Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego
dla I roku fizyki i astronomii

Lista 3 16 X 2002

1. Znaleźć $\sup D_f$ oraz $\inf D_f$ dla dziedzin funkcyj f z zadania 8 na liście 2.

2. Znaleźć $\sup R_g$ oraz $\inf R_g$ dla obrazów funkcyj g z zadania 9 na liście 2.

3. W zadaniach 8 i 9 z listy 2 wskazać funkcje nakładające (suriektywne) jako odwzorowania D_f lub D_g w $\mathbb{R}$.

4. W zadaniu 9 z listy 2 wskazać funkcje wzajemnie jednoznaczne (iniektywne).

5. Niech będzie dana funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pokazać, że jeśli jest ona ścisle monotoniczna, to jest różnowartościowa.

6. Zakładając, że funkcje $f, g : D \to \mathbb{R}$ są monotoniczne, zbadać monotoniczność funkcyj $f + g$ oraz $f \cdot g$.

7. Dla jakich podstaw $a > 0$ funkcja wykładnicza $x \mapsto a^x$ jest rosnąca, a dla jakich malejąca?

8. Dla jakich podstaw $a > 0$ funkcja logarytmiczna $x \mapsto \log_a x$ o dziedzinie $(0, \infty)$ jest rosnąca, a dla jakich malejąca?

9. Podać przykład pary funkcyj, których złożenie jest przemienne, oraz przykład pary funkcyj, których złożenie nie jest przemienne.

10. Niech funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posiada funkcję odwrotną. Udowodnić, że jeśli f jest rosnąca to f^{-1} jest rosnąca, a jeśli f jest malejąca, to f^{-1} jest malejąca.

11. Czy wśród funkcyj linowych można znaleźć takie, które są odwrotne same do siebie? Ile ich jest?

12. Naszkicować wykresy dwóch możliwych złożeń funkcji entier (część całkowita) z funkcją $f(x) = x^2$.

13. Jakie wielomiany są funkcjami symetrycznymi (parzystymi), a jakie antysymetrycznymi (nieparzystymi)? Znaleźć część symetryczną i antysymetryczną dowolnego wielomianu.

14. Jakie pod względem symetrii jest złożenie funkcji antysymetrycznej f z funkcją symetryczną g? (Funkcja g jest zewnętrzna.)

15. Czy funkcja symetryczna może być różnowartościowa?

*16. Niech $f(n)$ oznacza liczbę dzielników liczby $n \in \mathbb{N}$ różnych od 1 i od niej samej. Jaki jest obraz funkcji f?

*17. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że $R_f = \mathbb{R}$ oraz $f \circ f = f$. Podać przykład funkcji liczbowej, dla której zachodzi $f \circ f = f$, ale jej obraz $R_f \neq \mathbb{R}$.

*18. Pokazać, że funkcja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = x + \frac{1}{x}$ jest rosnąca na przedziale $\langle 1, \infty)$, zaś malejąca na przedziale $(0, 1\rangle$. Nie wykorzystywać metod rachunku różniczkowego.

*19. Na wykładzie rozważano funkcje symetryczne względem początku układu. Jaki warunek powinna spełniać funkcja symetryczna względem prostej $x = a$? Jaki warunek należy nałożyć na jej dziedzinę?

*20. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Określamy *funkcję wymierną* postaci

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Podać dziedzinę i obraz tej funkcji. Znaleźć funkcję g odwrotną do niej. Sprawdzić złożenia w obydwu kolejnościach $g \circ f$ i $f \circ g$. Czy funkcja odwrotna istnieje dla wszystkich możliwych parametrów a, b, c, d?

*21. Czy wśród funkcyj wymiernych z poprzedniego zadania można znaleźć takie, które są odwrotne same do siebie? Ile ich jest?

Bernard Jancewicz