Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego
dla I roku fizyki i astronomii

Lista 18 16 IV 2003

5. Wyliczyć następujące granice pod warunkiem, że one istnieją:

$$\text{a)} \lim_{(x,y)\to(-2,4)}(6x^2 - 3xy + y - 3), \qquad \text{b)} \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy^2+3x}{xy-1},$$

$$\text{c)} \lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^2-3xy^2+2}{x+2y}.$$

Za każdym razem należy wskazać dziedzinę funkcji i rozstrzygnąć, czy istnieje niby-kula otwarta otaczająca punkt graniczny $\mathbf{a}$ taka, że funkcja jest określona w całej niby-kuli bez punktu $\mathbf{a}$.

2. Znaleźć obie pochodne cząstkowe dla funkcyj:

$$\text{a)}\ f(x,y) = (x^2-y^2)\mathrm{e}^{xy}, \quad \text{b)}\ g(z,t) = \frac{z^2-t^2}{z^2+t^2}.$$

Wskazać, w jakich punktach te pochodne istnieją.

3. Wyliczyć pochodne cząstkowe $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ dla podanych funkcyj we wskazanych punktach:

$$\text{a)}\ z = \sqrt{a^2-x^2-y^2};\ \ (0,0),\ (a/2, a/2), \qquad \text{b)}\ z = \ln\sqrt{1+xy};\ \ (1,2),\ (0,0).$$

4. Pokazać, że następujące funkcje są różniczkowalne w swoich dziedzinach

$$\text{a)}\ f(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \text{b)}\ f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Bernard Jancewicz