Interpolacja, część I

Janusz Szwabiński

16 października 2002

Interpolacja, część II

1. Interpolacja trygonometryczna
2. Interpolacja za pomocą funkcji sklejanych
   - Interpolacja przedziałami liniowa
   - Określenie funkcji sklejanych
   - Funkcje sklejane trzeciego stopnia

Interpolacja trygonometryczna (1)

Definicja Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy okresową z okresem $h > 0$, jeśli

$$f(x+h) = f(x)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ funkcja f jest określona jednoznacznie przez jej wartości dla $x \in <0, h)$,
$\Rightarrow$ funkcja $\tilde{f} := f\left(\frac{hx}{2\pi}\right)$ ma okres 2π.

Interpolacja trygonometryczna (2)

Definicja (Rzeczywistymi) Wielomianami trygonometrycznymi stopnia co najwyżej n nazywamy elementy zbioru

$$T_n^{\mathbb{R}} := \{T(x) : \quad T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}\}.$$

$T_n^{\mathbb{R}}$ jest $(2n+1)$ wymiarową przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$.

Interpolacja trygonometryczna (3)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \sin x = -\frac{i}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{cases}$$

Stąd wynika

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ &= e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n} c_k e^{ikx} = e^{-inx}P(x) \end{aligned}$$

Interpolacja trygonometryczna (4)

$$\begin{aligned} c_{n-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad 1 \le k \le n \\ c_{n+k} &= \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad 1 \le k \le n \\ c_n &= \frac{a_0}{2} \end{aligned}$$

Interpolacja trygonometryczna (5)

Definicja Elementy zbioru

$$P_{n-1}^{\mathbb{C}} := \{P(x): \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikx}, \quad c_k \in \mathbb{C}\}$$

nazywamy (zespolonymi) wielomianami trygonometrycznymi stopnia co najwyżej $(n-1)$.

Interpolacja trygonometryczna (6)

Twierdzenie 1 *Dla dowolnych liczb zespolonych $y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, oraz parami różnych $x_k \in [0, 2\pi)$ istnieje dokładnie jeden wielomian trygonometryczny*

$$P(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} + \ldots + c_{n-1} e^{(n-1)ix}$$

taki, że

$$P(x_k) = y_k$$

dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Interpolacja trygonometryczna (7)

Dowód Niech

$$\begin{aligned} \omega &= e^{ix}, \\ \omega_k &= e^{ix_k} \quad (\Rightarrow \ \omega_j \neq \omega_k \text{ dla } j \neq k,\ 0 \le j, k \le n-1), \\ P(\omega) &= c_0 + c_1\omega + \ldots c_{n-1}\omega^{n-1}. \end{aligned}$$

Wówczas zagadnienie interpolacji trygonometrycznej jest równoważne ze znalezieniem wielomianu stopnia $\le (n-1)$ takiego, że

$$P(\omega_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności interpolacji wielomianowej wynika, że istnieje jeden taki wielomian, co kończy dowód. ∎

Interpolacja trygonometryczna - węzły równoodległe (1)

Niech

$$\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad x_k = \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Twierdzenie 2 *Dla danych punktów węzłowych* (x_k, y_k), $k = 0, \dots, n-1$, *współczynniki wielomianu trygonometrycznego*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikx}, \quad x \in [0, 2\pi)$$

mają postać

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} y_l \zeta_n^{-kl}, \quad l = 0, \dots, n-1.$$

Interpolacja trygonometryczna - węzły równooglegle (2)

Dowód Ponieważ zagadnienie interpolacji trygonometrycznej jest jednoznacznie rozwiązywalne, wystarczy pokazać, że powyższy wielomian rzeczywiście interpoluje dane. Mamy:

$$\begin{aligned} P(x_m) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} y_l \zeta_n^{-kl} e^{ikx_m} \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} y_l \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{k(m-l)} \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} y_l \delta_{ml} = y_m \end{aligned}$$

dla $m = 0, \dots, n-1$. ∎

Interpolacja trygonometryczna - węzły równooglegle (3)

Wnioski:

$\Rightarrow$ $O(n)$ operacji potrzebnych do wyliczenia c_k

$\Rightarrow$ $O(n^2)$ operacji potrzebnych do wyznaczenia wielomianu trygonometrycznego

---

Interpolacja przedziałami liniowa (1)

$(x_i, y_i = f(x_i))$, $i = 0, 1, \dots, n$ - punkty węzłowe

W przedziale $[x_j, x_{j+1}]$, $0 \le j \le n-1$ przybliżamy $f(x)$ funkcją liniową:

$$f(x) = y_j + \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j}(y_{j+1} - y_j) + \Delta f(x)$$

gdzie

$$\Delta f(x) = \frac{\gamma}{2}(x - x_j)(x - x_{j+1})$$

Interpolacja przedziałami liniowa (2)

Jeśli np. $f(x)$ jest funkcją gładką w $[x_j, x_{j+1}]$, to

$$\gamma = f''(a), \quad a \in [x_j, x_{j+1}].$$

Zachodzi

$$|\Delta f(x)| \le \frac{\gamma_1}{8}(x_{j+1} - x_j)^2$$

gdzie

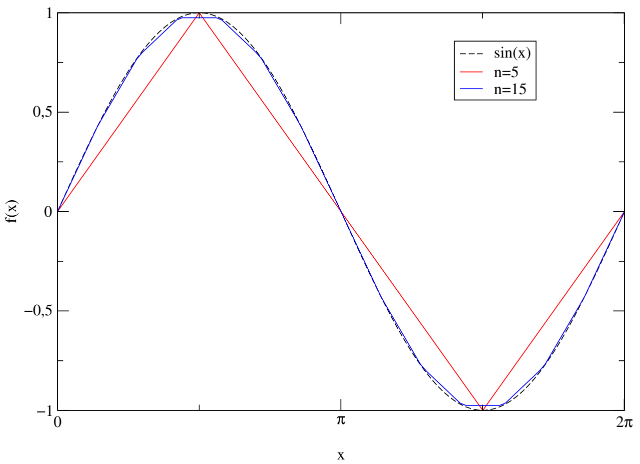
$$\gamma_1 = \max_{x \in [x_j, x_{j+1}]} |f''(x)|$$

⇒ dokładność interpolacji liniowej można zwiększyć, zmniejszając długość przedziału $h = x_{j+1} - x_j$ (czyli zwiększając liczbę węzłów)

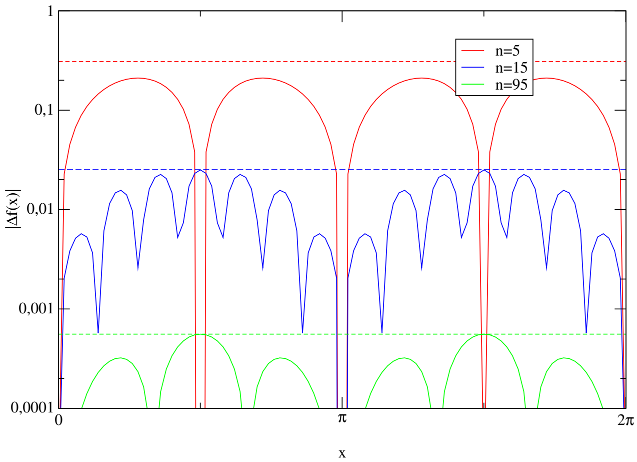
Interpolacja przedziałami liniowa (3)

```
      SUBROUTINE Linint(XX,fxx,N,X,fx)
      implicit double precision (a-h,o-z)
      DIMENSION XX(1),fxx(1)
      JL=0
      JU=N+1
10    IF(JU-JL.GT.1)THEN
        JM=(JU+JL)/2
        IF((XX(N).GT.XX(1)).EQV.(X.GT.XX(JM)))THEN
          JL=JM
        ELSE
          JU=JM
        ENDIF
      GO TO 10
      ENDIF
      J=JL
      dx=xx(j+1)-xx(j)
      df=fxx(j+1)-fxx(j)
      fx=df/dx*(x-xx(j))+fxx(j)
      RETURN
      END
```

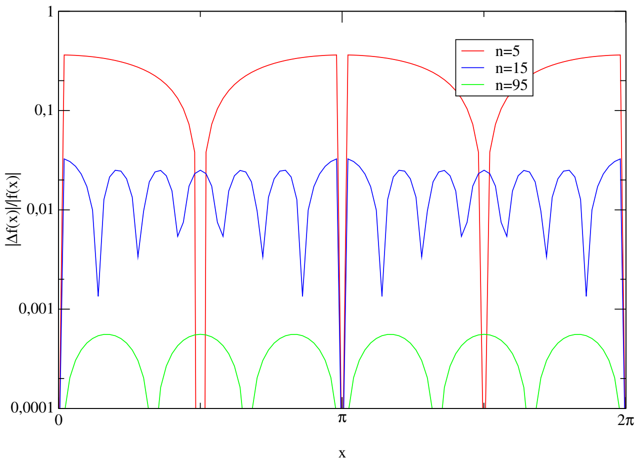
Interpolacja przedziałami liniowa (4)



Interpolacja przedziałami liniowa (5)



Interpolacja przedziałami liniowa (6)



Funkcje sklejane (1)

$x_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$ - punkty węzłowe w przedziale $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Δ_n - podział przedziału $[a, b]$

Definicja Funkcję $S(x) = S(x, \Delta_n)$ określoną na przedziale $[a, b]$ nazywamy funkcją sklejaną stopnia m ($m \geq 1$), jeżeli

(a) $S(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej m na każdym podprzedziale (x_j, x_{j+1}), $j = 0, 1, \ldots, n-1$,

(b) $S(x) \in C^{m-1}([a, b])$.

Punkty x_i nazywamy przy tym węzłami funkcji sklejanej.

Funkcje sklejane (2)

$S_m(\Delta_n)$ - zbiór wszystkich funkcji sklejanych stopnia m

$S(x) \in S_m(\Delta_n)$

$\Rightarrow\ S(x) = c_{i0} + c_{i1}x + \ldots + c_{im}x^m, \quad x \in (x_i, x_{i+1})$

$\Rightarrow\ n(m+1)$ dowolnych stałych c_{ij}

Żądanie ciągłości pochodnych rzędu $0, \ldots, m-1$ w każdym węźle wewnętrznym x_i, $i = 1, \ldots, n-1$

$\Rightarrow\ (n-1)m$ warunków na stałe c_{ij}

$\Rightarrow\ S(x)$ zależy od $n(m+1) - m(n-1) = n + m$ parametrów

---

Funkcje sklejane trzeciego stopnia (1)

Niech $f(x) \in C([a, b])$:

Definicja Funkcję $S(x) \in S_3(\Delta_n)$ nazywamy interpolacyjną funkcją sklejaną stopnia trzeciego dla funkcji $f(x)$, jeżeli

$$S(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad n \geq 2$$

$S(x)$ stopnia trzeciego zależy od $(n+3)$ parametrów

$\Rightarrow$ potrzebujemy dodatkowych warunków na $S(x)$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia (2)

Najczęściej zakłada się

$$S'(a+0) = \alpha_1, \quad S'(b-0) = \beta_1$$

lub

$$S''(a+0) = \alpha_2, \quad S''(b-0) = \beta_2$$

gdzie α_1, β_1, α_2 i β_2 - ustalone liczby rzeczywiste

Jeżeli $f(x)$ jest funkcją okresową o okresie $(b-a)$, wówczas:

$$S^{(i)}(a+0) = S^{(i)}(b-0), \quad i = 1, 2$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia (3)

Pytania:

- czy zagadnienie interpolacji za pomocą funkcji sklejanych stopnia trzeciego z jednym z dodatkowych warunków jest rozwiązywalne?
- czy rozwiązanie jest jednoznaczne?
- jaki jest błąd interpolacji na przedziale $[a, b]$?

Funkcje sklejane trzeciego stopnia (4)

Niech

$M_j = S''(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$
$h_j = x_j - x_{j-1}$

$S''(x)$ jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$ i liniową na każdym podprzedziale $[x_{j-1}, x_j]$

$$\Rightarrow \quad S''(x) = M_{j-1}\frac{x_j - x}{h_j} + M_j\frac{x - x_{j-1}}{h_j}, \quad x \in [x_{j-1}, x_j]$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia (5)

Całkując stronami otrzymujemy ($x \in [x_{j-1}, x_j]$):

$$\begin{aligned} S'(x) &= -M_{j-1}\frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + M_j\frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + A_j \\ S(x) &= M_{j-1}\frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j\frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + A_j(x - x_{j-1}) + B_j \end{aligned}$$

gdzie A_j i B_j - pewne stałe. Z warunku interpolacji wynika:

$$\begin{aligned} B_j &= y_{j-1} - M_j\frac{h_j^2}{6} \\ A_j &= \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(M_j - M_{j-1}) \end{aligned}$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia (6)

$S'(x)$ ma być funkcją ciągłą na $[a, b]$:

$$S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0), \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Otrzymujemy układ $(n-1)$ równań ($j = 1, \ldots, n-1$)

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$
$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \\ \mu_j &= 1 - \lambda_j, \\ d_j &= \frac{6}{h_j + h_{j+1}}\left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}\right) \\ &= 6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]. \end{aligned}$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia (7)

Dodatkowy warunek dla pierszych pochodnych

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 2M_0 + M_1 &= d_0 \\ M_{n-1} + 2M_n &= d_n \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \alpha_1\right), \\ d_n &= \frac{6}{h_n}\left(\beta_1 - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right) \end{aligned}$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia (8)

Stąd

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia (9)

Twierdzenie 3 *Macierz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

jest nieosobliwa dla każdego podziału Δ_n *przedziału* $[a, b]$.

Funkcje sklejane trzeciego stopnia (10)

Dowód Pokażemy najpierw, że dla każdej pary wektorów $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$Ax = y \quad \Rightarrow \quad \max_i |x_i| \le \max_i |y_i|.$$

Niech $|x_r| = \max_i |x_i|$. Ponieważ $Ax = y$, więc

$$\mu_r x_{r-1} + 2x_r + \lambda_r x_{r+1} = y_r.$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia (11)

Dowód (ciąg dalszy)

Z definicji r oraz z tego, że $\mu_r + \lambda_r \le 1$ wynika

$$\begin{aligned} \max_i |y_i| &\ge |y_r| \ge 2|x_r| - \mu_r |x_{r-1}| - \lambda_r |x_{r+1}| \\ &\ge 2|x_r| - \mu_r |x_r| - \lambda_r |x_r| \\ &= (2 - \mu_r - \lambda_r)|x_r| \\ &\ge |x_r| = \max_i |x_i|. \end{aligned}$$

Jeśli macierz byłaby osobliwa, to istniałoby rozwiązanie $x \ne 0$ układu $Ax = 0$. Ale wówczas musiałoby być

$$0 < \max_i |x_i| \le 0$$

co prowadzi do sprzeczności. ∎

Funkcje sklejane trzeciego stopnia (12)

Definicja Średnicą $||\Delta_m||$ podziału Δ_m nazywamy liczbę

$$||\Delta_m|| = \max_i (x_{i+1} - x_i).$$

Twierdzenie 4 *Niech $f \in C^4([a,b])$, $|f^{(4)}(x)| \le L$ dla $x \in [a,b]$. Niech $\Delta_m = \{a = x_0^{(m)} < x_1^{(m)} < \ldots < x_{n_m}^{(m)} = b\}$ będzie ciągiem podziałów przedziału $[a,b]$ takim, że*

$$\sup_{m,j} \frac{||\Delta_m||}{x_{j+1}^{(m)} - x_j^{(m)}} \le K < +\infty.$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia (13)

Twierdzenie *(ciąg dalszy)*
Istnieją wtedy stałe C_i (≤ 2) niezależne od Δ_m takie, że dla $x \in [a,b]$ zachodzi

$$|f^{(i)}(x) - S^{(i)}(x, \Delta_m)| \le C_i L K ||\Delta_m||^{4-i}$$

dla $i = 0, 1, 2, 3$.

Funkcje sklejane Lagrange'a stopnia trzeciego

$\lambda_0(x)$	-	wielomian interpolujący dla funkcji $f(x)$
		z węzłami x_0, x_1, x_2, x_3
$\lambda_n(x)$	-	z węzłami $x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$

Definicja Funkcję $S_L(x) \in S_3(\Delta_n)$ spełniającą dodatkowe warunki

$$\begin{aligned} S_L'(a+0) &= \alpha_1 = \lambda_0'(a), \\ S_L'(b-0) &= \beta_1 = \lambda_n'(b) \end{aligned}$$

nazywamy funkcją sklejaną Lagrange'a stopnia trzeciego.

Interpolacja przy równoodległych węzłach (1)

Niech

$$x_i = x_0 + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Dodatkowo

$$\begin{array}{lll} x_{-3} = x_0 - 3h & x_{-2} = x_0 - 2h & x_{-1} = x_0 - h \\ x_{n+1} = x_n + h & x_{n+2} = x_n + 2h & x_{n+3} = x_n + 3h \end{array}$$

Interpolacja przy równoodległych węzłach (2)

Definicja

$$\phi_i^3(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & \text{dla} \quad x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) & \\ +3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 & \text{dla} \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) & \\ +3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 & \text{dla} \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+2} - x)^3 & \text{dla} \quad x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Interpolacja przy równoodległych węzłach (3)

Twierdzenie 5 *Funkcje $\overline{\phi}_i(x)$, $i = -1, \ldots, n+1$ określone na przedziale $[a,b]$ w następujący sposób:*

$$\overline{\phi}_i(x) = \phi_i^3(x), \quad a \le x \le b,$$

stanowią bazę funkcji sklejanych trzeciego stopnia $S_3(\Delta_n)$.

$\Rightarrow$ każdą funkcję $S(x) \in S_3(\Delta_n)$ można przedstawić w postaci

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \phi_i^3(x), \quad a \leq x \leq b,$$

gdzie c_i są liczbami rzeczywistymi

Interpolacja przy równoodległych węzłach (4)

Z warunku interpolacji otrzymujemy

$$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Założenie dodatkowe

$$S'(a+0) = \alpha_1, \quad S'(b-0) = \beta_1$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} -c_{-1} + c_1 &= \frac{h}{3}\alpha_1 \\ -c_{n-1} + c_{n+1} &= \frac{h}{3}\beta_1 \end{aligned}$$

Interpolacja przy równoodległych węzłach (5)

Stąd

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 + \frac{h}{3}\alpha_1 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n - \frac{h}{3}\beta_1 \end{pmatrix}$$

Uwaga praktyczna:

- obliczając $S(x)$ w dowolnym punkcie $x \in [a, b]$ wystarczy obliczyć wartości co najwyżej czterech funkcji $\phi^3(x)$
