Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego

dla I roku fizyki i astronomii

Lista 16 9 IV 2003

1. Zapisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez dwa punkty $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Zrobić to samo w przypadku $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

2. Niech $A, B, C \in \mathbb{R}$ nie będą zerami jednocześnie, $D \in \mathbb{R}$. Sprawdzić, że równanie płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$, do której wektor $\mathbf{n} = A\mathbf{e}_1 + B\mathbf{e}_2 + C\mathbf{e}_3$ jest prostopadły, ma postać

$$Ax + By + Cz = D.$$

3. Sprawdzić, że norma określona w $\mathbb{R}^n$ za pomocą iloczynu skalarnego spełnia tożsamości

$$2 \parallel \mathbf{x} \parallel^2 + 2 \parallel \mathbf{y} \parallel^2 = \parallel \mathbf{x} + \mathbf{y} \parallel^2 + \parallel \mathbf{x} - \mathbf{y} \parallel^2,$$

$$\parallel \mathbf{x} + \mathbf{y} \parallel^2 - \parallel \mathbf{x} - \mathbf{y} \parallel^2 = 4\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

4. Na płaszczyźnie mamy dwa ciągi wektorów dane wzorami

$$\text{a)} \quad \mathbf{r}_k = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4k}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4k}\right) \right\},$$

$$\text{b)} \quad \mathbf{r}_k = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{4}\right) \right\}.$$

Wskazać po osiem pierwszych wyrazów tych ciagów. Który z tych ciągów jest zbieżny? Dla zbieżnego wyliczyć granicę.

Zadanie 5 nie jest obowiązkowe. Można je zrobić tylko w tych grupach, w których znajdzie się chętny student lub studentka.

5. Wykorzystując nierówność Schwarza udowodnić nierówność

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)^2 \leq n \left(1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right).$$

Bernard Jancewicz