# Analiza widmowa

Janusz Szwabiński

21 stycznia 2003

Analiza widmowa

1. Metody Fouriera
   - Twierdzenia podstawowe
   - Dyskretna transformata Fouriera
   - Szybka transformata Fouriera
   - Okienna transformata Fouriera
2. Analiza falek
   - Ciągła transformata falkowa
   - Dyskretna transformata falkowa

---

Przykłady zastosowań metod Fouriera

- analiza sygnałów (fal) w optyce i akustyce
- równanie Dysona
  - równanie całkowe w przestrzeni położeń

$$G(x-x') = G_0(x-x') + \int \mathrm{d}^4y\mathrm{d}^4z G_0(x-y)\Sigma(y-z)G(z-x')$$

  - równanie algebraiczne w przestrzeni pędów

$$G(q) = G_0(q) + G_0(q)\Sigma(q)G(q)$$

---

Metody Fouriera - twierdzenia podstawowe

Niech

$$f(t+T) = f(t)$$

Zamiana zmiennych

$$x = \frac{2\pi}{T}t$$

prowadzi do

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

---

Twierdzenia podstawowe (2)

Iloczyn skalarny dwóch funkcji $f$ i $g$ o okresie $2\pi$:

- w przypadku ciągłym:

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x f(x)\overline{g(x)}$$

- w przypadku dyskretnym:

$$(f,g)=\sum_{\alpha=0}^{M} f(x_\alpha)\overline{g(x_\alpha)}, \quad x_\alpha=\frac{2\pi\alpha}{M+1}$$

---

Twierdzenia podstawowe (3)

**Twierdzenie 1** *Funkcje*

$$\varphi_j(x)=e^{ijx}, \quad j=0,\ \pm 1,\dots$$

*są ortogonalne w niżej podanym sensie.*
*Przypadek ciągły:*

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\begin{cases} 2\pi, & j=k, \\ 0, & j\neq k. \end{cases}$$

*Przypadek dyskretny:*

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\begin{cases} M+1, & \frac{j-k}{M+1} \textit{ jest całkowite}, \\ 0, & \textit{w przeciwnym razie}. \end{cases}$$

---

Twierdzenia podstawowe (4)

**Dowód**
W przypadku ciągłym dla $j\neq k$ mamy

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x e^{i(j-k)x} = \left[\frac{e^{i(j-k)x}}{i(j-k)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Natomiast dla $j=k$ zachodzi

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = 2\pi.$$

---

Twierdzenia podstawowe (5)

**Dowód** (ciąg dalszy)

W przypadku dyskretnym ($x_\alpha=\frac{2\pi\alpha}{M+1}$)

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{\alpha=0}^{M}\exp i(j-k)x_\alpha = \sum_{\alpha=0}^{M}\exp\left[i(j-k)\frac{2\pi\alpha}{M+1}\right]$$

$\Rightarrow$ szereg geometryczny o ilorazie

$$q=\exp\left[i(j-k)\frac{2\pi}{M+1}\right]$$

---

Twierdzenia podstawowe (6)

**Dowód** (ciąg dalszy)

Jeśli $\frac{j-k}{M+1}$ jest całkowite, to $q=1$ i

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{\alpha=0}^{M} 1 = M+1.$$

W przeciwnym razie $q\neq 1$ oraz $q^{M+1}=1$. Stąd

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\frac{q^{M+1}-1}{q-1}=0. \quad \blacksquare$$

Twierdzenia podstawowe (7)

**Twierdzenie 2** *(Analiza Fouriera w przypadku ciągłym) Każdej funkcji $f$ przedziałami ciągłej o okresie $2\pi$ można przyporządkować szereg Fouriera postaci*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ijx}.$$

*Jeśli funkcja $f$ i jej pierwsza pochodna są wszędzie ciągłe, to szereg ten jest wszędzie zbieżny do $f(x)$. Funkcje $f$ i $f'$ mogą mieć jednak skończenie wiele nieciągłości w każdym okresie. Wówczas, w razie takiej nieciągłości, szereg daje średnią arytmetyczną granic lewostronnej i prawostronnej w odpowiednim punkcie.*

Twierdzenia podstawowe (8)

**Twierdzenie 3** *(Analiza Fouriera w przypadku dyskretnym) Każdą funkcję określoną na siatce $\{x_0, \ldots, x_M\}$, gdzie $x_\alpha = \frac{2\pi}{M+1}\alpha$, można interpolować wielomianem trygonometrycznym*

$$f(x) = \sum_{j=-k}^{k+\theta} c_j e^{ijx},$$

*gdzie*

$$\theta = \begin{cases} 0, & k = \frac{1}{2}M, \quad M \textit{ parzyste}, \\ 1, & k = \frac{1}{2}(M-1), \quad M \textit{ nieparzyste}. \end{cases}$$

Twierdzenia podstawowe (9)

$\Rightarrow$ funkcja okresowa $f(x)$ ma rozwinięcie postaci

$$f(x) = \sum_{j=a}^{b} c_j \varphi_j$$

gdzie

- w przypadku ciągłym $a = -\infty$ i $b = \infty$
- w przypadku dyskretnym $b - a = M$

Twierdzenia podstawowe (10)

Dla $a \leq k \leq b$ zachodzi

$$(f, \varphi_k) = \sum_{j=a}^{b} c_j (\varphi_j, \varphi_k) = c_k(\varphi_k, \varphi_k)$$

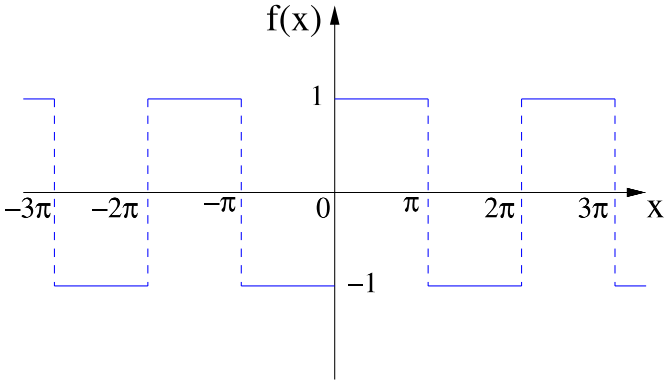
Stąd ($k \leftrightarrows j$)

$$c_j = \frac{(f, \varphi_j)}{(\varphi_j, \varphi_j)} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x f(x) e^{-ijx} & \text{(przypadek ciągły)} \\ \frac{1}{M+1} \sum_{\alpha=0}^{M} f(x_\alpha) e^{-ijx_\alpha} & \text{(przypadek dyskretny)} \end{cases}$$

Twierdzenia podstawowe (11)

**Przykład**

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi + 2k\pi < x < 2k\pi \\ 1, & 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \end{cases}$$




Twierdzenia podstawowe (12)

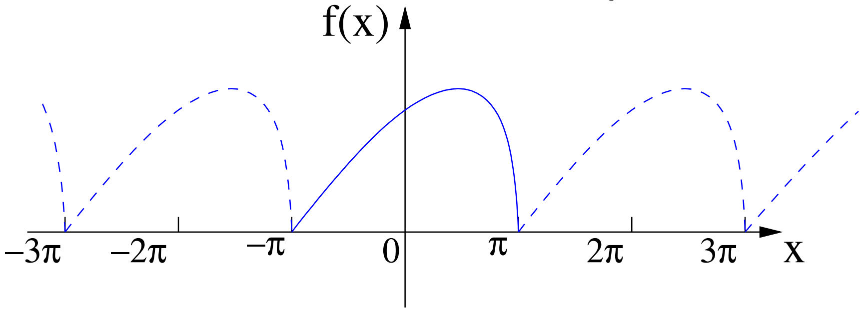
Dla funkcji tej otrzymamy

$$\begin{aligned} c_j &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \mathrm{d}x(-1)e^{-ijx} + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{d}x e^{-ijx} \\ &= \frac{1-\cos j\pi}{ij\pi} \end{aligned}$$

czyli

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots\right)$$

Przedłużanie okresowe funkcji




Twierdzenie całkowe Fouriera (1)

Niech

$$F(\xi + L) = F(\xi)$$

spełnia warunki twierdzenia Fouriera o nieciągłości.

Niech dla

$$x = \frac{2\pi\xi}{L}$$

będzie

$$F(\xi) = f(x)$$

---

Twierdzenie całkowe Fouriera (2)

Jeśli

$$c_j = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x f(x) e^{-ijx} = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}\xi F(\xi) e^{-2\pi i j \xi / L}$$

to z twierdzenia Fouriera wynika

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ijx}, \quad F(\xi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \exp\left(\frac{2\pi i j \xi}{L}\right)$$

---

Twierdzenie całkowe Fouriera (2)

Niech

$$G_L(t) = \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}\xi F(\xi) e^{-2\pi i \xi t}$$

Stąd

$$F(\xi) = \frac{1}{L}\sum_{j=-\infty}^{\infty} G_L\left(\frac{j}{L}\right) e^{2\pi i \xi j / L}$$

Jeśli $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi |F(\xi)|^2 < \infty$, możemy przejść do granicy $L \to \infty$

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t G(t) e^{2\pi i \xi t} \\ G(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi F(\xi) e^{-2\pi i \xi t} \end{aligned}$$

$G(t)$ - transformata Fouriera funkcji $F(\xi)$

---

Twierdzenie całkowe Fouriera (3)

**Twierdzenie 4** *(Parsevala)*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t |G(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi |F(\xi)|^2$$

---

Dyskretna transformata Fouriera (1)

Niech $f(t)$ będzie zależną od czasu wielkością fizyczną

- dysponujemy skończoną liczbą pomiarów
- na komputerze można przedstawić skończoną liczbę wartości

$\Rightarrow$ potrzebujemy dyskretnej transformaty Fouriera (DFT)

---

Dyskretna transformata Fouriera (2)

Załóżmy, że

- pomiary zostały wykonane pomiędzy $t = 0$ oraz $t = T$
- dane zostały zebrane w równych odstępach czasu

Dyskretna transformata Fouriera ma postać

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{i2\pi nk/N}$$

przy czym

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi nk/N}$$

---

Dyskretna transformata Fouriera (3)

Implementacja:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re} g_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \cos \frac{2\pi nk}{N} \mathrm{Re} f_n + \sin \frac{2\pi nk}{N} \mathrm{Im} f_n \right] \\
\mathrm{Im} g_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \cos \frac{2\pi nk}{N} \mathrm{Im} f_n - \sin \frac{2\pi nk}{N} \mathrm{Re} f_n \right]
\end{aligned}$$

---

Dyskretna transformata Fouriera (4)

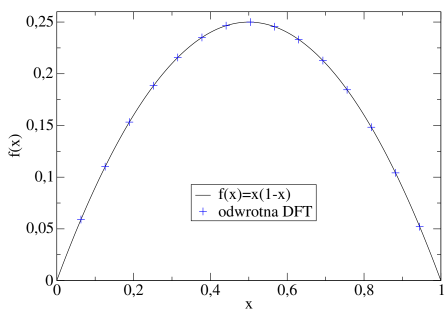
```
SUBROUTINE DFT (FR,FI,GR,GI,N)
  IMPLICIT NONE
  INTEGER, INTENT (IN) :: N
  INTEGER :: I,J
  REAL :: PI,X,Q
  REAL, INTENT (IN), DIMENSION (N) :: FR,FI
  REAL, INTENT (OUT), DIMENSION (N) :: GR,GI
!
  PI = 4.0*ATAN(1.0)
  X  = 2*PI/N
  DO I = 1, N
    GR(I) = 0.0
    GI(I) = 0.0
    DO J = 1, N
      Q = X*(J-1)*(I-1)
      GR(I) = GR(I)+FR(J)*COS(Q)+FI(J)*SIN(Q)
      GI(I) = GI(I)+FI(J)*COS(Q)-FR(J)*SIN(Q)
    END DO
  END DO
END SUBROUTINE DFT
```

---

Dyskretna transformata Fouriera (5)

**Przykład**

$$f(x) = x(1-x), \quad x \in [0,1]$$



## Dyskretna transformata Fouriera (6)

Dla każdej wartości spektralnej potrzebujemy

- $N$ dodawań i mnożeń

$\Rightarrow$ algorytm klasy $O(N^2)$

## Szybka transformata Fouriera (FFT) (1)

Niech

$$N = 2^M, \quad M \; - \; \text{liczba całkowita}$$

Zachodzi (dla wygody pomijamy stałą $1/\sqrt{N}$)

$$\begin{aligned} g_k &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi nk/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} e^{-i2\pi(2n)k/N} + \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} e^{-i2\pi(2n+1)k/N} \\ &= x_k + y_k e^{-i2\pi k/N} \end{aligned}$$

## Szybka transformata Fouriera (2)

$$x_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} e^{-i2\pi nk/(N/2)}, \quad y_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} e^{-i2\pi nk/(N/2)}$$

$\Rightarrow$ zamieniliśmy wyjściową transformatę Fouriera na dwie inne, o połowę krótsze

Przy tym

$$x_{k+N/2} = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} e^{-i2\pi nk/(N/2)} e^{-i2\pi n} = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} e^{-i2\pi nk/(N/2)} = x_k$$

i podobnie,

$$y_{k+N/2} = y_k$$

## Szybka transformata Fouriera (3)

Stąd wynika (dla $k < \frac{N}{2}$)

$$\begin{aligned} g_k &= x_k + \omega^k y_k \\ g_{k+N/2} &= x_k - \omega^k y_k \end{aligned}$$

gdzie

$$\omega = e^{-i2\pi N}$$

Najprostszy algorytm:

1. oblicz $x_k$, $y_k$ oraz $\omega^k$ dla $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{N}{2} - 1$
2. wyznacz $g_k = x_k + \omega^k y^k$
3. oblicz $g_{k+N/2}$

## Szybka transformata Fouriera (4)

$x_k$ i $y_k$ są dwoma niezależnymi DFT rzędu $N/2$

$\Rightarrow$ możemy powtórzyć powyższy algorytm dla każdej z nich

$\Rightarrow$ proces możemy iterować aż do otrzymania DFT rzędu 2:

$$g_0 = f_0 + f_1$$
$$g_1 = f_0 - f_1$$

---

Szybka transformata Fouriera (5)

**Przykład** Mamy funkcję $f$ określoną zbiorem wartości $\{f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_7\}$ $(N = 8)$

1. Dzielimy wartości $\{f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_7\}$ na dwa ciągi o długości $N = 4$

$$\{f_0,\ f_2,\ f_4,\ f_6\},\quad \{f_1,\ f_3,\ f_5,\ f_7\}$$

2. Dzielimy te ciągi na ciągi o długości $N = 2$

$$\{f_0,\ f_4\},\quad \{f_2,\ f_6\},\quad \{f_1,\ f_5\},\quad \{f_3,\ f_7,\}$$

3. Dla każdego z tych ciągów obliczamy $x_0$ i $y_0$, a następnie wyznaczamy $\{g_0, g_1\}$

---

Szybka transformata Fouriera (6)

4. Przy użyciu wzorów

$$g_k = x_k + \omega^k y_k,$$
$$g_{k+N/2} = x_k - \omega^k y_k,$$

przechodzimy od DFT o długości $m$ do DFT o długości $2m$

Własności

- $\frac{1}{2}N(\log_2 N - 2) + 1$ dodawań
- $N \log_2 N$ mnożeń

$\Rightarrow$ algorytm klasy $O(N \log N)$

$\Rightarrow$ dla $N = 1024$ daje to koszt 250 razy mniejszy od kosztu DFT

---

Szybka transformata Fouriera (7)

Odwrócony porządek binarny:

- indeks ciągu danych wejściowych kodujemy za pomocą liczby binarnej
- odwracamy porządek binarny w każdej liczbie

$\Rightarrow$ wartości, które dodajemy do siebie na pierwszym poziomie rozkładu, znajdą się w najbliższym sąsiedztwie

---

Szybka transformata Fouriera (8)

**Przykład**

$$\{f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5,\ f_6,\ f_7\}$$

Kodujemy indeksy za pomocą liczb binarnych

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

Odwracamy kolejność bitów w ciągu

000, 100, 010, 110, 001, 101, 011, 111

co prowadzi do

$$\{f_0,\ f_4, f_2,\ f_6,\ f_1,\ f_5,\ f_3,\ f_7\}$$

```
 SUBROUTINE FFT (AR,AI,N,M)
  IMPLICIT NONE
  INTEGER, INTENT (IN) :: N,M
  INTEGER :: N1,N2,I,J,K,L,L1,L2
  REAL :: PI,A1,A2,Q,U,V
  REAL, INTENT (INOUT), DIMENSION (N) :: AR,AI
!
  PI = 4.0*ATAN(1.0)
  N2 = N/2
!
  N1 = 2**M
  IF(N1.NE.N) STOP 'N nie jest rowne 2**M'
! zmien kolejnosc danych zgodnie z odwrotnym
! porzadkiem binarnym
  L = 1
  DO K = 1, N-1
    IF (K.LT.L) THEN
      A1    = AR(L)
      A2    = AI(L)
      AR(L) = AR(K)
      AR(K) = A1
      AI(L) = AI(K)
      AI(K) = A2
    END IF
    J   = N2
    DO WHILE (J.LT.L)
      L = L-J
      J = J/2
    END DO
    L = L+J
  END DO
  !wykonanie dodawania na wszystkich poziomach
  L2 = 1
  DO L = 1, M
    Q  =  0.0
    L1 =  L2
    L2 =  2*L1
    DO K = 1, L1
      U   =  COS(Q)
      V   = -SIN(Q)
      Q   =  Q + PI/L1
      DO J = K, N, L2
        I     =  J + L1
        A1    =  AR(I)*U-AI(I)*V
        A2    =  AR(I)*V+AI(I)*U
        AR(I) =  AR(J)-A1
        AR(J) =  AR(J)+A1
        AI(I) =  AI(J)-A2
        AI(J) =  AI(J)+A2
      END DO
    END DO
  END DO
```

```
END SUBROUTINE FFT
```

---

Okienna transformata Fouriera (1)

Transformata Fouriera:

- pozwala zanalizować pełną zawartość widmową sygnału
- nie mówi jednak nic o tym, jak ta zawartość zmienia się z czasem

⇒ analiza sygnałów stacjonarnych

Sygnały niestacjonarne

⇒ potrzebna reprezentacja czasowo–częstotliwościowa

---

Okienna transformata Fouriera (2)

Obserwujemy sygnał przez "okno"

$$g(\omega,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t f(t) w(t-\tau) e^{-i\omega t}$$

Przy tym na ogół

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t w^2(t) = 1$$

⇒ transformata okienna pozwala wydobyć informację o sygnale w otoczeniu punktu $\tau$

---

Okienna transformata Fouriera (3)

Przykładowe funkcje filtrujące:

- trójkątna funkcja okienna

$$w(t) = \begin{cases} \mathcal{N}\left(1 - \frac{|t|}{\sigma}\right), & |t| < \sigma \\ 0, & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

- gaussowska funkcja okienna

$$w(t) = \mathcal{N} e^{-(t/\sigma)^2}$$

gdzie $\mathcal{N}$ to stała normalizacyjna, a $\sigma$ jest miarą szerokości

---

Okienna transformata Fouriera (4)

Transformata odwrotna

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\tau g(\omega,\tau) w(\tau - t) e^{i\omega t}$$

Zasada Heisenberga

⇒ nie możemy znać dokładnej reprezentacji czasowo–częstotliwościowej sygnału

⇒ problem z rozdzielczością

---

Analiza falek

- alternatywa dla okiennej transformaty Fouriera
- częściowo eliminuje problem rozdzielczości (rozkład wielorozdzielczy)

Ciągła transformata falkowa (1)

$$g(\lambda,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t f(t) u^{\dagger}_{\lambda\tau}(t)$$

gdzie $u^{\dagger}_{\lambda\tau}$ to sprzężenie zespolone falki

$$u_{\lambda\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} u\left(\frac{t-\tau}{\lambda}\right)$$

| | | |
|---|---|---|
| $\lambda \neq 0$ | - | szerokość falki |
| $\tau$ | - | przesunięcie falki |

Ciągła transformata falkowa (2)

$u(t)$ wybieramy tak, aby

$$\mathcal{Z} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \frac{1}{|\omega|} |\tilde{u}(\omega)|^2 < \infty$$

gdzie $\tilde{u}(\omega)$ to transformata Fouriera falki $u(t)$

Wówczas

$$f(t) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}\tau \frac{1}{\lambda^2} g(\lambda,\tau) u_{\lambda\tau}(t)$$

Ciągła transformata falkowa (3)

Przykłady:

- zmodyfikowane falki Gaussa

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{2}{\sqrt{3}}(1-\pi t^2) e^{-\pi t^2/2} \\ \tilde{u}(\omega) &= \frac{2\omega^2}{\sqrt{2\pi^3}} e^{-\omega^2/2\pi} \end{aligned}$$

- falki Morleta

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{i\nu t - \pi t^2/2} \\ \tilde{u}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{(\omega-\nu)^2}{2\pi}\right\} \end{aligned}$$

Dyskretna transformata falkowa (1)

Niech

$$\lambda = \frac{1}{a^j}, \quad \tau = k\lambda, \quad j \text{ - liczba całkowita}$$

W najbardziej popularnej wersji

$$a = 2, \quad k \text{ - liczba całkowita}$$

Wówczas

$$u_{jk}(t) = 2^{j/2} u(2^j t - k)$$

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{jk} u^{\dagger}_{jk}(t)$$

Dyskretna transformata falkowa (2)

W praktyce wybieramy $u_{jk}$ ze zbioru dualnych funkcji ortonormalnych

$$\langle u_{jk} | u_{lm} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t u^{\dagger}_{jk}(t) u_{lm}(t) = \delta_{jl}\delta_{km}$$

Wówczas

$$c_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t f(t) u_{jk}(t) = \langle u_{jk} | u_{lm} \rangle$$

W przypadku dyskretnego zbioru danych

$$c_{jk} = \sum_i f(t_i) u_{jk}(t_i)$$

---

Dyskretna transformata falkowa (3)

Jak liczyć?

- rozkład wielorozdzielczy

Gdzie szukać?

- R. Polkar, "The Wavelet Tutorial"
  `http://engineering.rowan.edu/~polikar/homepage.html`
- T. Pang, "Metody obliczeniowe w fizyce"

---