Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego

dla I roku fizyki i astronomii

Lista 11 18 XII 2002

1. Udowodnić, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{gdy} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{gdy} \quad x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna, a jej pochodna nie jest ciągła w zerze. (Wskazówka: dla $x \neq 0$ wyliczyć pochodną z reguł różniczkownania; w punkcie $x = 0$ wyliczyć pochodną z definicji.) Naszkicować wykres funkcji f i jej pochodnej.

2. Znaleźć pochodne następujących funkcyj:

$$f_1(x) = \ln\left(\sqrt{2\sin x + 1} + \sqrt{2\sin x - 1}\right),$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 \sqrt{x} + \ln\cos\sqrt{x}, \qquad f_3(x) = \ln\left|\frac{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|.$$

3. Wykorzystując tożsamość $a = \mathrm{e}^{\ln a}$ wyliczyć pochodne funkcyj: $f_1(x) = x^x$, $f_2(x) = (\sin x)^{\cos x}$.

4. Sprządzić wykres funkcji $f(x) = x^x$.

5. Wyliczyć pochodne funkcyj

a) $f_1(x) = \arccos\sqrt{\frac{x}{a}}, \qquad f_2(x) = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a-x}{x}},$

*b) $g_1(x) = \arcsin\sqrt{\frac{1-\sin x}{2}}, \qquad g_2(x) = -\frac{x}{2},$

*c) $h_1(x) = \cos^4\frac{x}{2} + \sin^4\frac{x}{2}, \qquad h_2(x) = \frac{\cos 2x}{4}.$

Skomentować otrzymane wyniki. W czym są podobne do siebie funkcje f_1 i f_2? *W czym funkcje g_1 i g_2 oraz h_1 i h_2?

*6. Udowodnić, że funkcja

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{gdy} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{gdy} \quad x = 0 \end{cases}$$

nie jest różniczkowalna w zerze. Naszkicować wykres funkcji g i jej pochodnej tam, gdzie ona istnieje.

Bernard Jancewicz