Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego
dla I roku fizyki i astronomii

Lista 20 30 IV 2003

1. Mamy funkcję $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do poziomicy tej funkcji w punkcie $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Uczynić to samo dla funkcji $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ danej wzorem $g(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ w tym samym punkcie $\mathbf{a}$. Czym różnią się tak otrzymane powierzchnie?

2. Dla podanych funkcyj wskazać dziedziny oraz wyliczyć po cztery pochodne cząstkowe drugiego rzędu:

$$\text{a) } f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \quad \text{b) } g(x,y) = \cos(xy^2), \quad \text{c) } h(x,y) = \frac{1}{\cos^2 x + \mathrm{e}^{-y}}.$$

3. Funkcja $u(x,y)$ klasy C^2 spełniająca *równanie Laplace'a*: $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ nazywa się *funkcją harmoniczną*. Które z następujących funkcyj są harmoniczne?

$$\text{a) } u(x,y) = x^2 - y^2, \quad \text{b) } u(x,y) = xy, \quad \text{c) } u(x,y) = \sin y \cosh y,$$

$$\text{d) } u(x,y) = x^2 + y^2, \quad \text{e) } u(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y.$$

Bernard Jancewicz