Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego

dla I roku fizyki i astronomii

Lista 5 6 XI 2002

1. Dla następujących ciągów stwierdzić z uzasadnieniami, które są zbieżne, a dla zbieżnych znaleźć granice. Dla ciągów ograniczonych wskazać możliwe granice podciągów zbieżnych.

$$\frac{n^2-1}{4n(n-1)}, \quad \frac{\cos(n\pi)}{n}, \quad \frac{n^2+n-2}{2n^2-3n}\cos(n\pi),$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n, \quad (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \quad \left(\cos\frac{2\pi n}{3}\right)^n.$$

2. Sprawdzając warunek Cauchy'ego wykazać, że ciąg $\{a_n\}$ określony wzorami $a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}$, $a_{2k} = \frac{2k}{2k+2}$ nie ma granicy. Wskazać możliwe granice dla jego podciągów.

3. Wykazać, że ciąg określony w zadaniu 2 z listy 4 jest zbieżny. Znaleźć jego granicę.

4. Udowodnić, ze dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

5. Udowodnić, że ciąg $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$ jest zbieżny. Wskazówka: Oszacować ten ciąg z góry przez ciąg zbieżny do zera oraz skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

6. Wykazać, że ciąg $a_n = \frac{n^2+2n-2}{n+1}$ jest rosnący. Czy jest on rozbieżny do plus nieskończoności?

7. Znaleźć granicę ciągu $\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}$. Wskazówka: Wykorzystać tożsamość

$$1-\frac{1}{n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}.$$

8. Obliczyć granice ciągów o wyrazach

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}}, \quad \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \quad \sqrt{n^2+n}-n, \quad \sqrt[3]{n^3+4n^2}-n,$$

$$\frac{4^{n-1}-5}{2^{2n}-7}, \quad \frac{3^n-2^n}{4^n-3^n}, \quad \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}.$$

9. Jeśli wiadomo, że ciąg $\{\frac{1}{n}\}$ jest zbieżny, to jak wykazać, że ciąg $\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^k\right\}$ dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$ jest zbieżny?

*10. Znaleźć granicę ciągu $\{a_n\}$ o wyrazach

$$a_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}.$$

*11. Wykazać, że ciąg $\{b_n\}$ o wyrazach $b_n = \sin n$ nie ma granicy.

*12. Niech będzie ciąg zadany indukcyjnie $a_{n+1} = a_n + 1/a_n^2$, przy czym $a_1 > 0$. Wykazać, że jest to ciąg rozbieżny. Wskazówka: Przeprowadzić dowód nie wprost.

Bernard Jancewicz