Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego

dla II roku fizyki i astronomii

Lista 4 17 X 2003

1. Niech krzywa K będzie zadana przez parametryzację $\boldsymbol{\sigma} : \langle -\pi/\omega, 3\pi/\omega \rangle \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\sin \omega t, -\cos \omega t, vt)$. Omówić kształt tej krzywej i znaleźć jej długość. Wyliczyć całki krzywolinowe $\int\limits_K f\, dl$ następujących funkcyj skalarnych:

a) $f(x, y, z) = x + y + z$; b) $f(x, y, z) = \cos az$.

2. Niech $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadane wzorem $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$. Wyliczyć całkę tego pola wektorowego po następujących krzywych

a) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t,\, t,\, t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$; b) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t^2,\, 3t,\, 2t^3)$, $t \in \langle -1, 2 \rangle$.

3. Wyliczyć następujące całki krzywoliniowe:

a) $\int\limits_K (x\, dy - y\, dx)$, $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$;

b) $\int\limits_K (yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz)$, gdzie K składa się z prostoliniowych odcinków łączących punkty $(-1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ oraz $(0, 0, 1)$.

Bernard Jancewicz