Metody numeryczne II

Równania całkowe - wstęp

Janusz Szwabiński

szwabin@ift.uni.wroc.pl

Równania całkowe - wstęp

1. Klasyfikacja równań całkowych
2. Równania całkowe w fizyce
3. Metoda kolejnych przybliżeń
4. Związek z równaniami różniczkowymi zwyczajnymi

Literatura uzupełniająca:

Adam Piskorek, „Równania całkowe”

Wiadomości wstępne

Definicja Równanie nazywa się całkowym, jeżeli zawiera ono funkcję niewiadomą pod znakiem całki. Funkcja nazywa się rozwiązaniem równania całkowego, jeżeli staje się ono tożsamością po podstawieniu tej funkcji w miejsce funkcji niewiadomej.

Obszary zastosowań:

- równania różniczkowe zwyczajne
- eliptyczne i paraboliczne zagadnienia brzegowe
- geometria różniczkowa
- hydrodynamika, teoria sprężystości
- zagadnienia wielu ciał

Prototypowe równania całkowe

1782r: P. S. Laplace

$$g(x) = \int_0^\infty e^{xt} f(t)\mathrm{d}t, \quad k(x) = \int_0^\infty t^{x-1} h(t)\mathrm{d}t$$

1811r: J. B. Fourier przedstawił rozwiązanie równania

$$g(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(y)\mathrm{d}y$$

w postaci

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} g(y)\mathrm{d}y$$

1823r: N. H. Abel otrzymał równanie całkowe

$$g(x) = \int_a^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} \mathrm{d}y, \quad 0 < \alpha < 1, \quad g(a) = 0$$

i wyznaczył jego rozwiązanie w postaci

$$f(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_a^x \frac{g'(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} \mathrm{d}y$$

Klasyfikacja liniowych równań całkowych

- równania Fredholma pierwszego rodzaju

$$\int_a^b K(x,y)f(y)\mathrm{d}y = g(x)$$

- równania Fredholma drugiego rodzaju

$$f(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)\mathrm{d}y = g(x)$$

- równania Volterry pierwszego rodzaju

$$\int_a^x K(x,y)f(y)\mathrm{d}y = g(x)$$

- równania Volterry drugiego rodzaju

$$f(x) - \int_a^x K(x,y)f(y)\mathrm{d}y = g(x)$$

Funkcję $K(x,y)$ nazywamy jądrem równania

Równanie całkowe Fredholma

$$\int_a^b K(x,y)f(y)\mathrm{d}y = g(x)$$

Równaniu temu odpowiada następujące równanie macierzowe w skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej:

$$\mathbf{K}\vec{f} = \vec{g}$$

Jego rozwiązanie ma postać

$$\vec{f} = \mathbf{K}^{-1}\vec{g}$$

i jest jednoznaczne, o ile tylko $\vec{g} \neq 0$ i $\mathbf{K}$ jest macierzą nieosobliwą

Równanie Fredholma drugiego rzędu

$$f(x) - \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) \mathrm{d}y = g(x)$$

jest analogiem zagadnienia własnego w skończonej liczbie wymiarów

$$(\mathbf{K} - \sigma \mathbf{I}) \vec{f} = \vec{g}$$

$$\sigma = 1/\lambda, \quad \vec{g} = -g/\lambda$$

Alternatywa Fredholma

- $g = 0$
  jeśli jądro $K(x, y)$ jest ograniczone, równanie ma rozwiązanie dla nieskończonego zbioru wartości własnych

$$\lambda = \lambda_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- $g \neq 0$
  równanie jest rozwiązywalne z wyjątkiem sytuacji, kiedy λ (σ) jest wartością własną

Uwarunkowanie równań Fredholma

- równania pierwszego rodzaju na ogół źle uwarunkowane
- równania drugiego rodzaju dużo rzadziej źle uwarunkowane

Równanie drugiego rodzaju można przedstawić w postaci

$$\int_a^b [K(x,y) - \sigma\delta(x-y)] f(y) \mathrm{d}y = -\sigma g(x)$$

$\Rightarrow$ dla odpowiednio dużych $\sigma = 1/\lambda$ równanie jest diagonalnie dominujące i dlatego dobrze uwarunkowane

Równania całkowe Volterry

Równania Volterry są szczególnym przypadkiem równań Fredholma dla

$$K(x, y) = 0, \quad y > x$$

Równanie pierwszego rodzaju

$$\int_a^x K(x, y) f(y) \mathrm{d}y = g(x)$$

odpowiada równaniu macierzowemu

$$\sum_{j=1}^{k} K_{kj} f_j = g_k$$

⇒ macierz **K** jest macierzą trójkątną dolną

⇒ układ rozwiązuje się bardzo prosto

⇒ „podobnie” prosto rozwiązuje się równanie całkowe Volterry

- równanie Volterry pierwszego rodzaju nie jest na ogół źle uwarunkowane!

Równanie Volterry drugiego rodzaju odpowiada równaniu macierzowemu

$$(\mathbf{K} - \mathbf{I})\vec{f} = \vec{g}$$

gdzie $\mathbf{K}$ jest macierzą trójkątną dolną

Rozważmy równanie

$$\int_a^x K(x,y)f(y)\mathrm{d}y = g(x)$$

Zakładamy, że jądro $K(x,y)$ nie znika w żadnym punkcie na przekątnej $y = x$, tzn.

$$K(x,x) \neq 0, \quad a \leq x \leq b$$

Przyjmujemy ponadto, że pochodne g', $K_x(x,y)$ i $K_y(x,y)$ istnieją i są ciągłe

Wówczas

$$K(x,x)f(x) + \int_a^x K_x(x,y)f(y)\mathrm{d}y = g'(x)$$

$\Rightarrow$ otrzymaliśmy równanie Volterry drugiego rodzaju postaci

$$f(x) + \int_a^x \frac{K_x(x,y)}{K(x,x)} f(y)\mathrm{d}y = \frac{g'(x)}{N(x,x)}$$

Inny sposób:

Niech

$$F(x) = \int_a^x f(y)\mathrm{d}y$$

Po scałkowaniu przez części równania Volterry pierwszego rodzaju otrzymujemy

$$[K(x,y)F(y)]_{y=a}^{y=x} - \int_a^x K_y(x,y)F(y)\mathrm{d}y = g(x)$$

co po pewnych przekształceniach daje

$$F(x) - \int_a^x \frac{K_y(x,y)}{K(x,x)}F(y)\mathrm{d}y = \frac{g(x)}{K(x,x)}$$

Nieliniowe równania całkowe

- w równaniach pierwszego rodzaju (Fredholma i Volterry) wyrażenie podcałkowe zamiast $K(x, y)f(y)$ miałoby postać
$$K(x, y, f(y))$$
- w równaniach drugiego rzędu wyrażenie podcałkowe byłoby postaci
$$K(x, y, f(x), f(y))$$
- równania całkowe Fredholma są dużo trudniejsze do rozwiązania niż ich liniowe odpowiedniki
- równania nieliniowe Volterry wymagają zwykle tylko niewielkich modyfikacji algorytmów rozwiniętych do rozwiązania równań liniowych

Układy równań całkowych

Układ m równań liniowych całkowych Fredholma o m funkcjach niewiadomych można przedstawić w postaci

$$f_k(x) - \sum_{l=1}^{m} \int_a^b K_{kl}(x,y) f_l(y) \mathrm{d}y = g_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

Podobnie, układ m równań całkowych Volterry ma postać

$$f_k(x) - \sum_{l=1}^{m} \int_a^x K_{kl}(x,y) f_l(y) \mathrm{d}y = g_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

Określamy w przedziale $(a, mb - (m-1)a)$ funkcje

$$\begin{aligned} g(x) &= g_k(x - (k-1)(b-a)) \\ f(x) &= f_k(x - (k-1)(b-a)) \end{aligned}$$

przy czym

$$(k-1)b - (k-2)a \leq x \leq kb - (k-1)a$$

$$k = 1, 2, \ldots, m$$

Podobnie, w kwadracie

$$
\begin{aligned}
a \leq \quad x \quad &< mb - (m-1)a \\
a \leq \quad y \quad &< mb - (m-1)a
\end{aligned}
$$

określamy jądro $K(x, y)$

$$K(x, y) = K_{kl}(x - (k-1)(b-a), y - (l-1)(b-a))$$

dla

$$
\begin{aligned}
(k-1)b - (k-2)a \leq \quad x \quad &< kb - (k-1)a \\
(l-1)b - (l-2)a \leq \quad y \quad &< lb - (l-1)a
\end{aligned}
$$

Wówczas układ równań równoważny jest równaniu

$$f(x) - \int_a^{mb-(m-1)a} K(x,y) f(y) \mathrm{d}y = g(x)$$

na przedziale rozszerzonym $(a, mb-(m-1)a)$

Przykłady równań całkowych w fizyce

Tłumiony oscylator harmoniczny

Równanie ruchu

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0$$

z warunkiem początkowym

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0$$

można przedstawić w postaci równania całkowego

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{2x_0\gamma}{\omega_0} \sin \omega_0 t - 2\gamma \int_0^t \mathrm{d}t' \cos \omega_0 (t - t') x(t')$$

Równanie Schrödingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

z $E > 0$ oraz potencjałem $V(x)$, który znika na zewnątrz przedziału $[-a/2, a/2]$, można przedstawić jako

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= e^{ikx} - \frac{im}{\hbar^2 k} e^{-ikx} \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x' e^{ikx'} V(x')\psi_2(x') \\ \psi_3(x) &= e^{ikx} \left[1 - \frac{im}{\hbar^2 k} \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x' e^{-ikx'} V(x')\psi_2(x')\right]\end{aligned}$$

$$\psi_2(x) = e^{ikx} - \frac{im}{\hbar^2 k} e^{-ikx} \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x' e^{ik|x-x'|} V(x')\psi_2(x')$$

Równanie Dysona w fizyce wielu cząstek

Transformata Fouriera jednocząstkowej funkcji Greena, zdefiniowanej wzorem

$$G_\alpha^\beta(\vec{q}, t-t') = -\langle \mathrm{T} a_{\vec{q}}^\alpha(t) a_{\vec{q}}^\beta(t') \rangle$$

spełnia równanie Dysona

$$G(q) = G_0(q) + G_0(q)\Sigma(q)G(q)$$

Bozonowe ciecze kwantowe

$$\Sigma = \tilde{\Sigma} + \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} J(q,p)G(p)G(q-p)J(p,q)$$

$\Rightarrow$ równanie całkowe na $G(q)$

Metoda kolejnych przybliżeń

Rozważmy liniowe równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju

$$f(x) - \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) \mathrm{d}y = g(x)$$

którego jądro jest ograniczone i ciągłe w kwadracie

$$D = \{(x,y) : a < x < b,\ a < y < b\}$$

z wyjątkiem $y = x$

Równanie całkowe można przepisać w postaci

$$f = g + Kf$$

gdzie operator K zdefiniowany jest wzorem

$$Kf \equiv \int_a^b K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

Operator K jest liniowy

$$\begin{aligned} K(f_1+f_2) &= \int_a^b K(x,y)[f_1(y)+f_2(y)]\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b K(x,y)f_1(y)\mathrm{d}y + \int_a^b K(x,y)f_2(y)\mathrm{d}y \\ &= Kf_1 + Kf_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f i g możemy traktować jako elementy pewnej przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$, którą operator K odwzorowuje w siebie

Zachodzi

$$(\mathcal{I} - K)f = g$$

$\Rightarrow$ równanie jest formalnie rozwiązane, jeżeli potrafimy obliczyć $(\mathcal{I} - K)^{-1}$, ponieważ (jeśli operator odwrotny jest dobrze określony)

$$f = (\mathcal{I} - K)^{-1} g$$

Najbardziej pomyślną sytuacją byłoby, gdyby operator K był w jakimś sensie „małym” operatorem, tak że

$$(\mathcal{I} - K)^{-1} = \mathcal{I} + K + K^2 + \ldots$$

Jeśli prawa strona powyższego równania „zbiega” się, to suma szeregu jest odwrotnością $(\mathcal{I} - K)$, ponieważ

$$(\mathcal{I} - K)(\mathcal{I} + K + K^2 + \ldots) = (\mathcal{I} + K + K^2 + \ldots)(\mathcal{I} - K) = \mathcal{I}$$

Szereg Neumanna

$$f = g + Kg + K^2 g + \ldots$$

Szereg ten odpowiada ciągowi kolejnych przybliżeń (z $f_0 = 0$):

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= g(x) + K f_0(x) = g(x) \\
f_2(x) &= g(x) + K f_1(x) = g(x) + K g(x) \\
&\vdots \\
f_n(x) &= g(x) + K f_{n-1} = g(x) + K g(x) + \ldots + K^{n-1} g(x)
\end{aligned}$$

Lemat 1 *Jeżeli funkcja g jest całkowalna w przedziale $\langle a, b\rangle$ i szereg Neumanna jest jednostajnie zbieżny w tym przedziale, to jego suma f stanowi rozwiązanie równania całkowego*

$$f = g + Kf,$$

przy czym rozwiązanie to jest funkcją całkowalną w tym przedziale.

Dowód Na mocy założonej zbieżności jednostajnej szeregu i twierdzeniu o całkowaniu wyraz po wyrazie, otrzymujemy

$$Kf = K(g + Kg + K^2 g + \ldots) = Kg + K^2 g + \ldots = f - g \qquad \blacksquare$$

Szereg Neumanna jest zbieżny jednostajnie, jeśli

$$|K| \equiv \max_{\substack{a<x<b \\ a<y<b}} |K(x,y)| < \frac{1}{b-a}$$

ponieważ wtedy, poczynając od drugiego wyrazu, można zmajoryzować szereg Neumanna zbieżnym szeregiem liczbowym

$$A|K| + A|K|^2(b-a) + A|K|^3(b-a)^2 + \ldots + A|K|^n(b-a)^{n-1} + \ldots$$

gdzie

$$A = \int_a^b |g(x)| \mathrm{d}x$$

Wniosek 1 *Warunkiem wystarczającym jednostajnej zbieżności Neumanna jest nierówność*

$$|K| < \frac{1}{b-a}$$

Wniosek 2 *Jeżeli funkcja jest g całkowalna w przedziale $\langle a, b\rangle$ i zachodzi powyższa nierówność, to szereg Neumanna jest zbieżny jednostajnie w przedziale $\langle a, b\rangle$, a jego suma jest rozwiązaniem liniowego równania całkowego Fredholma, przy czym rozwiązanie to jest funkcją całkowalną w tym przedziale.*

Twierdzenie 1 *Jeżeli funkcja g jest całkowalna w przedziale $\langle a, b\rangle$ i zachodzi nierówność*

$$|K| < \frac{1}{b-a},$$

to istnieje jedno i tylko jedno całkowalne w tym przedziale rozwiązanie równania całkowego Fredholma, które jest sumą jednostajnie zbieżnego szeregu Neumanna.

Dowód Dla dowodu twierdzenia wystarczy wykazać jednoznaczność rozwiązania, ponieważ jego istnienie wykazaliśmy już w dowodzie lematu. Załóżmy, że istnieją dwa różne rozwiązania: f i $\tilde{f}$. Ich różnica,

$$\varphi = f - \tilde{f}$$

spełnia równanie jednorodne o tym samym jądrze, co równanie wyjściowe,

$$\varphi(x) = K\varphi(x)$$

Zatem

$$\max_{a\leq x\leq b} |\varphi(x)| \leq |K|(b-a) \max_{a\leq x\leq b} |\varphi(x)|$$

Dowód (ciąg dalszy)
Gdyby

$$\varphi(x) \neq 0$$

to z powyższej nierówności otrzymalibyśmy

$$1 \leq |K|(b-a)$$

co jest sprzeczne z nierównością

$$|K| < \frac{1}{b-a} \qquad \blacksquare$$

Twierdzenie 2 *Jeżeli jądro liniowego równania Volterry drugiego rodzaju jest ciągłe i ograniczone w trójkącie*

$$T = \{(x, y) : a < y < x < b\}$$

a dana funkcja g jest całkowalna w przedziale $\langle a, b\rangle$, to istnieje jedno i tylko jedno całkowalne w tym przedziale rozwiązanie tego równanie. Można je przedstawić w postaci jednostajnie zbieżnego szeregu Neumanna.

Związek z równaniami różniczkowymi zwyczajnymi

Rozważmy równanie różniczkowe zwyczajne

$$a_0(x)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + a_2(x)u = 0$$

z warunkami początkowymi

$$u(a) = c_0, \quad u'(a) = c_1$$

Zakładamy przy tym, że współczynniki równania są ciągłe.

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + q(x)u = r(x)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + s(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + t(x)u$$

$$\begin{aligned} r(x) &= 1 - a_0(x) \\ p(x) - s(x) &= a_1(x) \\ q(x) - t(x) &= a_2(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ dowolne funkcje ciągłe $p(x)$ i $q(x)$ dobieramy tak, aby można było łatwo znaleźć dwa liniowo niezależne rozwiązania równania

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + q(x)u = 0$$

Niech $u_1(x)$ i $u_2(x)$ będą takimi rozwiązaniami

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

Szukamy rozwiązania postaci

$$u(x) = A(x)u_1(x) + B(x)u_2(x)$$

Otrzymujemy

$$A'(x)u_1(x) + B'(x)u_2(x) = 0$$

$$A'(x)u_1'(x) + B'(x)u_2'(x) = \frac{1}{1-r(x)}\{[r(x)u_1''(x) + s(x)u_1'(x) + t(x)u_1(x)]A(x) + [r(x)u_2''(x) + s(x)u_2'(x) + t(x)u_2(x)]B(x)\}$$

Stąd

$$\begin{aligned} A'(x) &= -[A(x)F_1(x) + B(x)F_2(x)]u_2(x) \\ B'(x) &= [A(x)F_1(x) + B(x)F_2(x)]u_1(x) \end{aligned}$$

$$F_j(x) = \frac{1}{[1 - r(x)]W(x)}[r(x)u_j''(x) + s(x)u_j'(x) + t(x)u_j(x)]$$

Całkując obustronnie powyższe wyrażenia otrzymamy układ równań całkowych

$$\begin{aligned} A(x) &= A(a) - \int_a^x \mathrm{d}y[A(y)F_1(y) + B(y)F_2(y)]u_2(y) \\ B(x) &= B(a) + \int_a^x \mathrm{d}y[A(y)F_1(y) + B(y)F_2(y)]u_1(y) \end{aligned}$$

Z warunków początkowych wynika

$$\begin{aligned} A(a)u_1(a) + B(a)u_2(a) &= c_0 \\ A(a)u_1'(a) + B(a)u_2'(a) &= c_1 \end{aligned}$$

Niech

$$f(x) = A(x)F_1(x) + B(x)F_2(x)$$

Mnożąc równania całkowe odpowiednio przez $F_1(x)$ i $F_2(x)$ i dodając stronami, otrzymamy

$$f(x) - \int_a^x \mathrm{d}y K(x,y) f(y) = A(a)F_1(x) + B(a)F_2(x)$$

$$K(x,y) = \det \begin{pmatrix} u_1(y) & u_2(y) \\ F_1(x) & F_2(x) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ równanie różniczkowe zwyczajne zastąpiliśmy równaniem całkowym Volterry