Metody numeryczne

Interpolacja, część I

Janusz Szwabiński

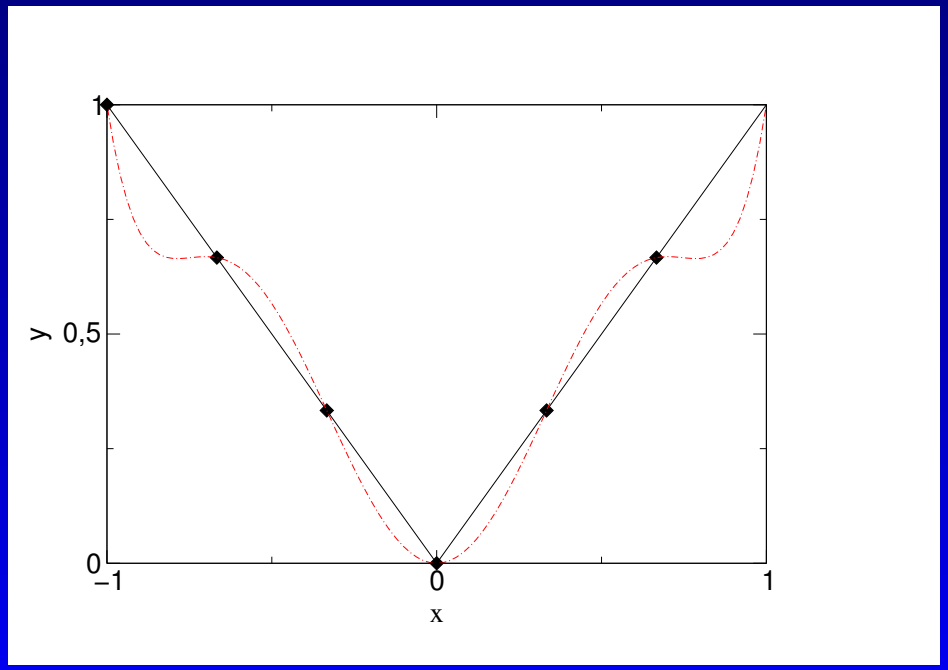
szwabin@ift.uni.wroc.pl

Interpolacja, część I

1. Zagadnienie interpolacyjne
2. Interpolacja wielomianowa
3. Interpolacja wymierna

Zagadnienie interpolacyjne

x_i	-	węzły interpolacji
$y_i \equiv f(x_i)$	-	wartości funkcji interpolowanej
$F(x)$	-	funkcja interpolująca
$F(x_i) = y_i$		$i = 0, 1, \ldots, n$



Interpolacja wielomianowa

$$\Pi_n \quad - \quad \text{zbiór wielomianów stopnia} \leq n$$

Twierdzenie Dla dowolnych $n+1$ punktów węzłowych

$$(x_i, y_i), \;\; i = 0, 1, \ldots, n, \;\; x_i \neq x_k \text{ dla } i \neq k$$

istnieje dokładnie jeden wielomian $W_n \in \Pi_n$ taki, że

$$W_n(x_i) = y_i, \;\; i = 0, 1, \ldots, n.$$

$\Rightarrow$ interpolacja wielomianowa jest zagadnieniem jednoznacznym

Dowód Mamy $n+1$ punktów węzłowych (x_i, y_i). Szukamy wielomianu interpolującego w postaci

$$W_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \quad W_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n$$

Stąd

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + \quad & \ldots \quad + a_n x_0^n = y_0 \\ & \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \quad & \ldots \quad + a_n x_n^n = y_n \end{aligned}$$

Macierz układu (niewiadomymi są współczynniki a_i!)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\det A$ jest wyznacznikiem Vandermonde'a

$\Rightarrow$ $\det A \neq 0$ (bo $x_i \neq x_k$ dla $i \neq k$)

$\Rightarrow$ układ równań jest układem Cramera

$\Rightarrow$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie

$$a_i = \frac{\det A_i}{\det A} = \frac{1}{\det A} \sum_{j=0}^{n} y_j A_{ij}$$

gdzie A_{ij} są kolejnymi dopełnieniami algebraicznymi elementów i–tej kolumny macierzy A $\blacksquare$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

$$\left.\begin{array}{l} W_n(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n \\ a_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=0}^{n} y_j A_{ij} \end{array}\right\} W_n(x) = y_0\Phi_0(x) + \ldots + y_n\Phi_n(x)$$

$$\Phi_i(x) \quad \text{-} \quad \text{wielomiany stopnia} \leq n$$

Ponieważ

$$W_n(x_i) = y_0\Phi_0(x_i) + y_1\Phi_1(x_i) + \ldots + y_n\Phi_n(x_i) \equiv y_i$$

$$\Rightarrow \Phi_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j \\ 1, & \text{gdy } i = j \end{cases}$$

$$\Phi_i(x) = \lambda(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)$$

Z warunku $\Phi_i(x_i) = 1$ otrzymujemy

$$\Phi_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\left.\frac{\omega_n(x)}{x - x_j}\right|_{x=x_j}} = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\omega_n'(x_j)}$$

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

Tw. o jednoznaczności $\Rightarrow$ wielomian Lagrange'a jest jedynym wielomianem interpolacyjnym stopnia $\leq n$

Przykład Szukamy wielomianu interpolacyjnego, który przechodzi przez następujące punkty węzłowe:

x_i	-2	1	2	4
y_i	3	1	-3	8

$$
\begin{aligned}
W_3(x) &= \frac{3(x-1)(x-2)(x-4)}{(-2-1)(-2-2)(-2-4)} + \frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{(1+2)(1-2)(1-4)} \\
&\quad \frac{-3(x+2)(x-1)(x-4)}{(2+2)(2-1)(2-4)} + \frac{8(x+2)(x-1)(x-4)}{(4+2)(4-1)(4-2)} \\
&= \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{25}{6}x + 6
\end{aligned}
$$

```
FUNCTION LAGRANGE(x,xa,ya) RESULT (wnx)
    implicit  none
    double precision,dimension(:) :: xa,ya
    double precision              :: x,wnx,om,w
    integer :: i,j

    wnx=0.0 ; om=1.0
    do i=1,size(xa)
      om=om*(x-xa(i))
      w=1.0
      do j=1, size(xa)
        if(i .ne. j) w=w*(xa(i)-xa(j))
      end do
      wnx=wnx+ya(i)/(w*(x-xa(i)))
    end do
    wnx=wnx*om
END FUNCTION
```

Metoda Aitkena

$W_{i,j}(x)$ - wielomian stopnia pierwszego przechodzący przez (x_i, y_i), (x_j, y_j)

$W_{i,j,k}(x)$ - wielomian stopnia drugiego przechodzący przez (x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)

$W_{0,1,\ldots,k,m}(x)$ - wielomian stopnia m przechodzący przez (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, k, m$

$$W_{i,j}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_j & x_j - x \end{vmatrix}}{x_j - x_i} = \frac{y_i(x_j - x) - y_j(x_i - x)}{x_j - x_i}$$

$$W_{i,j,k}(x) = \frac{\begin{vmatrix} W_{i,j}(x) & x_j - x \\ W_{i,k}(x) & x_k - x \end{vmatrix}}{x_k - x_j}$$

$$W_{0,1,\ldots,k,m} = \frac{\begin{vmatrix} W_{0,1,\ldots,k-1,k}(x) & x_k - x \\ W_{0,1,\ldots,k-1,m}(x) & x_m - x \end{vmatrix}}{x_m - x_k}$$

Schemat Aitkena:

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_0 & y_0 & & & & & & \\
x_1 & y_1 & W_{0,1} & & & & & \\
x_2 & y_2 & W_{0,2} & W_{0,1,2} & & & & \\
x_3 & y_3 & W_{0,3} & W_{0,1,3} & W_{0,1,2,3} & & & \\
x_4 & y_4 & W_{0,4} & W_{0,1,4} & W_{0,1,2,4} & W_{0,1,2,3,4} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
x_n & y_n & W_{0,n} & W_{0,1,n} & W_{0,1,2,n} & W_{0,1,2,3,n} & \cdots & W_{0,1,\ldots,n}
\end{array}
$$

Przykład Szukamy $W_{0,1,2}(2)$, jeśli:

x_i	0	1	3
y_i	1	3	2

Schemat Aitkena dla tego zadania ma postać:

$$
\begin{array}{lll}
0 & 1 & \\
1 & 3 & W_{0,1}(2) = \frac{1*(1-2)-3*(0-2)}{1-0} = 5 \\
3 & 2 & W_{0,2}(2) = \frac{1*(3-2)-2*(0-2)}{3-0} = \frac{5}{3} \quad W_{0,1,2}(2) = \frac{10}{3}
\end{array}
$$

Metoda Neville'a

$W_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(x)$ - wielomian stopnia k przechodzący przez (x_{i_j}, y_{i_j}), $j = 0, 1, \ldots, k$

Twierdzenie Wielomian $W_{i_0,i_1,\ldots,i_k}$ daje się przedstawić wzorem rekurencyjnym

$$W_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(x) = \frac{(x - x_{i_0})W_{i_1,\ldots,i_k}(x) - (x - x_{i_k})W_{i_0,\ldots,i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

Dowód Niech $P(x)$ będzie prawą stroną powyższego równania. Stopień $P(x)$ jest $\leq k$. Ponadto, zgodnie z definicją wielomianów $W_{i_1,\ldots,i_k}(x)$ i $W_{i_0,\ldots,i_{k-1}}(x)$ mamy

$$\begin{aligned} P(x_{i_0}) &= W_{i_0,\ldots,i_{k-1}}(x_{i_0}) = y_{i_0} \\ P(x_{i_k}) &= W_{i_1,\ldots,i_k}(x_{i_k}) = y_{i_k} \end{aligned}$$

a dla $j = 1, 2, \ldots, k-1$

$$P(x_{i_j}) = \frac{(x_{i_j} - x_{i_0})y_{i_j} - (x_{i_j} - x_{i_k})y_{i_j}}{x_{i_k} - x_{i_0}} = y_{i_j}$$

$P(x)$ ma zatem cechy $W_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(x)$ ∎

Schemat Neville'a:

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & y_0 & & & & \\
 & & W_{0,1}(x) & & & \\
x_1 & y_1 & & W_{0,1,2}(x) & & \\
 & & W_{1,2}(x) & & W_{0,1,2,3}(x) & \\
x_2 & y_2 & & W_{1,2,3}(x) & & \\
 & & W_{2,3}(x) & & & \\
x_3 & y_3 & & & &
\end{array}
$$

Przykład

x_i	0	1	3
y_i	1	3	2

Schemat Neville'a dla $W_{0,1,2}(2)$ ma postać:

0 1

$$W_{0,1}(2) = \frac{(2-0)*3-(2-1)*1}{1-0} = 5$$

1 3

$$W_{0,1,2}(2) = \frac{10}{3}$$

$$W_{1,2}(2) = \frac{(2-1)*2-(2-3)*3}{3-1} = \frac{5}{2}$$

3 2

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego

Niech $f(x)$ będzie funkcją $n+1$ razy różniczkowalną oraz $\epsilon(x) = W_n(x) - f(x)$

Twierdzenie

$$|\epsilon(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)|$$

gdzie

$$M_{n+1} = \sup_{x \in <a,b>} |f^{(n+1)}(x)|$$

Przykład Niech $f(x) = \sin(x)$. Załóżmy, że znamy wartości dokładne naszej funkcji w punktach

$$x_i = \frac{\pi}{10} i, \quad i = 0, 1, \ldots, 5 \quad (n = 5)$$

Wówczas

$$|W_n(x) - \sin(x)| \leq \frac{|\omega_n(x)|}{720}$$

Stąd np. dla $x = \frac{\pi}{4}$ mamy

$$\left|\epsilon\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| \leq 0,000005, \quad \left|r\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|\frac{\epsilon(\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{4})}\right| \leq 0,000007$$

Wzór interpolacyjny Newtona

Metody Aitkena i Neville'a:

- wyznaczanie wartości wielomianu interpolacyjnego w danym punkcie

$\Rightarrow$ niepraktyczne, jeśli punktów jest dużo

Ilorazy różnicowe

Definicja Ilorazami różnicowymi pierwszego rzędu nazywamy wyrażenia

$$
\begin{aligned}
f[x_0; x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\
f[x_1; x_2] &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\
&\vdots \\
f[x_{n-1}; x_n] &= \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}
\end{aligned}
$$

Definicja Ilorazami różnicowymi drugiego rzędu nazywamy wyrażenia

$$
\begin{aligned}
f[x_0; x_1; x_2] &= \frac{f[x_1; x_2] - f[x_0; x_1]}{x_2 - x_0} \\
&\vdots \\
f[x_{n-2}; x_{n-1}; x_n] &= \frac{f[x_{n-1}; x_n] - f[x_{n-2}; x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}}
\end{aligned}
$$

Definicja Ilorazem różnicowym rzędu n nazywamy

$$f[x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}; \ldots; x_{i+n}] - f[x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $i = 0, 1, 2, \ldots$

x_i	$f(x_i)$	Ilorazy różnicowe			
		rzędu 1	rzędu 2	rzędu 3	rzędu 4
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0;x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0;x_1;x_2]$		
		$f[x_1;x_2]$		$f[x_0;x_1;x_2;x_3]$	
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1;x_2;x_3]$		$f[x_0;x_1;x_2;x_3;x_4]$
		$f[x_2;x_3]$		$f[x_1;x_2;x_3;x_4]$	
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2;x_3;x_4]$		
		$f[x_3;x_4]$			
x_4	$f(x_4)$				

Wzór Newtona

Twierdzenie

$$W_n(x) = f(x_0) + f[x_0; x_1]\omega_0(x) + \ldots + f[x_0; \ldots; x_n]\omega_{n-1}(x),$$

przy czym $\omega_i(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_i)$.

Dowód Dla $n = 0$ twierdzenie jest prawdziwe, ponieważ

$$W_0(x) \equiv f(x_0).$$

Załóżmy, że jest ono prawdziwe dla pewnego $k - 1 > 0$. Różnica $W_k(x) - W_{k-1}(x)$ jest wielomianem, który można przedstawić w postaci

$$W_k(x) - W_{k-1}(x) = A(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}),$$

gdzie A jest współczynnikiem przy najwyższej potędze x wielomianu $W_k(x)$.

Według założenia indukcyjnego, najwyższymi współczynnikami wielomianów $W_{0,1,\ldots,k-1}$ oraz $W_{1,\ldots,k}$ są odpowiednio $f[x_0,\ldots,x_{k-1}]$ i $f[x_1,\ldots,x_k]$. Ze wzoru Neville'a wynika

$$W_k(x) = \frac{(x-x_0)W_{1,\ldots,k}(x) - (x-x_k)W_{0,\ldots,k-1}(x)}{x_k - x_0},$$

zatem

$$A = \frac{f[x_1,\ldots,x_k] - f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k - x_0} = f[x_0,\ldots,x_k]. \qquad \blacksquare$$

Przykład Szukamy wielomianu interpolacyjnego dla funkcji określonej tablicą wartości:

x_i	0	2	3	4	6
y_i	1	3	2	5	7

Tablica ilorazów różnicowych:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i; x_{i+1}]$	$f[x_i; x_{i+1}; x_{i+2}]$	$f[x_i; \ldots; x_{i+3}]$	$f[x_i; \ldots; x_{i+4}]$
0	1				
		1			
2	3		$-\frac{2}{3}$		
		-1		$\frac{2}{3}$	
3	2		2		$-\frac{2}{9}$
		3		$-\frac{2}{3}$	
4	5		$-\frac{2}{3}$		
		1			
6	7				

$$
\begin{aligned}
W_4(x) &= 1 + 1(x-0) - \frac{2}{3}(x-0)(x-2) \\
&\quad + \frac{2}{3}(x-0)(x-2)(x-3) \\
&\quad - \frac{2}{9}(x-0)(x-2)(x-3)(x-4) \\
&= -\frac{2}{9}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{88}{9}x^2 + \frac{35}{3}x + 1
\end{aligned}
$$

Implementacja

```
for(i=0; i<=n, i++) W[i]=y[i];
for(i=1; i<=n; i++) {
  for(j=n; j>=i; j--){
      W[j]=(W[j]-W[j-1])/(x[j]-x[j-i]);
  }
}
```

$\Rightarrow$ W zawiera potrzebne ilorazy różnicowe w kolejności

$$W[0] = f(x_0), W[1] = f[x_0, x_1], \ldots,$$
$$W[n] = f[x_0, \ldots, x_n]$$

Sprawdzenie ($n = 2$):

$$i = 1, \quad j = 2, \quad W[2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = f[x_1, x_2]$$
$$j = 1, \quad W[1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$
$$i = 2, \quad j = 2, \quad W[2] = \frac{f[x_1, x_2] - W[1]}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]$$

Współczynniki wielomianu

Chcemy zapisać wielomian interpolacyjny w postaci

$$W_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

Przykład $(n = 2)$:

$$\begin{aligned} W(x) &= f[x_0, x_1, x_2]x^2 \\ &+\{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_2](x_1 + x_2)\}x \\ &+\{f(x_0) - f(x_0, x_1)x_0 + f[x_0, x_1, x_2]x_0 x_1\} \end{aligned}$$

```
for(i=0; i<=n; i++) a[i]=W[i];
for(i=0; i<=n-1; i++)
{
    for(j=n-1; j>=i; j--)
    {
        a[j]=a[j]-x[j-i]*a[j+1];
    }
}
```

Sprawdzenie ($n = 2$):

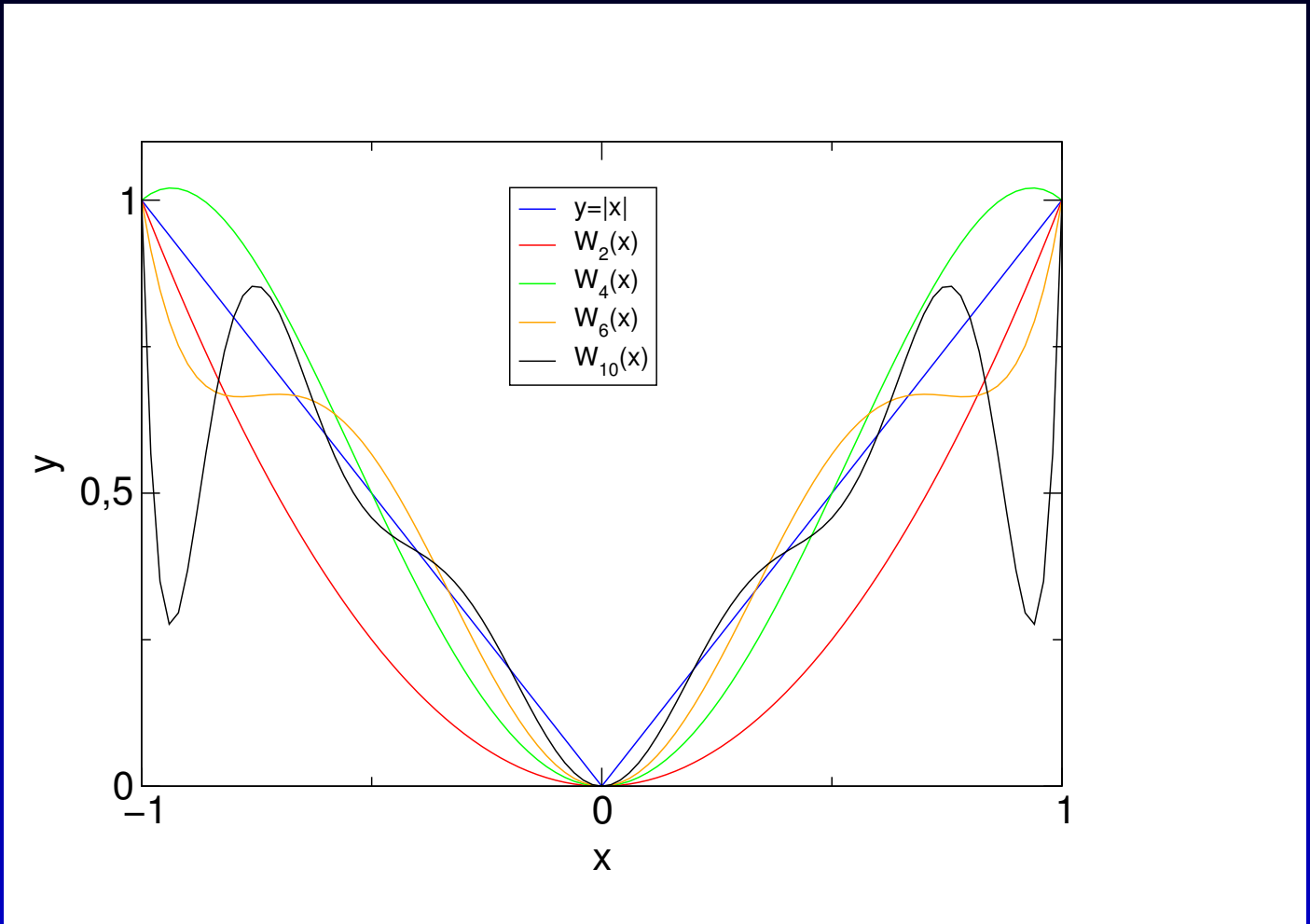
$$
\begin{array}{lll}
i = 0 & j = 1 & a[1] = f[x_0, x_1] - x_1 f[x_0, x_1, x_2] \\
 & j = 0 & a[0] = f(x_0) - x_0\{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_2]\} \\
i = 1 & j = 1 & a[1] = f[x_0, x_1] - (x_0 + x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\
i = 2 & & a[2] = f[x_0, x_1, x_2]
\end{array}
$$

Zbieżność procesów interpolacyjnych

Definicja Mówimy, że metoda interpolacyjna jest zbieżna do funkcji $f(x)$ w punkcie $\tilde{x}$, gdy

$$\lim_{n\to\infty} f_n^*(\tilde{x}) = f(x_0),$$

gdzie f_n^* to funkcja interpolująca (niekoniecznie wielomian)


y=|x|
W2(x)
W4(x)
W6(x)
W10(x)
1
0,5
0
y
−1
0
1
x

Interpolacja wymierna

Mamy $(n+1)$ punktów węzłowych

$$(x_i, y_i = f(x_i)), \;\; i = 0, 1, \ldots, n$$

Wartość funkcji $f(x)$ przybliżamy funkcją wymierną

$$\phi^{\mu,\nu}(x) \equiv \frac{P^{\mu}(x)}{Q^{\nu}(x)} = \frac{a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_\mu x^\mu}{b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_\nu x^\nu}$$

spełniającą warunek

$$\phi^{\mu,\nu}(x_i) = y_i, \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Pułapka!

Na podstawie

$$\phi^{\mu,\nu}(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

można wnioskować, że

$$P^{\mu}(x_i) - y_i Q^{\nu}(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, \mu + \nu$$

określa współczynniki a_i, b_i

Przykład Niech $\mu = \nu = 1$ oraz

x_i	0	1	2
y_i	1	2	2

$$\begin{aligned} a_0 - b_0 &= 0 \\ a_0 + a_1 - 2 * (b_0 + b_1) &= 0 \\ a_0 + 2a_1 - 2 * (b_0 + 2b_1) &= 0 \end{aligned}$$

Zakładając, że $b_1 = 1$, otrzymamy

$$b_0 = 0, a_0 = 0,\ a_1 = 2$$

czyli

$$\phi^{1,1}(x) = \frac{2x}{x}$$

$\Rightarrow$ funkcja $\phi^{1,1}(x)$ nie rozwiązuje zadania interpolacji

Odwrotności ilorazów różnicowych

Definicja Odwrotnościami ilorazów różnicowych nazywamy wielkości

$$\begin{aligned}
\varphi[x_i; x_j] &= \frac{x_i - x_j}{y_i - y_j} \\
\varphi[x_i; x_j; x_k] &= \frac{x_j - x_k}{\varphi[x_i; x_j] - \varphi[x_i; x_k]} \\
\varphi[x_i; \ldots; x_l; x_m; x_n] &= \frac{x_m - x_n}{\varphi[x_i; \ldots; x_l; x_m] - \varphi[x_i; \ldots; x_l; x_n]}
\end{aligned}$$

przy czym niektóre z nich mogą być nieskończone ze względu na zerowanie się mianowników.

Spełniona jest następująca własność:

$$\begin{aligned}\frac{P^n(x)}{Q^n(x)} &= y_0 + \frac{P^n(x)}{Q^n(x)} - y_0 = y_0 + \frac{P^n(x)}{Q^n(x)} - \frac{P^n(x_0)}{Q^n(x_0)} \\ &= y_0 + (x - x_0)\frac{P^{n-1}(x)}{Q^n(x)} = y_0 + \frac{x_i - x_0}{\frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)}}\end{aligned}$$

Stąd wynika

$$\frac{Q^n(x_i)}{P^{n-1}(x_i)} = \frac{x_i - x_0}{y_i - y_0} = \varphi[x_o; x_i], \quad i = 1, 2, \ldots, 2n$$

czyli

$$\begin{aligned}
\frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)} &= \varphi[x_0;x_1] + \frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)} - \frac{Q^n(x_1)}{P^{n-1}(x_1)} \\
&= \varphi[x_0;x_1] + (x-x_1)\frac{Q^{n-1}(x)}{P^{n-1}(x)} \\
&= \varphi[x_0;x_1] + \frac{x-x_1}{\frac{P^{n-1}(x)}{Q^{n-1}(x)}},
\end{aligned}$$

co prowadzi do

$$\frac{P^{n-1}(x_i)}{Q^{n-1}(x_i)} = \varphi[x_0;x_1;x_i], \quad i = 2,3,\ldots,2n$$

Ostatecznie

$$
\begin{aligned}
\phi^{n,n}(x) &= \frac{P^n(x)}{Q^n(x)} = y_0 + \frac{x - x_0}{\frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)}} \\
&= y_0 + \frac{x - x_0}{\varphi[x_0; x_1] + \frac{x - x_1}{\frac{P^{n-1}(x)}{Q^{n-1}(x)}}} \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

$\phi^{n,n}(x)$ można więc przedstawić w postaci następującego ułamka łańcuchowego:

$$\begin{aligned}\phi^{n,n}(x) &= y_0 + \underline{x - x_0}/\overline{\varphi[x_0; x_1]} + \underline{x - x_1}/\overline{\varphi[x_0; x_1; x_2]} \\ &\quad + \underline{x - x_2}/\overline{\varphi[x_0; x_1; x_2; x_3]} + \cdots \\ &\quad + \underline{x - x_{2n-1}}/\overline{\varphi[x_0; x_1; \ldots; x_{2n}]}\end{aligned}$$

Przykład Mamy daną tabelę odwrotności ilorazów różnicowych:

x_i	y_i	$\varphi[x_0;x_i]$	$\varphi[x_0;x_1;x_i]$	$\varphi[x_0;x_1;x_2;x_i]$
0	0			
1	-1	-1		
2	$-\frac{2}{3}$	-3	$-\frac{1}{2}$	
3	9	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\phi^{2,1}(x) &= 0 + \underline{x}/\overline{-1} + \underline{x-1}/\overline{-\frac{1}{2}} + \underline{x-2}/\overline{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{x}{-1+\frac{x-1}{-\frac{1}{2}+\frac{x-2}{\frac{1}{2}}}} = \frac{4x^2-9x}{-2x+7}\end{aligned}$$