Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego

dla I roku fizyki i astronomii

Lista 19 29 IV 2003

1. Mamy w $\mathbb{R}^3$ krzywą C o parametryzacji $\boldsymbol{\sigma} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^3$.

a) Znaleźć taką funkcję $f : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$, aby przez złożenie $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\sigma} \circ f$ otrzymać parametryzację $\boldsymbol{\kappa} : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}^3$ tej samej krzywej C.

b) Znaleźć parametryzację krzywej $-C$, co oznacza krzywą C obieganą w przeciwną stronę.

2. Mamy dwie krzywe C_1 i C_2 o parametryzacjach odpowiednio $\boldsymbol{\sigma}_1 : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^3$ i $\boldsymbol{\sigma}_2 : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}^3$ takie, że koniec krzywej C_1 jest początkiem krzywej C_2. Znaleźć parametryzację krzywej $C_1 \cup C_2$ powstałej przez połączenie krzywej C_1 z krzywą C_2. **Rozwiązanie Zadania 2 należy oddać w postaci pisemnej.**

3. Mamy dwie krzywe C_1 i C_2 o parametryzacjach $\boldsymbol{\sigma}_1$ i $\boldsymbol{\sigma}_2$, łączące te same dwa punkty. Znaleźć parametyzację krzywej zamkniętej $C_1 \cup (-C_2)$ powstałej przez połączenie krzywej C_1 z krzywą przeciwną do C_2.

4. Niech $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Mamy funkcję $f : D_f \to \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

a) Znaleźć poziomice tej funkcji.

b) Wyliczyć z definicji pochodną dążnościową tej funkcji z dążnością $\mathbf{v} = (1, \alpha)$ w różnych punktach prostej $y = \alpha x$. Porównać wyniki podpunktów a i b.

Bernard Jancewicz