Analiza falkowa, część II

Janusz Szwabiński

22 maja 2003

1. Ciągła transformata falkowa (CWT)
2. Dyskretyzacja CWT
3. Dyskretna transformata falkowa (DWT)

Literatura uzupełniająca:

1. Robi Polikar, „The Wavelet Tutorial”
2. C. Valens, „A Really Friendly Guide to Wavelets”

Ciągła transformata falkowa

$$\gamma(s,\tau) = \int \mathrm{d}t f(t) \psi^*_{s,\tau}(t)$$

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$$

s	-	skala
τ	-	przesunięcie
ψ	-	falka bazowa

- s odpowiada odwrotności częstotliwości
- $s > 1 \Rightarrow$ falka bazowa jest rozciągana
- $s < 1 \Rightarrow$ falka bazowa jest zwężana

Warunek dopuszczalności (1)

Twierdzenie 1 *Jeśli $f(t) \in L^2$ i $\psi(t)$ spełnia warunek*

$$\int \mathrm{d}\omega \frac{|\psi(\omega)|^2}{|\omega|} < +\infty$$

gdzie $\psi(\omega)$ to transformata Fouriera falki $\psi(t)$, to funkcja $f(t)$ może być w pełni zrekonstruowana przy wykorzystaniu jej transformaty falkowej $\gamma(s,\tau)$, przy czym transformata odwrotna ma następującą postać

$$f(t) = \int\int \mathrm{d}\tau \mathrm{d}s \gamma(s,\tau) \psi_{s,\tau}(t)$$

Warunek dopuszczalności (2)

Warunek dopuszczalności implikuje

$$|\psi(\omega)|^2_{\omega=0} = 0$$

czyli

$$\int \mathrm{d}t\psi(t) = 0$$

$\Rightarrow$ falka musi być funkcją oscylującą

Regularność (1)

Rozwińmy CWT w szereg Taylora do rzędu n wokół punktu $t = 0$ (dla ułatwienia przyjmujemy $\tau = 0$)

$$\gamma(s,0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[\sum_{p=0}^{n} f^{(p)}(0) \int \mathrm{d}t \frac{t^p}{p!} \psi\left(\frac{t}{s}\right) + O(n+1) \right]$$

Momenty falki

$$M_p = \int \mathrm{d}t t^p \psi(t)$$

Wówczas

$$\gamma(s,0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[f(0)M_0 s + \frac{f^{(1)}}{1!} M_1 s^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} M_n s^{n+1} + O(s^{n+2}) \right]$$

Regularność (2)

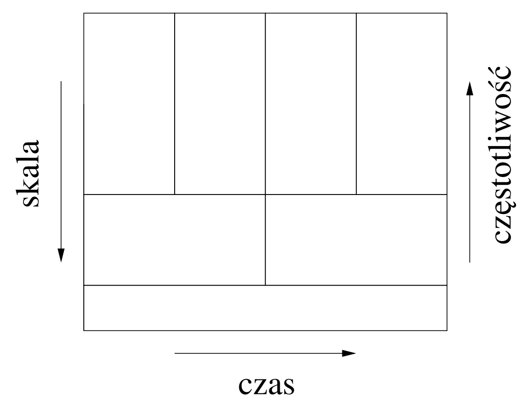
Z warunku dopuszczalności

$$M_0 = 0$$

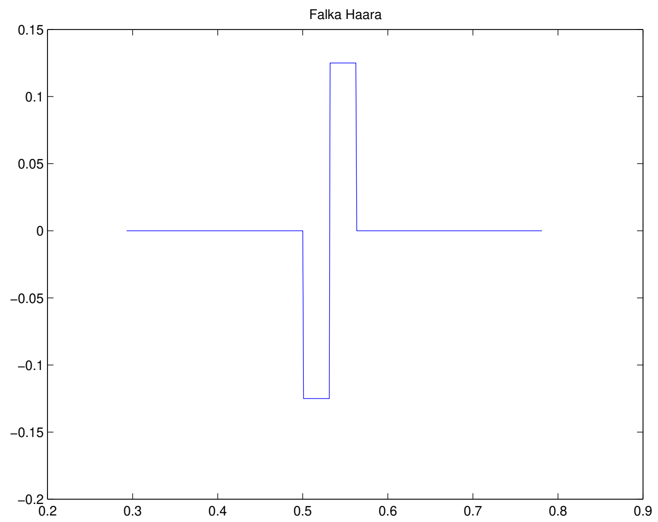
Gdyby pozostałe momenty znikały do M_n włącznie, wówczas dla gładkiego sygnału $f(t)$

$$\gamma(s,\tau) \to s^{n+2}$$

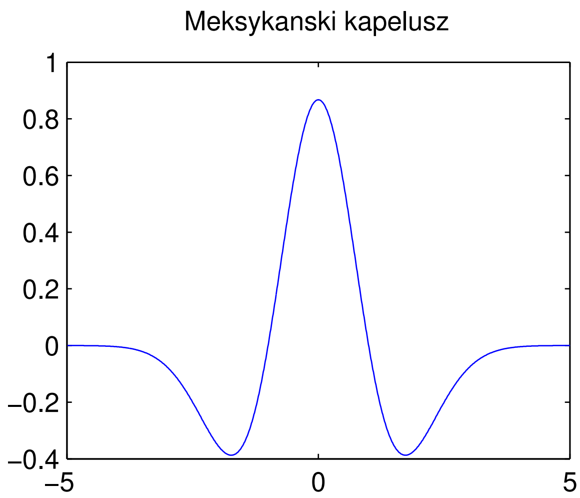
Rozdzielczość w czasie i skali



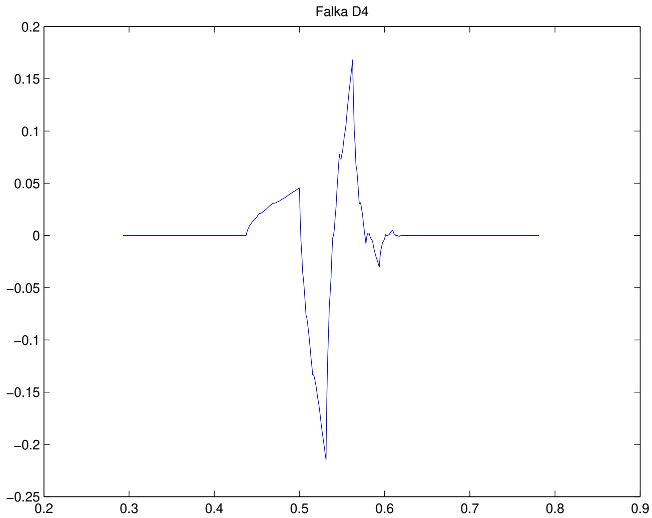
Przykłady falek (1)



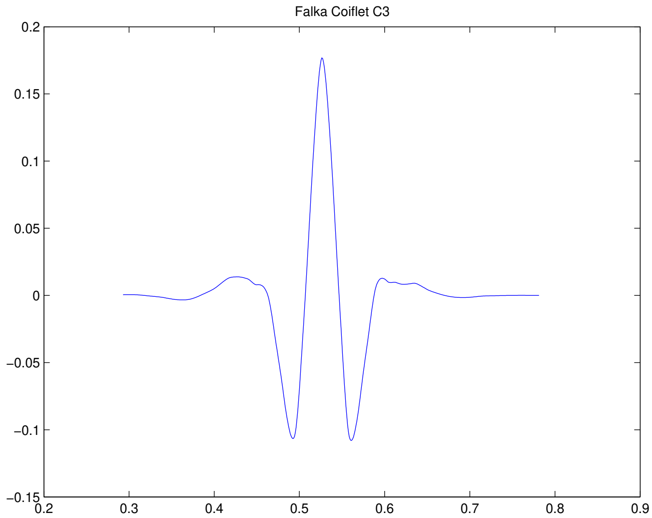
Przykłady falek (2)



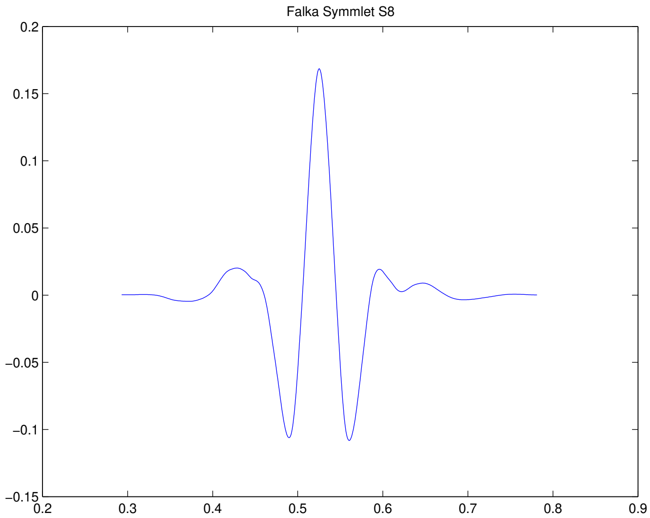
Przykłady falek (3)



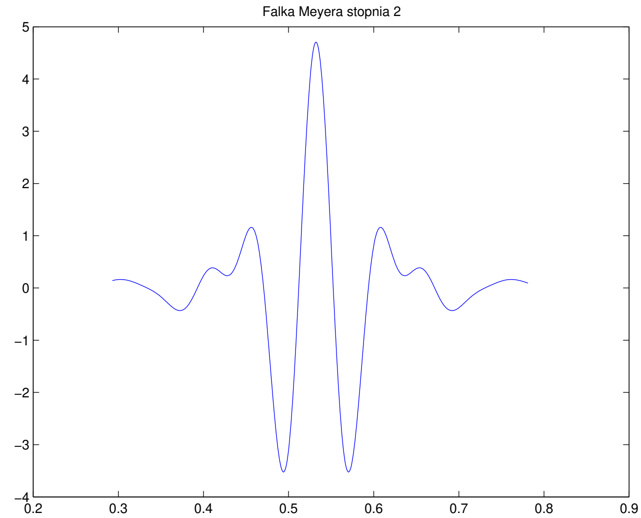
Przykłady falek (4)



Przykłady falek (5)



Przykłady falek (6)



Dyskretyzacja ciągłej transformaty falkowej (1)

„Wady" CWT

- skalowane falki nie są ortogonalne $\Rightarrow$ wiele informacji nadmiarowych
- nieskończona liczba falek
- transformata nie daje się na ogół wyliczyć analitycznie

Dyskretyzacja ciągłej transformaty falkowej (2)

Zasada Nyquista

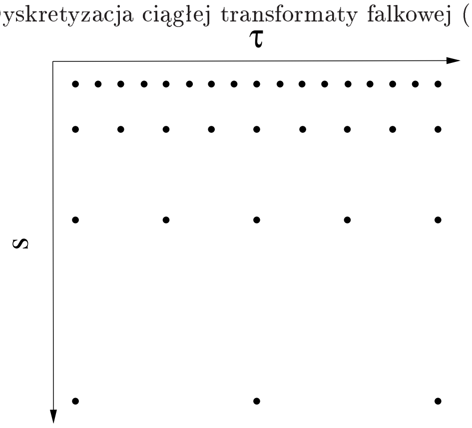
$$N_2 = \frac{s_1}{s_2} N_1 = \frac{f_2}{f_1} N_1$$

Dyskretna falka

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{s_0^j}} \psi \left(\frac{t - k\tau_0 s_0^j}{s_0^j} \right)$$

$k,\ j$	-	liczby całkowite
s_0	-	pewien ustalony krok
$s_0 = 2$	$\Rightarrow$	siatka diadyczna

Dyskretyzacja ciągłej transformaty falkowej (3)



Dyskretyzacja ciągłej transformaty falkowej (4)

Transformata falkowa ma w tym wypadku ma postać

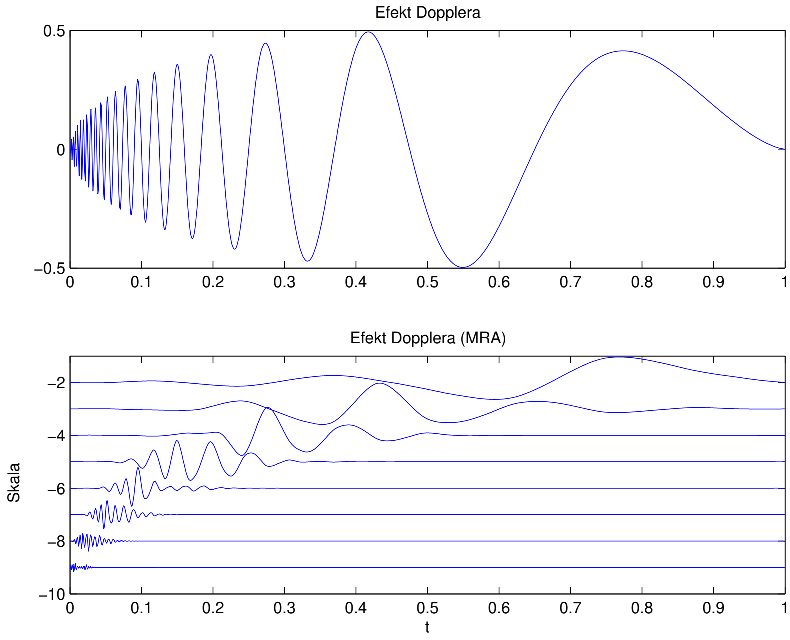
$$\gamma(j,k) = \int \mathrm{d}t f(t)\psi^*_{j,k}(t)$$

i pozwala ona zrekonstruować oryginalny sygnał, jeżeli tylko spełniony jest warunek

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

gdzie $A > 0$ i $B < +\infty$ nie zależą od f

Dyskretyzacja ciągłej transformaty falkowej (5)



Dyskretna transformata falkowa (1)

Rzeczywiste sygnały nie trwają nieskończenie długo

⇒ przesunięcia falek są ograniczone z góry

Falki posiadają spektrum podobne do filtru pasmowego

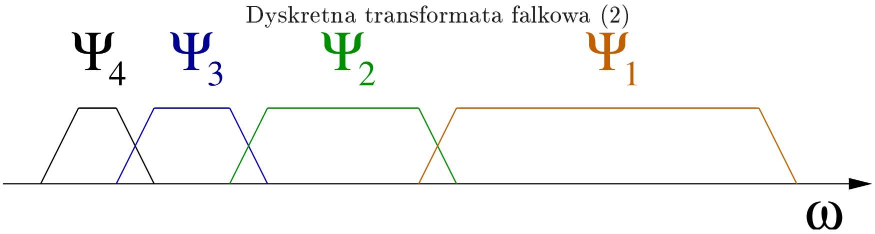
⇒ z teorii Fouriera wiemy, że

$$F\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

⇒ kompresja falki o czynnik 2 w czasie spowoduje rozciągnięcie jej spektrum o czynnik 2 oraz przesunie wszystkie częstotliwości w górę (także dwukrotnie)

⇒ możemy pokryć skończone spektrum sygnału spektrami rozciągniętych falek

Dyskretna transformata falkowa (2)



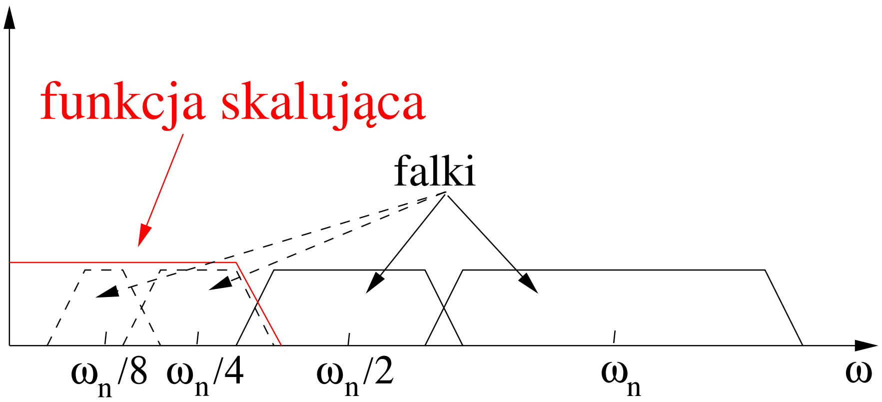
Funkcja skalująca (1)

Problem:

- przy każdym rozciągnięciu falki pokrywamy tylko połowę pozostałego spektrum

⇒ musimy wykonać nieskończenie wiele rozciągnięć, aby dojść z częstotliwością do zera

Funkcja skalująca (2)



Funkcja skalująca (2)

Traktując funkcję skalującą jako sygnał ze spektrum niskopasmowym, mamy (do pewnej skali j)

$$\varphi(t) = \sum_{j,k} \gamma(j,k)\psi_{j,k}(t)$$

⇒ zamiast nieskończonej liczby falek mamy funkcję skalującą oraz ich skończoną liczbę

⇒ tracimy informację o sygnale w pewnej skali (ale nadal możemy go zrekonstruować!)

Warunek dopuszczalności dla funkcji skalującej ma postać

$$\int \mathrm{d}t\varphi(t) = 1$$

Dekompozycja wielorozdzielcza (1)

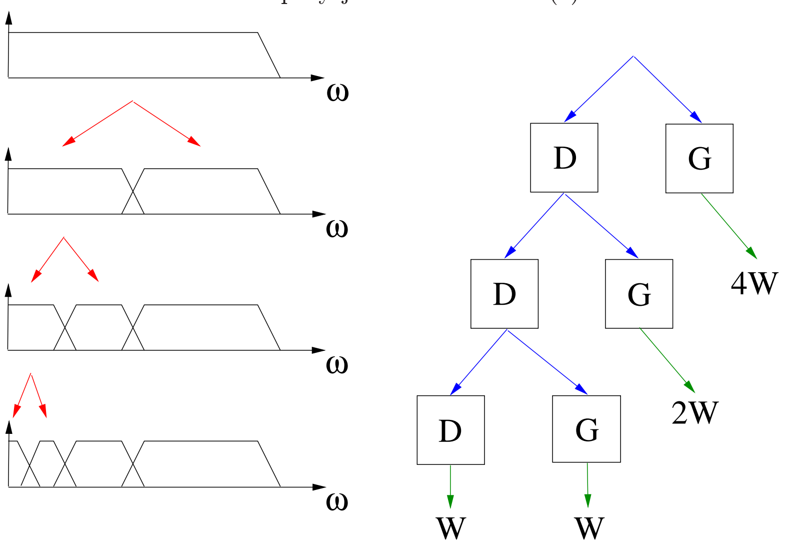
Pojedyncza falka zachowuje się jak filtr pasmowy

⇒ transformata powinna zachowywać się jak wielostopniowy układ takich filtrów

⇒ na każdym stopniu, z sygnału orginalnego wyławiamy część pasma odpowiadająca współczynnikom transformaty falkowej i funkcji skalującej

---

Dekompozycja wielorozdzielcza (2)



Współczynniki DWT (1)

Równanie dwuskalowe

$$\varphi(2^j t) = \sum_k h_{j+1}(k)\varphi(2^{j+1}t - k)$$

⇒ funkcję skalującą w pewnej skali możemy wyznaczyć za pomocą funkcji w następnej, mniejszej skali

Podobnie zachodzi

$$\psi(2^j t) = \sum_k g_{j+1}(k)\varphi(2^{j+1}t - k)$$

Stąd

$$f(t) = \sum_k \lambda_j(k)\varphi(2^j t - k)$$

Współczynniki DWT (2)

Przechodząc do skali $j-1$ (więcej detali), musimy dodać falki

$$f(t) = \sum_k \lambda_{j-1}(k)\varphi(2^{j-1}t - k) + \sum_k \gamma_{j-1}(k)\psi(2^{j-1}t - k)$$

Jeśli funkcja skalująca i falki są ortonormalne, to

$$\begin{aligned}\lambda_{j-1}(k) &= \langle f(t), \varphi_{j,k}(t)\rangle \\ \gamma_{j-1}(k) &= \langle f(t), \psi_{j,k}(t)\rangle\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}\lambda_{j-1}(k) &= \sum_m h(m-2k)\lambda_j(m) \\ \gamma_{j-1}(k) &= \sum_m g(m-2k)\gamma_j(m)\end{aligned}$$

Współczynniki DWT (3)

h i g - filtry lustrzane

$$g(k) = (-1)^k h(-k+1)$$

Współczynniki DWT (4)

Współczynniki funkcji skalującej w pewnej skali

$\Rightarrow$ dolne pasmo sygnału na wyjściu z wielopoziomowego układu filtrów

Zakładając, że sygnał orginalny to wyjście wyimaginowanego filtra dolnoprzepustowego

$\Rightarrow$ w największej skali

$$\lambda(k) = f(k)$$

$\Rightarrow$ w celu obliczenia λ_{j-1} i $\gamma_{j-1}(k)$ wystarczy wyznaczyć $h(k)$

Współczynniki DWT (4)

Z równania dwuskalowego mamy

$$\varphi(t) = \sum_k h(k)\varphi(2t-k)$$

Warunek dopuszczalności prowadzi do

$$1 = \int \mathrm{d}t\varphi(t) = \sum_k h(k) \int \mathrm{d}t\varphi(2t-k) = \frac{1}{2}\sum_k h(k)$$

czyli

$$\sum_k h(k) = 2$$

Współczynniki DWT (5)

Jeżeli falki mają tworzyć dualny układ ortonormalny, funkcja skalująca musi być ortogonalna do swojego przesunięcia

$$\begin{aligned}\delta_{l0} &= \int \mathrm{d}t\varphi(t)\varphi(t-l) \\ &= \sum_k \sum_{k'} h(k)h(k') \int \mathrm{d}t\varphi(2t-k')\varphi(2t-2l-k)\end{aligned}$$

Stąd

$$\sum_k \sum_{k'} h(k+2l)h(k') = 2\delta_{0l}$$

Aplikacje

- „komputerowy” wzrok
- kompresja danych (stosowane przez FBI)
- usuwanie szumów z danych
- wykrywanie nieciągłości sygnałów
- rozpoznawanie samopodobieństw w szeregach czasowych
- generowanie dźwięku
