Metody numeryczne II

Analiza falkowa, część I

Janusz Szwabiński

szwabin@ift.uni.wroc.pl

Analiza widmowa, część I

1. Transformata Fouriera
2. Okienna transformata Fouriera
3. Transformata falkowa
   - wstęp do analizy wielorozdzielczej
   - rozwinięcie Haara

Literatura uzupełniająca:

Jan T. Białasiewicz, „Falki i aproksymacje"

Transformata Fouriera

Dla dowolnej funkcji $f(t)$ całkowalnej z kwadratem mamy

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t$$

$\Rightarrow$ transformacja Fouriera mierzy częstotliwości sygnałów składowych

Dla innych typów zmiennych i w większej liczbie wymiarów

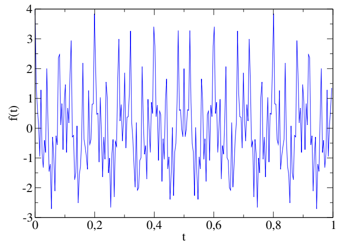
$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int g(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} \mathrm{d}\vec{k} \\ g(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r} \end{aligned}$$

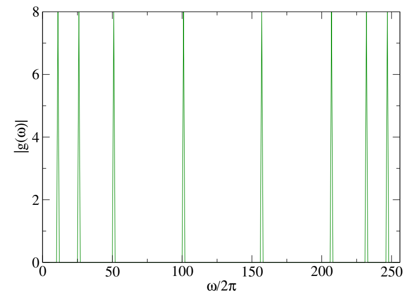
Dyskretna transformata Fouriera

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{i2\pi nk/N} \\ g_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi nk/N} \end{aligned}$$

Przykład

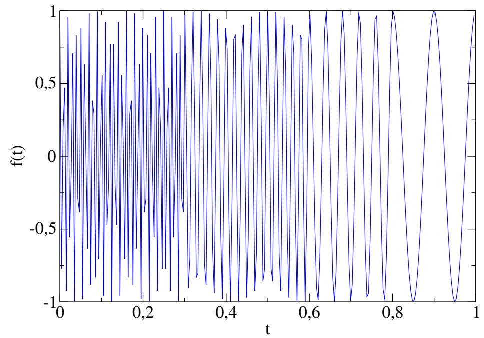
$$f(t) = \cos(2\pi * 10t) + \cos(2\pi * 25t) + \cos(2\pi * 50t) + \cos(2\pi * 100t)$$

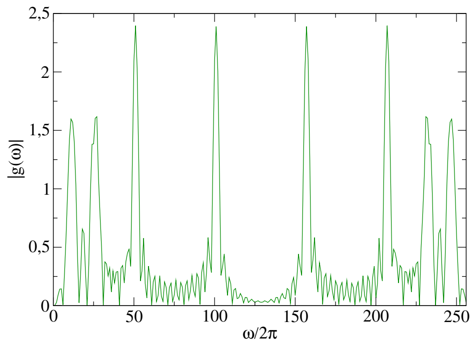




Przykład

$$f(t) = \begin{cases} \cos(2\pi * 100t), & 0 \leq t < 0,3 \\ \cos(2\pi * 50t), & 0,3 \leq t < 0,6 \\ \cos(2\pi * 25t), & 0,6 \leq t < 0,8 \\ \cos(2\pi * 10t), & 0,8 \leq t \leq 1 \end{cases}$$





- daje informację o częstotliwościach składających się na sygnał
- nie mówi nic o tym, w jakim przedziale czasu jaka częstotliwość wystąpiła

⇒ nadaje się bardzo dobrze do analizowania sygnałów stacjonarnych

⇒ przydatność do analizowania sygnałów niestacjonarnych ograniczona

Okienna transformata Fouriera

$$g(\omega,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)w(t-\tau)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

- funkcja trójkątna

$$w(t)=\begin{cases}\mathcal{N}\left(1-\frac{|t|}{\sigma}\right), & |t|<\sigma\\ 0, & \text{dla pozostałych } t\end{cases}$$

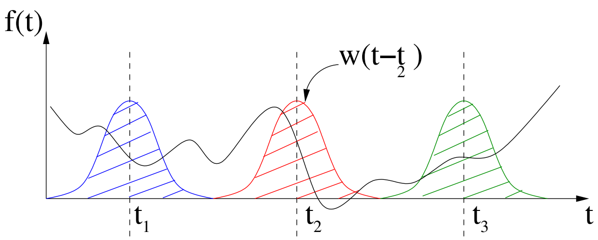
- funkcja gaussowska

$$w(t)=\mathcal{N}e^{-(t/\sigma)^2}$$

⇒ sygnał dzielony jest na wiele małych porcji

⇒ każda porcja traktowana jest tak, jakby była stacjonarna

⇒ dla każdej porcji wyliczana jest inna transformata Fouriera



Zasada nieoznaczoności

⇒ nie można dokładnie określić, jaka składowa istniała w jakiej chwili

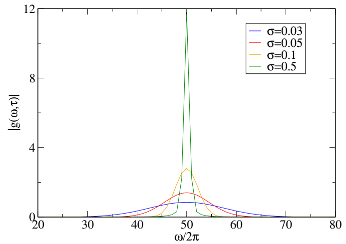
⇒ wyznaczyć możemy pasma częstotliwości istniejące w pewnych przedziałach czasowych

⇒ wąska funkcja okienna - dobra rozdzielczość w czasie i zła w częstotliwościach

⇒ szeroka funkcja okienna - zła rozdzielczość w czasie i dobra w częstotliwościach

Przykład

$$f(t) = \cos\left(2\pi * 50 * t\right), \quad w(t) = e^{-(t/\sigma)^2}$$



Analiza wielorozdzielcza

Przykład Załóżmy, że dyskretny sygnał reprezentowany jest za pomocą parzystej liczby próbek (składowych)

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

Sygnał ten przekształcamy w następujący sposób

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Macierz przekształcenia odwrotnego

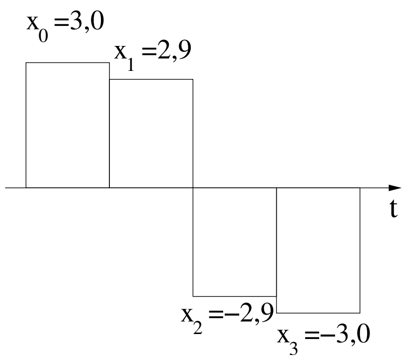
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Przedstawmy uzyskany wektor w postaci sumy dwóch wektorów: y_a, stanowiącego aproksymację wektora y, oraz y_d, stanowiącego tzw. detal wektora y,

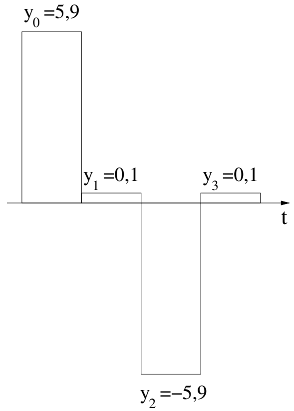
$$y = y_a + y_d = \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ 0 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Niech

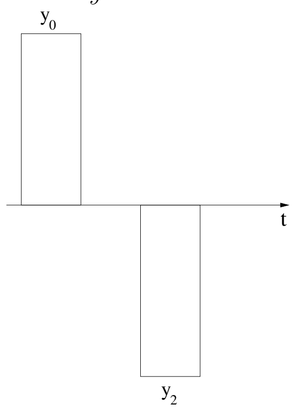
$$x = (3,0;\ \ 2,9;\ \ -2,9;\ \ -3,0)^{\mathrm{T}}$$



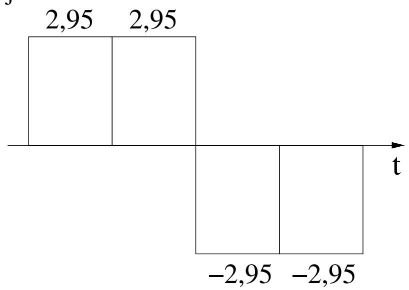
Transformata y sygnału x



Aproksymacja y_a wektora y



Aproksymacja wektora x



Poddajmy sygnał y następnemu przekształceniu, a mianowicie

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 + y_2 \\ y_1 \\ y_0 - y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

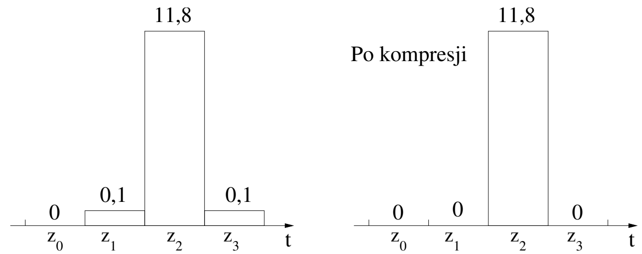
$$\begin{aligned} z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wracając do przykładowego x, mamy

$$z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 11,8 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

Możemy sygnał ten poddać kompresji

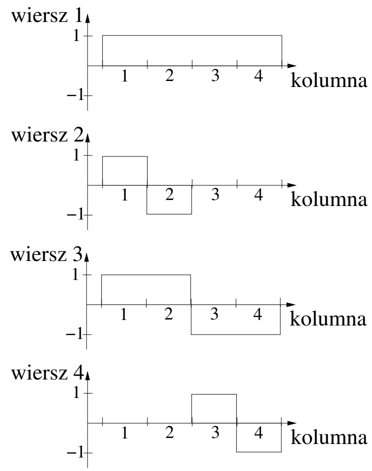
$$z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 11,8 \\ 0,1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad z_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11,8 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Wiersze macierzy przekształcenia

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

możemy zinterpretować jako pewne sygnały elementarne



⇒ obliczanie składowych transformaty z to szukanie korelacji między sygnałami elementarnymi a sygnałem x

⇒ celem jest znalezienie takiego przekształcenia, które daje silną korelację sygnału x z możliwie najmniejszą liczbą sygnałów elementarnych

Skala - analog skali geograficznej

- na najniższym poziomie skali możemy uchwycić szczegóły (detale skali dokładnej)

$$\begin{aligned} x_0 - x_1 &= y_1 = z_1 \\ x_2 - x_3 &= y_3 = z_3 \end{aligned}$$

- na tym samym poziomie skali, uśredniamy (sumujemy) parami sąsiednie wartości sygnału

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 + x_1 \\ y_2 &= x_2 + x_3 \end{aligned}$$

- tworzymy mniej szczegółowy obraz sygnału

$$z_0 = y_0 + y_2$$

i obliczamy zmianę wartości średnich

$$z_2 = y_0 - y_2$$

sygnał x | pierwszy poziom reprezentacji (y) | drugi poziom reprezentacji (z)

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 + x_1 \\ x_0 - x_1 \\ x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (x_0 + x_1) + (x_2 + x_3) \\ x_0 - x_1 \\ (x_0 + x_1) - (x_2 + x_3) \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} =$$

reprezentacja zgrubna		reprezentacja szczegółowa		reprezentacja po kompresji

$$\begin{pmatrix} (x_0+x_1)+(x_2+x_3) \\ 0 \\ (x_0+x_1)-(x_2+x_3) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_0-x_1 \\ 0 \\ x_2-x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (x_0+x_1)+(x_2+x_3) \\ 0 \\ (x_0+x_1)-(x_2+x_3) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rozwinięcie Haara

Podstawowa falka Haara

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \le t < 1 \\ 0, & \text{dla innych } t \end{cases}$$

generuje zbiór falek o elementach

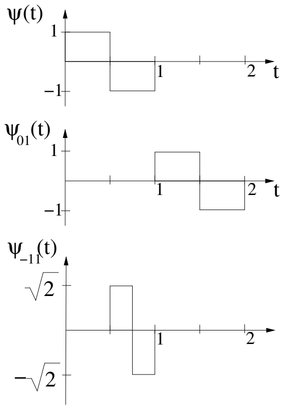
$$\psi_{mn}(t) = 2^{-m/2}\psi(2^{-m}t - n), \quad m, n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

Nośnik funkcji $\psi_{mn}(t)$ ma długość 2^m

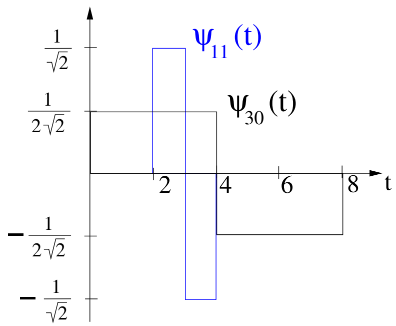
$\Rightarrow$ m to współczynnik skali

Przesunięcie falki $\psi(t)$

$$2^m n$$



Twierdzenie 1 *Falki Haara o różnych skalach są funkcjami ortogonalnymi.*



Własności

- dobra lokalizacja w czasie (długość nośnika jest skończona)
- jeśli $m \to -\infty$, uzyskujemy nieskończenie ostrą lokalizację w czasie
- duże i dodatnie m natomiast daje dobrą lokalizację względem częstotliwości

Rozważmy klasę funkcji, które dla ustalonych m_0 i m_1

- mają wartość stałą w przedziałach $[n2^{-m_0}, (n+1)2^{-m_0}]$
- mają ograniczony nośnik $[-2^{m_1}, 2^{m_1})$

$\Rightarrow$ wybierając m_0 i m_1 dostatecznie dużymi liczbami, możemy za pomocą funkcji tego typu aproksymować dowolną funkcję całkowalną z kwadratem

Załóżmy ponadto, że

$$\frac{2^{m_1}}{2^{-m_0}}$$

jest liczbą całkowitą

$\Rightarrow$ nośnik funkcji składa się z

$$2\frac{2^{m_1}}{2^{-m_0}}$$

przedziałów o długości 2^{-m_0}

Funkcję należącą do powyższej klasy oznaczymy przez $f^{(-m_0)}(t)$

Funkcja skalująca

$$\phi_{-m_0 n}(t) = \begin{cases} 2^{m_0/2}, & t \in [n2^{-m_0}, (n+1)2^{-m_0}) \\ 0, & \text{dla innych } t \end{cases}$$

Funkcję $f^{(-m_0)}(t)$ możemy przedstawić w postaci

$$f^{(-m_0)}(t) = \sum_{n=-N}^{N-1} f_n^{(-m_0)} \phi_{-m_0 n}(t)$$

przy czym $N = 2^{m_0+m_1}$ oraz

$$f_n^{(-m_0)} = 2^{-m_0/2} f^{(-m_0)}(n2^{-m_0})$$

Dla ustalonego m_0 i wartości t z przedziału $[2n2^{-m_0}, (2n+2)2^{-m_0}]$, obejmującego dwa przedziały podstawowe o długości 2^{-m_0} każdy, mamy

$$f^{(-m_0)} = f_{2n}^{(-m_0)}\phi_{-m_0(2n)}(t) + f_{2n+1}^{(-m_0)}\phi_{-m_0(2n+1)}(t)$$

Ta sama funkcja może być wyrażona jako średnia w tych dwóch przedziałach,

$$\frac{f_{2n}^{(-m_0)} + f_{2n+1}^{(-m_0)}}{2}\sqrt{2}\phi_{(-m_0+1)n}(t)$$

plus poprawka

$$\frac{f_{2n}^{(-m_0)} - f_{2n+1}^{(-m_0)}}{2}\sqrt{2}\psi_{(-m_0+1)n}(t)$$

Zatem

$$f^{(-m_0)}(t) = f_n^{(-m_0+1)}\phi_{(-m_0+1)n}(t) + d_n^{(-m_0+1)}\psi_{(-m_0+1)n}(t)$$

gdzie

$$\begin{aligned} f_n^{(-m_0+1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_{2n}^{(-m_0)} + f_{2n+1}^{(-m_0)}\right) \\ d_n^{(-m_0+1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_{2n}^{(-m_0)} - f_{2n+1}^{(-m_0)}\right) \end{aligned}$$

oraz

$$t \in \left[2n2^{-m_0}, (2n+2)2^{-m_0}\right)$$

Rozszerzając ostatnią zależność na przedział $[-2^{m_1}, 2^{m_1})$, mamy

$$f^{(-m_0)}(t) = \sum_{n=\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f_n^{(-m_0+1)}\phi_{(-m_0+1)n}(t) + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} d_n^{(-m_0+1)}\psi_{(-m_0+1)n}(t)$$

Iterując ostatnie równanie do momentu, aż liczenie średniej będzie po przedziałach o długości 2^{m_1}, otrzymamy rozkład naszej funkcji na falki Haara

$$f^{(-m_0)}(t) = f^{(m_1)}(t) + \sum_{m=-m_0+1}^{m_1}\sum_{n=-2^{m_1-m}}^{2^{m_1-m}-1} d_n^{(m)}\psi_{mn}(t)$$

$f^{(m_1)}(t)$ - część zgrubna

- dla ujemnych t jest średnią funkcji $f^{(-m_0)}(t)$ w przedziale $[-2^{-m_1}, 0)$
- dla dodatnich t jest średnią funkcji $f^{(-m_0)}(t)$ w przedziale $[0, 2^{m_1})$
- gdy skala m_0 dąży do nieskończoności, $f^{(m_1)}(t)$ można pominąć