Interpolacja, część I

Janusz Szwabiński

8 października 2002

Literatura (uzupełnienie)

1. K. A. Ross, Ch. R. B. Wright, "Matematyka dyskretna"
2. P. Wróblewski, "Algorytmy, struktury danych i techniki programowania"
3. Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, "Metody numeryczne"
4. G. M. Fichtenholz, "Rachunek różniczkowy i całkowy"
5. A. Mostowski, M. Stark, "Elementy algebry wyższej"

Interpolacja, część I

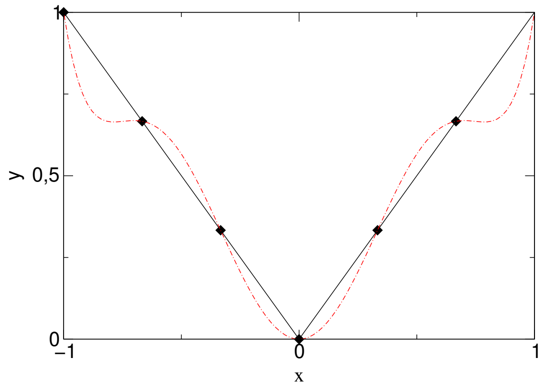
1. Zagadnienie interpolacyjne
2. Interpolacja wielomianowa
   - Wzór interpolacyjny Lagrange'a
   - Metoda Aitkena
   - Metoda Neville'a
   - Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego
   - Wzór interpolacyjny Newtona
   - Zbieżność procesów interpolacyjnych
3. Interpolacja wymierna
   - Sformułowanie zagadnienia
   - Odwrotności ilorazów różnicowych

Zagadnienie interpolacyjne (1)

x_i	-	węzły interpolacji
$y_i \equiv f(x_i)$	-	wartości funkcji interpolowanej
$F(x)$	-	funkcja interpolująca

$$F(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Zagadnienie interpolacyjne (2)



Interpolacja wielomianowa (1)

Definicja Wyznacznikiem Vandermonde'a stopnia n nazywa się wyznacznik

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Twierdzenie 1

$$V_n = \prod_{\substack{k,l=1 \\ k>l}}^{n} (x_k - x_l)$$

Interpolacja wielomianowa (2)

Definicja Układ n równań liniowych o n niewiadomych

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \dots \quad + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad \dots \quad + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \quad \dots \quad + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

nazywamy układem Cramera, jeśli

$$\det A = \det[a_{jk}] \neq 0.$$

Interpolacja wielomianowa (3)

Twierdzenie 2 *Układ Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie:*

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie macierz A_k powstaje z macierzy A przez zastąpienie k–tej kolumny przez $b_1, \dots, b_n$.

Interpolacja wielomianowa (4)

Π_n - zbiór wielomianów stopnia $\leq n$

Twierdzenie 3 *Dla dowolnych $n+1$ punktów węzłowych*

$$(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \ x_i \neq x_k \ dla \ i \neq k$$

istnieje dokładnie jeden wielomian $W_n \in \Pi_n$ taki, że

$$W_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

$\Rightarrow$ interpolacja wielomianowa jest zagadnieniem jednoznacznym.

Interpolacja wielomianowa (5)

Dowód Mamy $n+1$ punktów węzłowych (x_i, y_i). Szukamy wielomianu interpolującego w postaci

$$W_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

przy czym

$$W_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Stąd

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + \quad \ldots \quad &+ a_n x_0^n = y_0, \\ &\vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \quad \ldots \quad &+ a_n x_n^n = y_n. \end{aligned}$$

Interpolacja wielomianowa (6)

Dowód (ciąg dalszy) Macierz tego układu (niewiadomymi są współczynniki a_i!) ma postać

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix},$$

$\Rightarrow$ $\det A$ jest wyznacznikiem Vandermonde'a

Ponieważ $x_i \neq x_k$ dla $i \neq k$,

$\Rightarrow$ $\det A \neq 0$

$\Rightarrow$ układ równań jest układem Cramera

Interpolacja wielomianowa (7)

Dowód (ciąg dalszy)

$\Rightarrow$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie

$$a_i = \frac{\det A_i}{\det A} = \frac{1}{\det A} \sum_{j=0}^{n} y_j A_{ij},$$

gdzie A_{ij} są kolejnymi dopełnieniami algebraicznymi elementów i–tej kolumny macierzy A. ∎

Wzór interpolacyjny Lagrange'a (1)

$$\left.\begin{array}{l} W_n(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n \\ a_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=0}^{n} y_j A_{ij} \end{array}\right\} W_n(x) = y_0 \Phi_0(x) + \ldots + y_n \Phi_n(x)$$

$\Phi_i(x)$ - wielomiany stopnia $\leq n$

Ponieważ

$$W_n(x_i) = y_0 \Phi_0(x_i) + y_1 \Phi_1(x_i) + \ldots + y_n \Phi_n(x_i) \equiv y_i$$

$$\Rightarrow \Phi_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j, \\ 1, & \text{gdy } i = j. \end{cases}$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a (2)

$$\Phi_i(x) = \lambda (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)$$

Z warunku $\Phi_i(x_i) = 1$ otrzymujemy

$$\Phi_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a (3)

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j) \left. \frac{\omega_n(x)}{x - x_j} \right|_{x = x_j}} = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j) \omega_n'(x_j)},$$

gdzie

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

Twierdzenie o jednoznaczności

$\Rightarrow$ wielomian Lagrange'a jest jedynym wielomianem interpolacyjnym stopnia $\leq n$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a (4)

Przykład Szukamy wielomianu interpolacyjnego, który przechodzi przez następujące punkty węzłowe:

x_i	-2	1	2	4
y_i	3	1	-3	8

$$\begin{aligned} W_3(x) &= \frac{3(x-1)(x-2)(x-4)}{(-2-1)(-2-2)(-2-4)} + \frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{(1+2)(1-2)(1-4)} \\ &\quad \frac{-3(x+2)(x-1)(x-4)}{(2+2)(2-1)(2-4)} + \frac{8(x+2)(x-1)(x-4)}{(4+2)(4-1)(4-2)} \\ &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{25}{6}x + 6. \end{aligned}$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a (5)

Przykład

```
FUNCTION LAGRANGE(x,xa,ya) RESULT (wnx)
    implicit  none
    double precision,dimension(:) :: xa,ya !punkty wezlowe
    double precision              :: x,wnx,om,w
    integer :: i,j

    wnx=0.0
    om=1.0
    do i=1,size(xa)
      om=om*(x-xa(i))
      w=1.0
      do j=1, size(xa)
        if(i .ne. j) w=w*(xa(i)-xa(j))
      end do
      wnx=wnx+ya(i)/(w*(x-xa(i)))
    end do
    wnx=wnx*om

END FUNCTION
```

Metoda Aitkena (1)

$W_{i,j}(x)$	-	wielomian stopnia pierwszego przechodzący przez (x_i, y_i), (x_j, y_j)
$W_{i,j,k}(x)$	-	wielomian stopnia drugiego przechodzący przez (x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)
$W_{0,1,\ldots,k,m}(x)$	-	wielomian stopnia m przechodzący przez (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, k, m$

Metoda Aitkena (2)

$$W_{i,j}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_j & x_j - x \end{vmatrix}}{x_j - x_i} = \frac{y_i(x_j - x) - y_j(x_i - x)}{x_j - x_i}$$

$$W_{i,j,k}(x) = \frac{\begin{vmatrix} W_{i,j}(x) & x_j - x \\ W_{i,k}(x) & x_k - x \end{vmatrix}}{x_k - x_j}$$

$$W_{0,1,\ldots,k,m} = \frac{\begin{vmatrix} W_{0,1,\ldots,k-1,k}(x) & x_k - x \\ W_{0,1,\ldots,k-1,m}(x) & x_m - x \end{vmatrix}}{x_m - x_k}$$

Metoda Aitkena (3)

Schemat Aitkena:

$$\begin{array}{llllllll}
x_0 & y_0 & & & & & & \\
x_1 & y_1 & W_{0,1} & & & & & \\
x_2 & y_2 & W_{0,2} & W_{0,1,2} & & & & \\
x_3 & y_3 & W_{0,3} & W_{0,1,3} & W_{0,1,2,3} & & & \\
x_4 & y_4 & W_{0,4} & W_{0,1,4} & W_{0,1,2,4} & W_{0,1,2,3,4} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
x_n & y_n & W_{0,n} & W_{0,1,n} & W_{0,1,2,n} & W_{0,1,2,3,n} & \ldots & W_{0,1,\ldots,n}
\end{array}$$

Metoda Aitkena (4)

Przykład Obliczyć metodą Aitkena wartość wielomianu interpolacyjnego $W_{0,1,2}(x)$ dla punktu $x = 2$, jeśli wielomian ten przechodzi przez następujące punkty węzłowe:

x_i	0	1	3
y_i	1	3	2

Schemat Aitkena dla tego zadania ma postać:

$$\begin{array}{llll}
0 & 1 & & \\
1 & 3 & W_{0,1}(2) = \frac{1*(1-2)-3*(0-2)}{1-0} = 5 & \\
3 & 2 & W_{0,2}(2) = \frac{1*(3-2)-2*(0-2)}{3-0} = \frac{5}{3} & W_{0,1,2}(2) = \frac{10}{3}
\end{array}$$

Metoda Neville'a (1)

$W_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(x)$ - wielomian stopnia k przechodzący przez (x_{i_j}, y_{i_j}), $j = 0, 1, \ldots, k$

Twierdzenie 4 *Wielomian* $W_{i_0,i_1,\ldots,i_k}$ *daje się przedstawić wzorem rekurencyjnym*

$$W_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(x) = \frac{(x - x_{i_0})W_{i_1,\ldots,i_k}(x) - (x - x_{i_k})W_{i_0,\ldots,i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

Metoda Neville'a (2)

Dowód Niech $P(x)$ będzie prawą stroną powyższego równania. Pokażemy, że $P(x)$ ma własności wielomianu $W_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(x)$.

Widzimy, że stopień $P(x)$ jest $\leq k$. Ponadto, zgodnie z definicją wielomianów $W_{i_1,\ldots,i_k}(x)$ i $W_{i_0,\ldots,i_{k-1}}(x)$ mamy

$$\begin{aligned}
P(x_{i_0}) &= W_{i_0,\ldots,i_{k-1}}(x_{i_0}) = y_{i_0} \\
P(x_{i_k}) &= W_{i_1,\ldots,i_k}(x_{i_k}) = y_{i_k}
\end{aligned}$$

a dla $j = 1, 2, \ldots, k-1$

$$P(x_{i_j}) = \frac{(x_{i_j} - x_{i_0})y_{i_j} - (x_{i_j} - x_{i_k})y_{i_j}}{x_{i_k} - x_{i_0}} = y_{i_j}$$

Zatem $P(x)$ rzeczywiście ma cechy $W_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(x)$, co na mocy twierdzenia o jednoznaczności kończy dowód. ∎

Metoda Neville'a (3)

Schemat Neville'a:

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & y_0 & & & \\
 & & W_{0,1}(x) & & \\
x_1 & y_1 & & W_{0,1,2}(x) & \\
 & & W_{1,2}(x) & & W_{0,1,2,3}(x) \\
x_2 & y_2 & & W_{1,2,3}(x) & \\
 & & W_{2,3}(x) & & \\
x_3 & y_3 & & &
\end{array}$$

Metoda Neville'a (4)

Przykład Zastosować metodę Neville'a do poprzedniego przykładu:

x_i	0	1	3
y_i	1	3	2

Schemat Neville'a dla $W_{0,1,2}(2)$ ma postać:

$$\begin{array}{llll}
0 & 1 & & \\
 & & W_{0,1}(2) = \frac{(2-0)*3-(2-1)*1}{1-0} = 5 & \\
1 & 3 & & W_{0,1,2}(2) = \frac{10}{3} \\
 & & W_{1,2}(2) = \frac{(2-1)*2-(2-3)*3}{3-1} = \frac{5}{2} & \\
3 & 2 & &
\end{array}$$

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego (1)

Niech $f(x)$ będzie funkcją $n+1$ razy różniczkowalną oraz $\epsilon(x) = W_n(x) - f(x)$

Twierdzenie 5

$$|\epsilon(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)|$$

gdzie

$$M_{n+1} = \sup_{x \in <a,b>} |f^{(n+1)}(x)|$$

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego (2)

Twierdzenie 6 (Rolle'a) *Niech 1) funkcja będzie określona na przedziale domkniętym $< a, b >$; 2) istnieje pochodna skończona $f'(x)$ przynajmniej w przedziale otwartym (a, b); 3) na końcach przedziału funkcja przyjmuje wartości $f(a) = f(b)$. Wówczas między a i b można znaleźć taki punkt c $(a < c < b)$, że*

$$f'(c) = 0.$$

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego (3)

Dowód (twierdzenia 5)
Wprowadźmy funkcję pomocniczą (K - pewna stała)

$$\phi(u) = W_n(u) - f(u) + K(u - x_0)(u - x_1)\ldots(u - x_n)$$

$$\phi(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Współczynnik K dobieramy tak, aby pierwiastkiem funkcji $\phi(u)$ był również punkt $\tilde{x}$, różny od węzłów interpolacji. Stąd

$$K = \frac{f(\tilde{x}) - W_n(\tilde{x})}{\omega_n(\tilde{x})}$$

Mianownik w ostatnim wzorze jest różny od zera dla wszystkich $\tilde{x} \neq x_i$ $(x_0 < \ldots < x_n)$.

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego (4)

Dowód (ciąg dalszy)
$\phi(u)$ ma w sumie $n+2$ miejsc zerowych x_0, x_1,..., x_n, $\tilde{x}$.
Twierdzenia Rolle'a

$\Rightarrow$ $\phi'(u)$ ma w każdym z podprzedziałów położonych między pierwiastkami co najmniej jedno miejsce zerowe

$\Rightarrow$ w przedziale $(\min(x, x_0), \max(x, x_n))$ jest co najmniej $n+1$ miejsc zerowych $\phi'(u)$

$\Rightarrow$ co najmniej n miejsc zerowych drugiej pochodnej $\phi''(u)$

$$\vdots$$

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego (5)

Dowód (ciąg dalszy)

$\Rightarrow$ istnieje co najmniej jeden punkt ξ w przedziale $(\min(x, x_0), \max(x, x_n))$ taki, że $\phi^{(n+1)}(\xi) = 0$

Ponieważ

$$\begin{aligned} W_n^{(n+1)}(x) &= 0 \\ \omega_n^{(n+1)}(x) &= (n+1)! \end{aligned}$$

więc

$$\phi^{(n+1)}(u) = -f^{(n+1)}(u) + K(n+1)! \quad \Rightarrow \quad K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego (6)

Dowód (ciąg dalszy)
Stąd wynika

$$f(x) - W_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x),$$

zatem

$$|\epsilon(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)|,$$

gdzie

$$M_{n+1} = \sup_{x \in <a,b>} |f^{(n+1)}(x)| \quad \blacksquare$$

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego (7)

Przykład Niech $f(x) = \sin(x)$. Załóżmy, że znamy wartości dokładne naszej funkcji w punktach

$$x_i = \frac{\pi}{10}i, \quad i = 0, 1, \ldots, 5 \quad (n = 5).$$

Wówczas

$$|W_n(x) - \sin(x)| \leq \frac{|\omega_n(x)|}{720}.$$

Stąd np. dla $x = \frac{\pi}{4}$ mamy

$$\left|\epsilon\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| \leq 0,000005, \quad \left|r\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|\frac{\epsilon(\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{4})}\right| \leq 0,000007.$$

Wzór interpolacyjny Newtona

Metody Aitkena i Neville'a:

- wyznaczanie wartości wielomianu interpolacyjnego w danym punkcie

⇒ niepraktyczne, jeśli punktów jest dużo

Ilorazy różnicowe (1)

Definicja Ilorazami różnicowymi pierwszego rzędu nazywamy wyrażenia

$$
\begin{aligned}
f[x_0; x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\
f[x_1; x_2] &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\
&\vdots \\
f[x_{n-1}; x_n] &= \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}
\end{aligned}
$$

Ilorazy różnicowe (2)

Definicja Ilorazami różnicowymi drugiego rzędu nazywamy wyrażenia

$$
\begin{aligned}
f[x_0; x_1; x_2] &= \frac{f[x_1; x_2] - f[x_0; x_1]}{x_2 - x_0} \\
&\vdots \\
f[x_{n-2}; x_{n-1}; x_n] &= \frac{f[x_{n-1}; x_n] - f[x_{n-2}; x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}}
\end{aligned}
$$

Ilorazy różnicowe (3)

Definicja Ilorazem różnicowym rzędu n nazywamy

$$
f[x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}; \ldots; x_{i+n}] - f[x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}
$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $i = 0, 1, 2, \ldots$

Ilorazy różnicowe (4)

x_i	$f(x_i)$	Ilorazy różnicowe			
		rzędu 1	rzędu 2	rzędu 3	rzędu 4
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0; x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0; x_1; x_2]$		
		$f[x_1; x_2]$		$f[x_0; x_1; x_2; x_3]$	
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1; x_2; x_3]$		$f[x_0; x_1; x_2; x_3; x_4]$
		$f[x_2; x_3]$		$f[x_1; x_2; x_3; x_4]$	
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2; x_3; x_4]$		
		$f[x_3; x_4]$			
x_4	$f(x_4)$				

Wzór Newtona (1)

Twierdzenie 7

$$W_n(x) = \\ f(x_0) + f[x_0; x_1]\omega_0(x) + \ldots + f[x_0; \ldots; x_n]\omega_{n-1}(x),$$

przy czym $\omega_i(x) = (x - x_0)\ldots(x - x_i)$.

Wzór Newtona (2)

Dowód Dla $n = 0$ mamy

$$W_0(x) \equiv f(x_0),$$

zatem twierdzenie jest prawdziwe. Załóżmy teraz, że jest ono prawdziwe dla pewnego $k - 1 > 0$. Aby pokazać prawdziwość dla k zauważmy najpierw, że różnica $W_k(x) - W_{k-1}(x)$ jest wielomianem, który można przedstawić w postaci

$$W_k(x) - W_{k-1}(x) = A(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1}),$$

gdzie A jest najwyższym współczynnikiem (czyli współczynnikiem przy najwyższej potędze x) wielomianu $W_k(x)$.

Wzór Newtona (3)

Dowód (ciąg dalszy)
Według założenia indukcyjnego, najwyższymi współczynnikami wielomianów $W_{0,1,\ldots,k-1}$ oraz $W_{1,\ldots,k}$ są odpowiednio $f[x_0,\ldots,x_{k-1}]$ i $f[x_1,\ldots,x_k]$. Ze wzoru Neville'a wynika

$$W_k(x) = \frac{(x - x_0)W_{1,\ldots,k}(x) - (x - x_k)W_{0,\ldots,k-1}(x)}{x_k - x_0},$$

zatem

$$A = \frac{f[x_1,\ldots,x_k] - f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k - x_0} = f[x_0,\ldots,x_k].$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie jest więc udowodnione. ∎

Wzór Newtona (4)

Przykład Szukamy wielomianu interpolacyjnego dla funkcji określonej tablicą wartości:

x_i	0	2	3	4	6
y_i	1	3	2	5	7

Tworzymy tablicę ilorazów różnicowych dla tej funkcji:

Wzór Newtona (5)

Przykład (ciąg dalszy)

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i; x_{i+1}]$	$f[x_i; x_{i+1}; x_{i+2}]$	$f[x_i; \ldots; x_{i+3}]$	$f[x_i; \ldots; x_{i+4}]$
0	1				
		1			
2	3		$-\frac{2}{3}$		
		-1		$\frac{2}{3}$	
3	2		2		$-\frac{2}{9}$
		3		$-\frac{2}{3}$	
4	5		$-\frac{2}{3}$		
		1			
6	7				

Wzór Newtona (6)

Przykład (ciąg dalszy)

$$
\begin{aligned}
W_4(x) &= 1 + 1(x-0) - \frac{2}{3}(x-0)(x-2) \\
&\quad + \frac{2}{3}(x-0)(x-2)(x-3) \\
&\quad - \frac{2}{9}(x-0)(x-2)(x-3)(x-4) \\
&= -\frac{2}{9}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{88}{9}x^2 + \frac{35}{3}x + 1.
\end{aligned}
$$

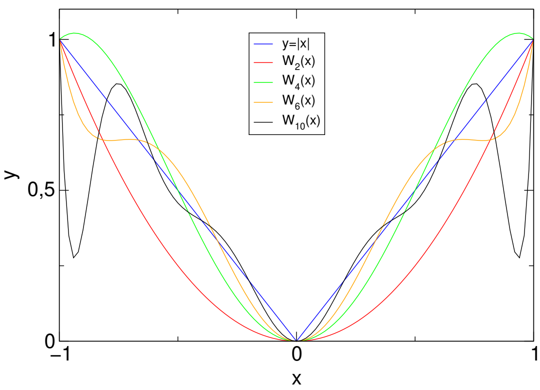
Zbieżność procesów interpolacyjnych (1)

Definicja Mówimy, że metoda interpolacyjna jest zbieżna do funkcji $f(x)$ w punkcie $\tilde{x}$, gdy

$$\lim_{n\to\infty} f_n^*(\tilde{x}) = f(x_0),$$

gdzie f_n^* to funkcja interpolująca (niekoniecznie wielomian).

Zbieżność procesów interpolacyjnych (2)



Interpolacja wymierna (1)

Mamy $(n+1)$ punktów węzłowych

$$(x_i, y_i = f(x_i)), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Wartość funkcji $f(x)$ przybliżamy funkcją wymierną

$$\phi^{\mu,\nu}(x) \equiv \frac{P^\mu(x)}{Q^\nu(x)} = \frac{a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_\mu x^\mu}{b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_\nu x^\nu},$$

spełniającą warunek

$$\phi^{\mu,\nu}(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Interpolacja wymierna (2)

Uwaga, pułapka!
Z

$$\phi^{\mu,\nu}(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

można wnioskować, że

$$P^\mu(x_i) - y_i Q^\nu(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, \mu + \nu.$$

określa współczynniki a_i, b_i.

Interpolacja wymierna (3)

Przykład Niech $\mu = \nu = 1$ oraz

x_i	0	1	2
y_i	1	2	2

$$\begin{aligned} a_0 - b_0 &= 0, \\ a_0 + a_1 - 2 * (b_0 + b_1) &= 0, \\ a_0 + 2a_1 - 2 * (b_0 + 2b_1) &= 0. \end{aligned}$$

Zakładając, że b_1 jest parametrem, oraz że $b_1 = 1$, otrzymamy

$$b_0 = 0, a_0 = 0, \ a_1 = 2,$$

Interpolacja wymierna (4)

Przykład (ciąg dalszy)

czyli

$$\phi^{1,1}(x) = \frac{2x}{x}.$$

Dla $x = 0$ mamy ∞/∞, a po uproszczeniu otrzymujemy

$$\bar{\phi}^{1,1} \equiv 2.$$

A zatem funkcja $\phi^{1,1}(x)$ nie rozwiązuje zadania interpolacji.

Odwrotności różnic ilorazowych (1)

Definicja Odwrotnościami ilorazów różnicowych nazywamy wielkości

$$\begin{aligned}
\varphi[x_i;x_j] &= \frac{x_i-x_j}{y_i-y_j}\\
\varphi[x_i;x_j;x_k] &= \frac{x_j-x_k}{\varphi[x_i;x_j]-\varphi[x_i;x_k]}\\
\varphi[x_i;\ldots;x_l;x_m;x_n] &= \frac{x_m-x_n}{\varphi[x_i;\ldots;x_l;x_m]-\varphi[x_i;\ldots;x_l;x_n]},
\end{aligned}$$

przy czym niektóre z nich mogą być nieskończone ze względu na zerowanie się mianowników.

Odwrotności różnic ilorazowych (2)

Spełniona jest następująca własność:

$$\begin{aligned}
\frac{P^n(x)}{Q^n(x)} &= y_0+\frac{P^n(x)}{Q^n(x)}-y_0=y_0+\frac{P^n(x)}{Q^n(x)}-\frac{P^n(x_0)}{Q^n(x_0)}\\
&= y_0+(x-x_0)\frac{P^{n-1}(x)}{Q^n(x)}=y_0+\frac{x_i-x_0}{\frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)}}
\end{aligned}$$

Stąd wynika

$$\frac{Q^n(x_i)}{P^{n-1}(x_i)}=\frac{x_i-x_0}{y_i-y_0}=\varphi[x_o;x_i],\quad i=1,2,\ldots,2n,$$

Odwrotności różnic ilorazowych (3)

a zatem

$$\begin{aligned}
\frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)} &= \varphi[x_0;x_1]+\frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)}-\frac{Q^n(x_1)}{P^{n-1}(x_1)}\\
&= \varphi[x_0;x_1]+(x-x_1)\frac{Q^{n-1}(x)}{P^{n-1}(x)}\\
&= \varphi[x_0;x_1]+\frac{x-x_1}{\frac{P^{n-1}(x)}{Q^{n-1}(x)}},
\end{aligned}$$

co prowadzi do

$$\frac{P^{n-1}(x_i)}{Q^{n-1}(x_i)}=\varphi[x_0;x_1;x_i],\quad i=2,3,\ldots,2n.$$

Odwrotności różnic ilorazowych (4)

Ostatecznie, dla naszego wyrażenia wymiernego otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\phi^{n,n}(x) &= \frac{P^n(x)}{Q^n(x)}=y_0+\frac{x-x_0}{\frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)}}\\
&= y_0+\frac{x-x_0}{\varphi[x_0;x_1]+\frac{x-x_1}{\frac{P^{n-1}(x)}{Q^{n-1}(x)}}}\\
&= \cdots
\end{aligned}$$

Odwrotności różnic ilorazowych (5)

$\phi^{n,n}(x)$ można więc przedstawić w postaci następującego ułamka łańcuchowego:

$$\begin{aligned}
\phi^{n,n}(x) &= y_0+\underline{x-x_0}/\overline{\varphi[x_0;x_1]}+\underline{x-x_1}/\overline{\varphi[x_0;x_1;x_2]}\\
&\quad +\underline{x-x_2}/\overline{\varphi[x_0;x_1;x_2;x_3]}+\cdots\\
&\quad +\underline{x-x_{2n-1}}/\overline{\varphi[x_0;x_1;\ldots;x_{2n}]}
\end{aligned}$$

Przykład Mamy daną tabelę odwrotności ilorazów różnicowych:

x_i	y_i	$\varphi[x_0; x_i]$	$\varphi[x_0; x_1; x_i]$	$\varphi[x_0; x_1; x_2; x_i]$
0	0			
1	-1	-1		
2	$-\frac{2}{3}$	-3	$-\frac{1}{2}$	
3	9	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\phi^{2,1}(x) &= 0 + \underline{x}/\overline{-1} + \underline{x-1}/\overline{-\frac{1}{2}} + \underline{x-2}/\overline{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{x}{-1 + \frac{x-1}{-\frac{1}{2} + \frac{x-2}{\frac{1}{2}}}} = \frac{4x^2 - 9x}{-2x + 7}.
\end{aligned}$$