Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego
dla I roku fizyki i astronomii

Lista 4 23 X 2002

1. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $a, c \neq 1$. Udowodnić tożsamość

$$\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

2. Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie zadany indukcyjnie:

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2} \quad \text{dla} \quad n \geq 1.$$

Wykazać, że jest on ograniczony z góry przez liczbę 2. Czy jest to ciąg ograniczony? Czy jest monotoniczny?

3. Niech $a > 0$ i $c > 1$. Wykazać, że ciąg $\{a_n\}$ zadany indukcyjnie:

$$a_1 = \frac{a}{c+a}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{c + a_n} \quad \text{dla} \quad n \geq 1$$

jest monotoniczny i ograniczony.

4. Pokazać z definicji, że $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

5. Sprawdzić, że gdyby rozważać nierówność $\left|\frac{1}{n} - g\right| < \epsilon$ dla jakiejkolwiek liczby $g \neq 0$, to do ϵ nie udałoby się dobrać N tak, żeby ta nierówność była spełniona dla wszystkich $n > N$.

6. Pokazać z definicji, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1.$$

7. Sprawdzić, że gdyby rozważać nierówność

$$\left|\frac{2n-1}{2n+1} - g\right| < \epsilon$$

dla liczby $g > 1$, to do ϵ nie udałoby się dobrać N tak, żeby ta nierówność była spełniona dla wszystkich $n > N$.

8. Wykazać z definicji, że dla $|p| < 1$ ciąg o wyrazach $a_n = p^n$ jest zbieżny do zera.

9. Dla jakich $p \in \mathbb{R}$ o własności $|p| \geq 1$ ciąg o wyrazach $a_n = p^n$ jest zbieżny?

Bernard Jancewicz