Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego

dla II roku fizyki i astronomii

Lista 2 6 X 2003

1. Niech $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$. Wykorzystując zamianę współrzędnych kartezjańskich na biegunowe wyliczyć następujące całki podwójne

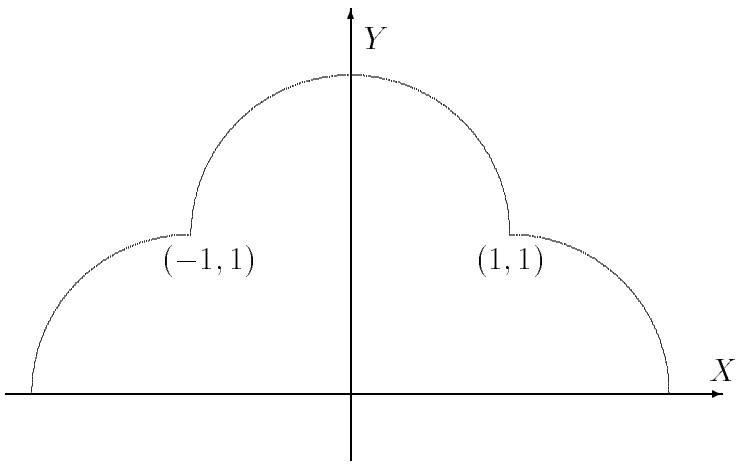
$$\text{a)} \int\limits_D \sin(x^2+y^2)\,ds, \qquad \text{b)} \int\limits_D \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\,ds.$$

2. Niech $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0,\ \ 0 \leq y/x \leq 1\}$. Wyliczyć następujące całki podwójne

$$\text{a)} \int\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,ds, \qquad \text{b)} \int\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\,ds.$$

3. Płaska jednorodna tarcza kołowa o promieniu R i masie m obraca się z prędkoscią kątową ω wokół swojego środka. Znaleźć jej energię kinetyczną.

4. Przedstawić całkę podwójną $\int\limits_D f(\mathbf{r})\,ds$ w postaci sumy trzech całek iterowanych dla obszaru D ukazanego na rysunku, gdzie fragmenty trzech okręgów mają promienie 1.



5. Niech $D \subset \mathbb{R}^3$. Mamy funkcję $f : U \to \mathbb{R}$ o zmiennych rozdzielonych, tzn. $f(x,y,z) = \phi_1(x)\phi_2(y)\phi_3(z)$. Wykazać, że całka po prostopadłościanie rozkłada się na iloczyn trzech całek:

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d \int\limits_e^h f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b \phi_1(x)dx \int\limits_c^d \phi_2(y)dy \int\limits_e^h \phi_3(z)dz.$$

Bernard Jancewicz