Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego
dla I roku fizyki i astronomii

Lista 6 13 XI 2002

1. Zbadać zbieżność szeregów za pomocą kryterium porównawczego:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}},\qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}\qquad \text{c)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\qquad \text{d)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}.$$

2. Zbadać zbieżność szeregów za pomocą kryterium d'Alemberta lub Cauchy'ego:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n},\qquad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}},\qquad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n},\qquad \text{d)}\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{7^{3n}}{(2n-5)!}.$$

3. Zbadać, czy podane szeregi są zbieżne bezwzględnie, zbieżne warunkowo, czy rozbieżne:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},\qquad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{2^n},\qquad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)},\qquad \text{d)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{3}.$$

4. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt[3]{n^3+4}-n\right]$.

*5. Dany jest szereg zbieżny $a_1+a_2+a_3+\ldots$ o wyrazach nieujemnych i takich, że $a_1\le a_2\le a_3\le\ldots$ Udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty}(na_n)=0$.

*6. Dany jest szereg zbieżny $a_1+a_2+a_3+\ldots$ o wyrazach nieujemnych. Wykazać, że szereg $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots$ też jest zbieżny. Czy założenie $a_n\ge 0$ jest istotne?

*7. Niech $c>o$. Zbadać zbieżność szeregu o wyrazach $a_n=\frac{c^n n!}{n^n}$ w zależności od wartości stałej c.

*8. Zbadać zbieżność szeregów naprzemiennych o wyrazach

$$\text{a)}\ a_n=\sqrt[n]{3}-1,\qquad \text{b)}\ b_n=\frac{\ln n}{n}.$$

Czy są one zbieżne bezwzględnie?

Bernard Jancewicz