Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego

dla I roku fizyki i astronomii

Lista 7 20 XI 2002

1. Wykazać, że
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

2. Oszacować z dołu pole powierzchni koła o promieniu r przybliżając to koło wpisanymi weń wielokątami foremnymi.

3. Oszacować z góry pole powierzchni koła przybliżając je opisanymi na nim wielokątami foremnymi.

4. Sporządzić wykres funkcji *entier*. Wyliczyć granice jednostronne tej funkcji w dowolnym punkcie całkowitym. W jakich punktach ta funkcja jest ciągła? W jakich punktach jest ciągła prawostronnie?

5. Niech $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f : D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$. Znaleźć z definicji lewostronną (niewłaściwą) granicę tej funkcji w zerze.

6. Niech $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f : D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$. Pokazać, że ta funkcja nie ma jednostronnych granic w zerze ani właściwych, ani niewłaściwych. [Patrz: K. Kuratowski *Rachunek różniczkowy i całkowy*, str. 67.] Naszkicować wykres tej funkcji.

7. Podać definicje a) Heinego, b) Cauchy'ego następujących równości
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5, \quad \lim_{x\to 2-} f(x) = 5, \quad \lim_{x\to -\infty} = 5, \quad \lim_{x\to 2} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$$

8. Znaleźć granice
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}, \quad \lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^5+32}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^k-1}{x^2-1},\ k\in\mathbb{N}, \quad \lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\sin^2 x},$$
$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos x-\cos(\pi/4)}{\sin x-\sin(\pi/4)}, \quad \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(-1)^{[x]}}{x}, \quad \lim_{x\to 4}\frac{(x-3)(-1)^{[x]}}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}.$$

9. Sporządzić wykresy funkcyj
$$\frac{x}{x+1}, \quad x-[x], \quad x\sin\frac{1}{x}, \quad x^2\sin\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$$
i omówić ich granice w punkcie 0.

Bernard Jancewicz