Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego
dla II roku fizyki i astronomii

Lista 11 1 XII 2003

1. Przy założeniu jednostajnej zbieżności zespolonego szeregu Fouriera

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}$$

znaleźć całkowy wzór na współczynniki c_n.

2. Wykorzystując wzór z poprzedniego zadania wykazać, że jeśli $f(x)^* = f(x)$, to $c_n^* = c_{-n}$, gdzie gwiazdka oznacza sprzężenie zespolone.

3. Niech różniczkowalna funkcja f ma rozwinięcie w zespolony szereg Fouriera:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}$$

i podobnie jej pochodna:

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \mathrm{e}^{inx}.$$

Znaleźć związek między współczynnikami c_n i g_n.

4. Niech funkcja $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jak określić ją w punktach $-\pi, \pi$, aby stała się okresowa i spełniała założenia twierdzenia o rozwinięciu w szereg Fouriera? Znaleźć jej rozwinięcie w zespolony szereg Fouriera. Odtworzyć z niego szereg rzeczywisty.

Bernard Jancewicz