Metody numeryczne

Równania różniczkowe cząstkowe, część I

Janusz Szwabiński

szwabin@ift.uni.wroc.pl

Równania różniczkowe cząstkowe, część I

1. Kilka informacji wstępnych
2. Równania liniowe pierwszego rzędu
3. Równania liniowe drugiego rzędu
4. Poprawnie postawione zagadnienia
5. Metoda charakterystyk
6. Metoda rozdzielania zmiennych

Kilka informacji wstępnych

Definicja Liczbę $n \geq 1$ nazywamy rzędem równania różniczkowego cząstkowego (PDE), jeśli występuje w tym równaniu pochodna cząstkowa rzędu n funkcji niewiadomej, natomiast nie występują w nim pochodne cząstkowe rzędu wyższego niż n.

Definicja Całką szczególną lub rozwiązaniem szczególnym PDE rzędu n w obszarze $\mathcal{D}$ nazywamy funkcję klasy C^n w obszarze $\mathcal{D}$, spełniającą dane równanie w każdym punkcie tego obszaru.

Definicja Całką ogólną lub rozwiązaniem ogólnym PDE nazywamy zbiór wszystkich całek szczególnych tego równania.

Równania liniowe pierwszego rzędu

Postać ogólna (dla dwóch zmiennych)

$$a(x,t)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + b(x,t)\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = c(x,t)U(x,t) + d(x,t)$$

Jeśli $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$ i $d(x,t)$ zależą od U

$\Rightarrow$ równanie nieliniowe

Jeśli przy tym równanie pozostaje liniowe względem pochodnych

$\Rightarrow$ problem quasi–liniowy

Równania liniowe drugiego rzędu

Postać ogólna

$$a(x,t)\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x \partial t} + c(x,t)\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}$$
$$= d(x,t)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + e(x,t)\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + f(x,t)U(x,t) + g(x)$$

przy tym

- $a(x,t), \ldots, g(x,t)$ to funkcje klasy C^2 w obszarze $\mathcal{D}$
- $a(x,t)$, $b(x,t)$ i $c(x,t)$ nie znikają jednocześnie w żadnym punkcie tego obszaru

Niech

$$\delta = b^2 - 4ac$$

Definicja Mówimy, że liniowe równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu jest w zbiorze $\mathcal{D}$ typu

- eliptycznego, jeśli $\forall (x,t) \in \mathcal{D}$ zachodzi $\delta < 0$,
- parabolicznego, jeśli $\forall (x,t) \in \mathcal{D}$ zachodzi $\delta = 0$,
- hiperbolicznego, jeśli $\forall (x,t) \in \mathcal{D}$ zachodzi $\delta > 0$.

Przykład

1. równanie falowe (hiperboliczne)
$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = 0$$
2. równanie przewodnictwa (paraboliczne)
$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = 0$$
3. równanie Poissona (eliptyczne)
$$\frac{\partial^2 U(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(x,y,z)}{\partial z^2} = -4\pi\rho(\vec{r})$$

Każdy typ opisuje pewną klasę zjawisk fizycznych:

- równania hiperboliczne ($U_{tt} - U_{xx} = 0$) opisują zwykle zależne od czasu fizyczne procesy zachowawcze, które nie ewoluują do stanu równowagi
- równania paraboliczne ($U_t = U_{xx}$) opisują na ogół zależne od czasu procesy dyssypatywne, ewoluujące do stanu równowagi
- równania eliptyczne ($U_{xx} + U_{yy} = 0$) opisują niezależne od czasu stany równowagowe

Poprawnie postawione zagadnienia

Przykład

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial y} = g(y)$$

$g(y)$ - dowolna funkcja klasy C^1 w przedziale $(-\infty, \infty)$

Niech

$\varphi(y)$ - dowolna funkcja pierwotna funkcji $g(y)$

$\psi(x)$ - dowolna funkcja klasy C^2 w przedziale $(-\infty, \infty)$

Rozwiązanie ma postać

$$U(x, y) = \psi(x) + \varphi(y)$$

$\Rightarrow$ dodatkowe warunki konieczne, aby rozwiązanie było jednoznaczne

Warunki Hadamarda zagadnienia poprawnie postawionego

1. istnieje rozwiązanie problemu
2. rozwiązanie jest jednoznaczne
3. rozwiązanie jest ciągłą funkcją danych wejściowych

Kilka reguł praktycznych:

- dobrze postawione zagadnienie eliptyczne ma postać zagadnienia brzegowego
  - warunki brzegowe Dirichleta - dana jest wartość funkcji na brzegu rozpatrywanego obszaru
  - warunki brzegowe Neumanna - zadana jest wartość pochodnej normalnej funkcji na brzegu
  - warunki brzegowe Robina - dana jest kombinacja liniowa funkcji i jej pochodnej normalnej

- dobrze postawione zagadnienie paraboliczne wymaga na ogół warunków brzegowych dla zmiennych przestrzennych oraz dodatkowo warunku początkowego, określającego rozwiązanie w chwili $t = t_0$
- dobrze postawione zagadnienie hiperboliczne wymaga zwykle warunków brzegowych dla zmiennych przestrzennych oraz dwóch warunków początkowych, określających funkcję i jej pochodną w chwili $t = t_0$

Przykład

Rozważmy równanie Laplace'a

$$U_{xx} + U_{yy} = 0$$

w obszarze $0 < x < a$, $0 < y < b$ z następującymi warunkami brzegowymi:

$$U(x,0) = x^2, \qquad U(x,b) = x^2 - b^2$$
$$U(0,y) = -y^2, \qquad U(a,y) = a^2 - y^2$$

Rozwiązanie ma postać

$$U(x,y) = x^2 - y^2$$

Przykład

Rozważmy równanie Laplace'a, traktując zmienną y jako zmienną czasową. Chcemy rozwiązać zagadnienie początkowe:

$$\begin{aligned} U_{xx} + U_{yy} &= 0, \qquad -\infty < x < \infty,\ y > 0, \\ U(x,0) &= f(x), \qquad -\infty < x < \infty, \\ U_x(x,0) &= g(x), \qquad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Niech

$$f = f_1(x) = 0, \;\; g = g_1(x) = 0$$

Wówczas

$$U_1(x,y) = 0$$

Niech teraz

$$f = f_2(x) = 0, \;\; g = g_2(x) = \frac{\sin nx}{n}$$

W tym wypadku

$$U_2(x,y) = \frac{\sinh ny \sin nx}{n^2}$$

Zauważmy, że f_1 i f_2 są identyczne, oraz dla każdego x

$$\lim_{n\to\infty} |g_1(x) - g_2(x)| = 0$$

$\Rightarrow$ dla dużych n warunki początkowe obu problemów różnią się znikomo mało

Porównajmy oba rozwiązania w punkcie $x = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| U_1\left(\frac{\pi}{2}, y\right) - U_2\left(\frac{\pi}{2}, y\right) \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2n^2} = \infty$$

$\Rightarrow$ rozwiązania różnią się od siebie dowolnie dużo

$\Rightarrow$ rozwiązanie nie jest ciągłe względem danych wejściowych (warunków brzegowych)

Metoda charakterystyk dla równań pierwszego rzędu

$$a(x,t)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + b(x,t)\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = c(x,t)U(x,t) + d(x,t)$$

W płaszczyźnie $x - t$ definiujemy krzywą

$$\gamma(s) = [x(s), t(s)]$$

o własnościach

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = b$$

Wzdłuż krzywej $\gamma(s)$ zachodzi

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\partial U}{\partial t} \\ &= a(s)U_x + b(s)U_t = c(s)U(s) + d(s)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ wzdłuż $\gamma(s)$ mamy do czynienia z równaniem różniczkowym zwyczajnym

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = c(s)U(s) + d(s)$$

Definicja Krzywą, wzdłuż której równanie cząstkowe można przekształcić do równania zwyczajnego, nazywamy charakterystyką.

Przykład

$$2\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0$$

z warunkiem początkowym

$$U(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$$

Równania charakterystyk

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1 \ \Rightarrow \ t = s$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2 \ \Rightarrow \ x = 2s + x_0 \ \Rightarrow x_0 = x - 2t$$

Stąd

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = 0 \ \Rightarrow U = U(x_0)$$

Dla $t = 0$ i $x = x_0$ daje to

$$U = \frac{1}{1+x_0^2},$$

a zatem

$$U(x,t) = \frac{1}{1+(x-2t)^2}$$

Kilka uwag praktycznych

- jeśli dwie charakterystyki przecinają się, rozwiązanie w „standardowym sensie” nie istnieje
- jeśli charakterystyki nie przecinają brzegu rozpatrywanego obszaru, rozwiązanie problemu nie istnieje
- podobnie, jeśli charakterystyki przecinają brzeg wielokrotnie, w przypadku ogólnym rozwiązanie może nie istnieć

Metoda rozdzielania zmiennych

Rozważmy równanie dyfuzji w jednorodnej, nieskończonej przestrzeni trójwymiarowej,

$$\frac{\partial \eta(\vec{r},t)}{\partial t} - D\nabla^2\eta(\vec{r},t) = S(\vec{r},t)$$

Warunek początkowy

$$\eta(\vec{r},0) = 0$$

Założenia

- współczynnik dyfuzji D jest stały
- $S(\vec{r},t)$ można potraktować jako nieskończoną liczbę źródeł impulsowych
$$S(\vec{r},\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Rozwiązanie $\eta(\vec{r},t)$ jest wówczas superpozycją rozwiązań znalezionych w każdym przedziale czasowym $\mathrm{d}\tau$

$$\eta(\vec{r},t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau\eta(\vec{r},t,\tau)$$

przy czym $\eta(\vec{r},t,\tau)$ spełnia równanie

$$\frac{\partial \eta(\vec{r},t,\tau)}{\partial t} - D\nabla^2\eta(\vec{r},t,\tau) = S(\vec{r},\tau)\delta(t-\tau)$$

z warunkiem początkowym $\eta(\vec{r},0,\tau) = 0$

Zamiast powyższego równania możemy rozważać równanie jednorodne

$$\frac{\partial \eta(\vec{r},t,\tau)}{\partial t} - D\nabla^2\eta(\vec{r},t,\tau) = 0$$

z warunkiem początkowym $\eta(\vec{r},\tau,\tau) = S(\vec{r},\tau)$

Postulujemy rozwiązanie w postaci

$$\eta(\vec{r},t,\tau) = X(\vec{r})T(t,\tau)$$

Po podstawieniu otrzymamy

$$XT' - DT\nabla^2X = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{T'}{DT} = \frac{\nabla^2 X}{X} = -k^2$$

$$k = |\vec{k}| \text{ - pewien parametr}$$

Uzyskaliśmy układ dwóch równań

$$\begin{aligned} \nabla^2 X + k^2 X &= 0 \\ T' + \omega T &= 0 \end{aligned}$$

Przy tym

$$\omega = Dk^2$$

Równanie na część przestrzenną $X(\vec{r})$ to standardowe zagadnienie własne. Dla tego konkretnego problemu otrzymamy

$$X(\vec{r}) = Ce^{i\vec{k}\vec{r}},$$

gdzie C jest dowolną stałą

Podobnie, równanie zależne od czasu jest standardowym zagadnieniem początkowym, którego rozwiązanie ma postać

$$T(t,\tau) = A(\vec{k})e^{-\omega(t-\tau)}$$

Stąd

$$\eta(\vec{r},t,\tau) = \int \mathrm{d}\vec{k} A(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}-\omega(t-\tau)}$$

$A(\vec{k})$ wyznaczamy z warunku początkowego $\eta(\vec{r},\tau,\tau) = S(\vec{r},\tau)$

$$A(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}\vec{r} S(\vec{r},\tau) e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

Podstawiając i całkując po $\vec{k}$, otrzymamy

$$\eta(\vec{r},t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int \mathrm{d}\vec{r'} S(\vec{r'},\tau) \exp\left[-\frac{(\vec{r}-\vec{r'})^2}{4Dt}\right]$$

czyli ostatecznie

$$\eta(\vec{r},t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\vec{r'} S(\vec{r'},\tau) \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{(\vec{r}-\vec{r'})^2}{4D(t-\tau)}\right]$$