.

Przykład

$$w(x) = 2x^9 + x^7 - x^5 + 6x^3 - 12x^2 + 9$$

Pierwszy ujemny współczynnik to

$$a_4 = -1 \quad \Rightarrow \quad k = 4$$

Stąd

$$K = 1 + \sqrt[4]{6} \simeq 2,565$$

$$\begin{aligned}
w_1(x) &= 9x^9 - 12x^7 + 6x^6 - x^4 + x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad K_1 \simeq 2,155 \\
w_2(x) &= -2x^9 - x^7 + x^5 - 6x^3 - 12x^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad K_2 \simeq 3,449 \\
w_3(x) &= 9x^9 - 12x^7 - 6x^6 + x^4 - x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad K_3 \simeq 2,155
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ dodatnie zera leżą w przedziale $(0,464; 2,565)$

$\Rightarrow$ ujemne w przedziale $(-3,449; -0,464)$

Układy równań nieliniowych

Szukamy rozwiązań $\alpha \in \mathbb{R}^n$ równania

$$F(x) = 0$$

przy czym

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

W szczególnym przypadku

$$F(x) = \mathbf{A}x + b$$

uzyskujemy układ równań liniowych

Ogólne metody iteracyjne

Definicja Metodę iteracyjną nazywamy metodą stacjonarną p–punktową, jeżeli dla ciągu punktów

$$x^{(0)},\ \ x^{(1)},\ \ x^{(2)},\ \ \ldots$$

zbieżnego do rozwiązania α układu $F(x) = 0$ można wskazać odwzorowanie G takie, że

$$x^{(i)} = G(x^{(i-1)}, \ldots, x^{(i-p)}).$$

Definicja Niech $G: \ D \subset \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Punkt α nazywamy punktem przyciągania metody iteracyjnej, jeżeli istnieje takie otoczenie U_α tego punktu, że obierając punkty $x^{(-p+1)}, \ldots, x^{(0)}$ z tego otoczenia uzyskamy ciąg punktów $x^{(1)}$, $x^{(2)}, \ldots \in D$, zbieżny do α.

Definicja Odwzorowanie $G: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nazywamy różniczkowalnym w sensie Frécheta w punkcie x, jeżeli istnieje taka macierz $A: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, że

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|G(x+h) - G(x) - Ah\|}{\|h\|} = 0$$

przy dowolnym sposobie wyboru wektorów $h \to 0$. Macierz A nazywamy pochodną Frécheta odwzorowania G w punkcie x i oznaczamy ją przez $G'(x)$.

Twierdzenie Jeżeli pochodna Frécheta odwzorowania $G: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ w punkcie α ma promień spektralny $\varphi(G'(\alpha)) = \beta < 1$ oraz $G(\alpha) = \alpha$, to α jest punktem przyciągania metody iteracyjnej $x^{(i+1)} = G(x^{(i)})$.

Metoda Newtona

Twierdzenie Niech $F(x)$ będzie różniczkowalne w sensie Frécheta w pewnym otoczeniu $K(\alpha, r)$ punktu α, w którym $F(\alpha) = 0$. Załóżmy, że $F'(x)$ jest ciągłe w punkcie α, a $F'(\alpha)$ jest nieosobliwe. Wówczas α jest punktem przyciągania metody iteracyjnej Newtona,

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - [F'(x^{(i)})]^{-1} f(x^{(i)}).$$

Ponadto, jeżeli ciągłość pochodnej w punkcie α jest typu Höldera, tzn.

$$\|F'(x) - F'(\alpha)\| \leq H\|x - \alpha\|^p, \;\; x \in K(\alpha, r), \;\; p \in (0, 1\rangle,$$

to

$$\|x^{(i+1)} - \alpha\| \leq C\|x^{(i)} - \alpha\|^{1+p}, \;\; C = 4H\|[F'(\alpha)]^{-1}\|$$

Własności:

- wymaga silnych założeń dotyczących funkcji
- szybka zbieżność lokalna
- dla dużych n obliczanie pochodnych $F'(x)$ staje się uciążliwe

Metoda siecznych

- przybliżamy F odwzorowaniem afinicznym tak, aby

$$F(y^{(j)}) \simeq \mathbf{A}y^{(j)} + b, \;\; j = 0, 1, \ldots, n$$

- przyjmujemy za przybliżenie α rozwiązanie liniowego układu równań $\mathbf{A}x + b = 0$

Niech

- $\Delta\mathbf{Y}$ - macierz o kolumnach $y^{(1)} - y^{(0)}$, ..., $y^{(n)} - y^{(n-1)}$
- $\Delta\mathbf{F}$ - macierz o kolumnach $F(y^{(1)}) - F(y^{(0)})$, ..., $F(y^{(n)}) - F(y^{(n-1)})$

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{Y}$$

Rozwiązaniem układu równań $\mathbf{A}x + b = 0$ będzie punkt

$$x = -\mathbf{A}^{-1}b = -\mathbf{A}^{-1}(F(y) - \mathbf{A}y) = y - \mathbf{A}^{-1}F(y)$$

$(n+1)$–punktowa metoda siecznych:

1. wybieramy $x^{(-n)}$, $x^{(-n+1)}$, ..., $x^{(0)}$; kładziemy $i = 0$
2. obliczamy $\Delta\mathbf{F}^{(i)}$ oraz $\Delta\mathbf{Y}^{(i)}$ przyjmując

$$y^{(0)} = x^{(i-n)}, \;\; y^{(1)} = x^{(i-n+1)}, \;\; \ldots, \;\; y^{(n)} = x^{(i)}$$

3. wyznaczamy $x^{(i+1)}$ ze wzoru

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - \Delta\mathbf{Y}^{(i)}[\Delta\mathbf{F}^{(i)}]^{-1}F(x^{(i)})$$

4. zwiększamy i o jeden i wracamy do kroku 2

⇒ metodę można stosować, jeśli macierz $\Delta\mathbf{F}^{(i)}$ nie jest osobliwa

⇒ jeśli $\Delta\mathbf{F}^{(i)}$ jest osobliwa, konieczny jest inny wybór punktów $y^{(j)}$, np. według wzoru

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= x^{(i)} \\ y^{(n-j)} &= x^{(i)} + he^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

gdzie h jest pewną stałą, a $e^{(j)}$ to wektory przestrzeni $\mathbb{R}^n$