Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego
dla I roku fizyki i astronomii

Lista 12 8 I 2003

1. Niech $\alpha \in (0,1)$. Udowodnić nierówność $f(x) = x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha, \forall x > 0$. (Wskazówka: znaleźć maksimum funkcji f.) Sporządzić wykres funkcji f.

2. Stosując regułę de l'Hospitala wyliczyć następujące granice:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{2ax}}{\ln(1+x)}, \quad \text{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{\ln[\cos(2x^2 - x)]}, \quad \text{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3},$$

$$\text{d)}\ \lim_{x\to 0} x \ln x, \quad \text{e)}\ \lim_{x\to 0} x^x, \quad \text{f)}\ \lim_{x\to\infty} \left(x - x^2 \sin\frac{1}{x}\right) \quad \text{g)}\ \lim_{q\to 1} \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}.$$

3. Wyliczyć n-te pochodne funkcyj: a) $\sin x$, b) $\cos x$.

4. Czy funkcje sinus i cosinus mają rozwinięcie w szereg potęgowy? Jeśli tak, to zapisać te rozwinięcia.

5. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$. Gdzie wielomian $p(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ ma swoje ekstrema? Jak zależy od a, $b\,c$ to, czy są one maksimami czy minimami?

6. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$. Czy wielomian $p(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ ma na swoim wykresie punkt przegięcia?

*7. Wyliczyć n-te pochodne funkcyj: a) $\sinh x$, b) $\cosh x$.

*8. Czy funkcje sinus hiperboliczny i cosinus hiperboliczny mają rozwinięcie w szereg potęgowy? Jeśli tak, to zapisać te rozwinięcia.

Bernard Jancewicz