Rozdział 3

FUNKCJE I CIĄGŁOŚĆ

3.1 Granica funkcji w punkcie

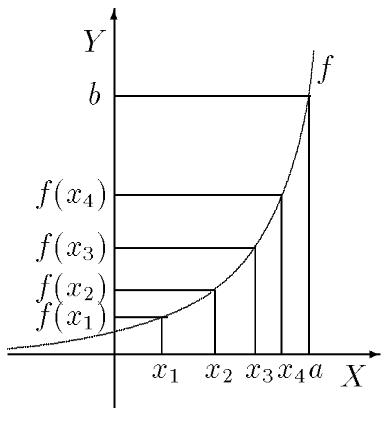
Granica funkcji jest podstawowym pojęciem, na którym opiera się rachunek różniczkowy i całkowy.

Niech $D_f \subset \mathbb{R}$, $f : D_f \to \mathbb{R}$. Liczbę b nazywamy *prawostronną granicą funkcji f w punkcie $a \in \mathbb{R}$*, jeśli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do a o elementach $x_n \in D_f$, $x_n > a$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Piszemy wtedy

$$\lim_{x\to a+} f(x) = b.$$

Liczbę b nazywamy *lewostronną granicą funkcji f w punkcie $a \in \mathbb{R}$*, jeśli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do a o elementach $x_n \in D_f$, $x_n < a$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Piszemy wtedy

$$\lim_{x\to a-} f(x) = b.$$



Rysunek 3.1

Na Rys. 3.1 ilustrujemy granicę lewostronną. Na osi poziomej zaznaczono kilka elementów ciągu $\{x_n\}$ dążącego z lewej strony do a, zaś na osi pionowej zaznaczono odpowiadające im wartości funkcji $f(x_n)$, które powinny dążyć do b.

Liczba a nie musi należeć do dziedziny funkcji f, ale musi być dostatecznie blisko niej, aby znalazły się ciągi z dziedziny dążące do niej. Tych samych symboli używa się na oznaczenia granic niewłaściwych, tzn. $a = \pm\infty$ lub $g = \pm\infty$. Granice: lewostronną i prawostronną nazywamy łącznie *granicami jednostronnymi.*

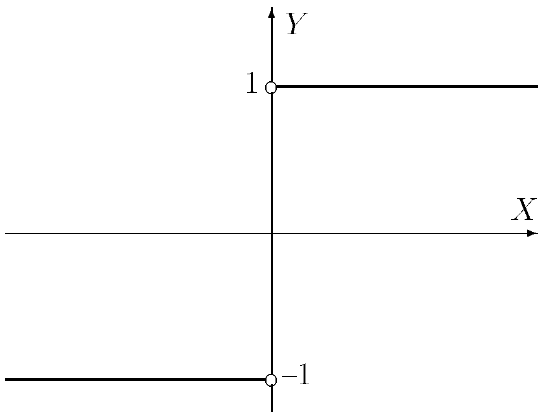
PRZYKŁAD 1. Niech $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, określamy $f_1 : D_{f_1} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f_1(x) = \frac{x}{|x|}.$$

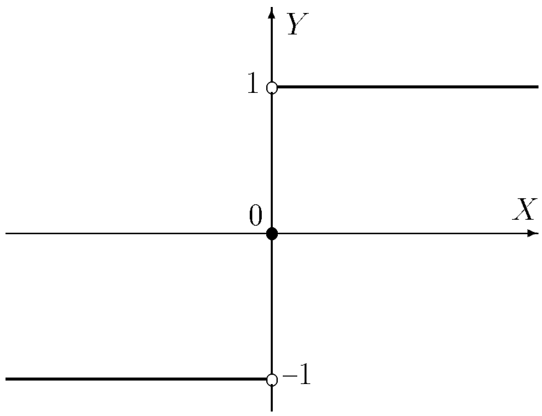
Tę samą funkcję można też zapisać wzorem klamrowym:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x > 0, \\ -1 & \text{gdy} \quad x < 0. \end{cases}$$

Ukazaliśmy ją na Rys. 3.2.



Rysunek 3.2



Rysunek 3.3

Niektórzy wprowadzają inną funkcję o większej dziedzinie $D_f = \mathbb{R}$ określoną następującym wzorem klamrowym:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x > 0, \\ 0 & \text{gdy} \quad x = 0, \\ -1 & \text{gdy} \quad x < 0. \end{cases},$$

która na węższej dziedzinie pokrywa się z poprzednią funkcją. Pokazana jest ona na Rys. 3.3. Możemy powiedzieć, że funkcja f jest *rozszerzeniem* funkcji f_1, albo że f_1 jest *zawężeniem* funkcji f. Funkcję f nazywa się *funkcją znakową*, gdyż informuje ona, jaki jest znak jej argumentu. W związku z tym występuje oznaczenie $f = \operatorname{sgn}$ od łacińskiego *signum* = znak. Możemy przeto napisać

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x > 0, \\ 0 & \text{gdy} \quad x = 0, \\ -1 & \text{gdy} \quad x < 0. \end{cases}$$

Funkcja ta ma obie granice jednostronne w zerze:

$$\lim_{x \to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1, \qquad \lim_{x \to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1.$$

Granice te są różne od siebie, a na dodatek różne od wartości funkcji w tym punkcie.

PRZYKŁAD 2. Funkcja $f:\ x \mapsto 1/x$ ma za dziedzinę zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ma ona granice niewłaściwe w zerze:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty,$$

bo dla każdego ciągu $\{x_n\}$ dążącego do zera z lewej strony ciąg jego odwrotności dąży do minus nieskończoności, zaś dla ciągu dążącego do zera z prawej strony ciąg odwrotności dąży do plus nieskończoności. Drugą część tego zdania można pokazać następująco. Niech ciąg $\{x_n\}$ dąży do zera od prawej strony, czyli

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : 0 < x_n < \epsilon.$$

Dla dowolnego $M > 0$ podstawiamy $\epsilon = M^{-1}$. Na podstawie napisanego zdania istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $n > N$ zachodzi $x_n < M^{-1}$. Mnożąc tę nierówność stonami przez $M > 0$ i dzieląc przez $x_n > 0$ dostajemy $M < 1/x_n$. Dodając kwantyfikatory możemy napisać takie zdanie:

$$\forall M > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : f(x_n) = \frac{1}{x_n} > M.$$

A to oznacza, ze ciąg $\{f(x_n)\}$ dąży do nieskończoności.

Teraz przejdziemy do zwykłej granicy funkcji w punkcie. Niech $D_f \subset \mathbb{R}$, $f:\ D_f \to \mathbb{R}$. Liczbę b nazywamy *granicą funkcji f w punkcie* a i symbolicznie zapisujemy

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

jeśli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do a o elementach $x_n \in D_f,\ x_n \neq a$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Nie jest to jedyna definicja granicy funkcji, dlatego nosi ona nazwę *definicji Heinego*. [Heinrich Eduard Heine (1821–1881) – matematyk niemiecki.] W takim razie warunkiem koniecznym istnienia granicy funkcji w punkcie a jest istnienie granic jednostronnych, bo powiedziane jest „dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do a", więc także dla ciągu dążącego do a po wartościach mniejszych albo większych od a. Poza tym obie granice jednostronne muszą być takie same, bo napisane jest, że dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do a ciąg $\{f(x_n)\}$ ma tę samą granicę b.

PRZYKŁAD 3. Pokażemy, że funkcja $f : x \mapsto \cos x$ ma w zerze granicę jeden. Mamy zapewnić nierówność $|f(x_n) - 1| < \epsilon$. W tym celu skorzystamy z tożsamości trygonometrycznej

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}.$$

Dla $x \geq 0$ zachodzi nierówność $\sin x \leq x$, co widać z Rys. 3.4. gdzie zaznaczono łuk okręgu o promieniu jeden. Wtedy x jest jednocześnie kątem w radianach i długością odpowiadającego mu łuku, a sinus x jest zaznaczoną wysokością. Widzimy, że dla $x > 0$ zachodzą nierówności

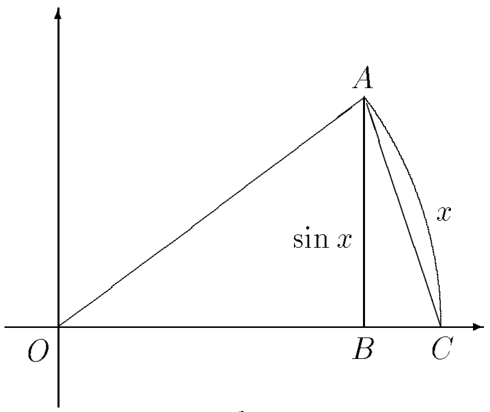
$$\sin x = |AB| < |AC| < x,$$

skąd wspomniana nierówność $\sin x \leq x$. Piszemy nierówność słabą, bo dla $x = 0$ wszystko staje się zerem i jest sobie równe. Dodając moduły można napisać $|\sin x| \leq |x|$, potem $\sin^2 x \leq x^2$, potem $\sin^2 \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{4}x^2$, więc

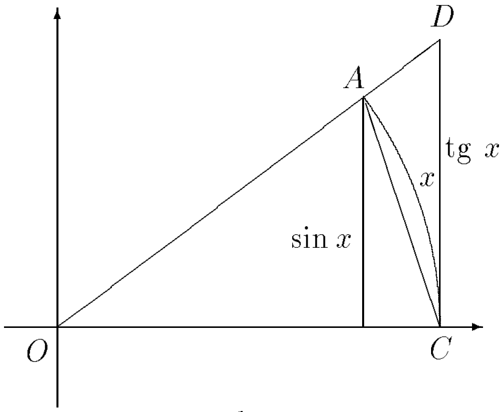
$$|1 - \cos x| \leq \frac{1}{2}x^2.$$

Jeśli ciąg $\{x_n\}$ dąży do zera, to ciąg $\left\{\frac{1}{2}x_n^2\right\}$ też dąży do zera więc dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n > N$ mamy $|\cos x_n - 1| < \epsilon$. A to oznacza, że $\lim f(x_n) = \lim \cos x_n = 1$. Skoro ciąg $\{x_n\}$ dążący do zera był dowolny, to pokazaliśmy, że

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$



Rysunek 3.4



Rysunek 3.5

PRZYKŁAD 4. Niech $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, określamy funkcję $f : D_f \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Funkcja ta jest *symetryczna*, tzn. $f(-x) = f(x)$. Znajdziemy granicę tej funcji w zerze. Powołamy się na to, że pole powierzchni wycinka koła o promieniu r i kącie α (w radianach) wynosi $\frac{1}{2}\alpha r^2$. W takim razie dla wycinka koła o promieniu jeden i kącie x jego pole wynosi $\frac{x}{2}$. Na Rys. 3.5 porównujemy pole wycinka kołowego o promieniu jeden i kącie x z polami trójkątów OCA o wysokości $\sin x$ oraz OCD o wysokości $\operatorname{tg} x$. W takim razie pola tych trójkątów wynoszą odpowiednio $\frac{1}{2}1 \cdot \sin x$ oraz $\frac{1}{2}1 \cdot \operatorname{tg} x$. Widzimy więc że, dla kątów w pierwszej ćwiartce, czyli dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$ pola powierzchni trzech figur: trójkąta OCA, wycinka koła jednostkowego i trójkąta OCD są coraz większe: $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$, a stąd

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \tag{3.1}$$

Drugą z tych nierówności mnożyny stronami przez $\frac{\cos x}{x}$, co daje

$$\cos x < \frac{\sin x}{x}.$$

Pierwszą z nierówności (3.1) dzielimy przez x:

$$\frac{\sin x}{x} < 1.$$

Możemy dwie ostatnie nierówności napisać w jednym szeregu:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{3.2}$$

Wszystkie stojące tu funkcje są symetryczne, więc od tej chwili możemy dopuścić również $x < 0$ zachowując prawdziwość tych nierówności.

Weźmy teraz dowolny ciąg $\{x_n\}$ dążący do zera. Nierówności (3.2) przyjmują postać

$$\cos x_n < \frac{\sin x_n}{x_n} < 1.$$

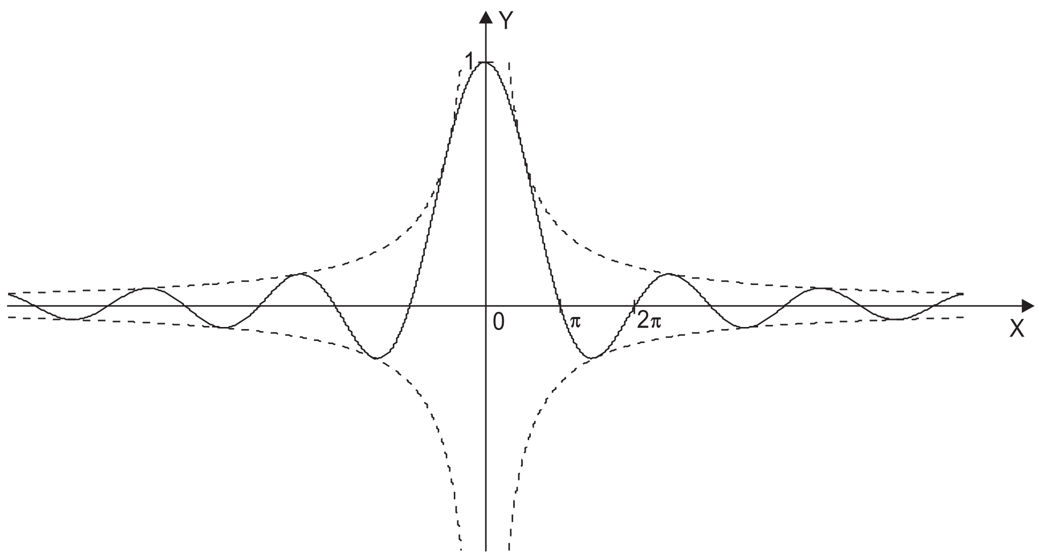
Z poprzedniego przykładu wiemy, że lewy ciąg dąży do jedynki; prawy ciąg jest stały, więc z twierdzenia o trzech ciągach mamy pewność, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1.$$

Skoro ciąg $\{x_n\}$ dążący do zera jest dowolny, to pokazaliśmy, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Na Rys. 3.6 ukazaliśmy wykres omawianej funkcji. Skoro $\sin x$ jest zawarty między -1 a 1, to wykres iloczynu $\frac{1}{x}\sin x$ mieści się między wykresem funkcji $\frac{1}{x}$ a $-\frac{1}{x}$. Dwa ostatnie wykresy to cztery hiperbole zaznaczone linią przerywaną.



Rysunek 3.6

Symbolu $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ używa się również na oznaczenie *granicy niewłaściwej*, na przykład

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty.$$

Natomiast

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \tag{3.3}$$

nie istnieje, gdyż granice jednostronne wynoszą

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty.$$

Skoro one są różne, to granica (3.3) nie może istnieć.

Oprócz granicy funkcji w punkcie skończonym rozważa się również *granice w nieskończonościach.* Otóż przez

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

oznacza się granicę ciągów $\{f(x_n)\}$ takich, że

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty, \tag{3.4}$$

jeśli granica $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ jest taka sama dla każdego ciągu $\{x_n\}$ spełniającego (3.4). Podobnie przez

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

oznacza się granicę ciągów $\{f(x_n)\}$ takich, że

$$\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty, \tag{3.5}$$

jeśli granica $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ jest taka sama dla każdego ciągu $\{x_n\}$ spełniającego (3.5).

Twierdzenie 1. Jeśli dwie funkcje f i g mają granicę w punkcie a, to suma, różnica, iloczyn i iloraz tych funkcyj mają granice w punkcie a oraz zachodzą wzory:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \qquad \text{jeśli} \qquad \lim_{x\to a} g(x)\neq 0,$$

tzn. granica sumy jest sumą granic itd.

Dowód tylko dla ostatniego przypadku. Załóżmy, że

$$\lim_{x\to a} f(x)=A, \qquad \lim_{x\to a} g(x)=B\neq 0. \tag{3.6}$$

Wybieramy dowolny ciąg $\{x_n\}$ dążący do a, czyli $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, przy czym $x_n \neq a$. Z założenia (3.6) mamy więc

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A, \qquad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = B.$$

Na mocy wzoru (2.15) dotyczącego granicy ilorazu ciągów wiemy, że istnieje granica ilorazu tych ciągów $f(x_n)/g(x_n)$ oraz zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim_{n\to\infty} g(x_n)} = \frac{A}{B}.$$

Dzięki dowolności ciągu $\{x_n\}$ dążącego do a możemy napisać

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B},$$

a na mocy (3.6)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}. \quad \blacksquare$$

Podobne twierdzenie jest prawdziwe dla granic jednostronnych oraz gdy zastąpić a przez ∞ lub $-\infty$. W przypadku sumy i różnicy twierdzenie jest również prawdziwe wtedy, gdy jedna z granic po prawej stronie jest niewłaściwa.

PRZYKŁAD 5. Pokażemy, że

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem takim, że $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Przyjmijmy $k_n = [x_n]$. Z definicji funkcji *entier* mamy

$$[x] \leq x < [x] + 1, \tag{3.7}$$

więc możemy napisać $k_n \leq x_n < k_n + 1$, a stąd dla $x_n > 1$

$$\frac{1}{k_n + 1} \leq \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{k_n},$$

$$1 + \frac{1}{k_n + 1} \leq 1 + \frac{1}{x_n} \leq 1 + \frac{1}{k_n}.$$

Po wzięciu tych samych potęg nierówności się zachowują, a po wzięciu coraz większych potęg tym bardziej się zachowują:

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1},$$

albo

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n+1} \frac{1}{1 + \frac{1}{k_n+1}} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right). \tag{3.8}$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, a $k_n > x_n - 1$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = \infty$. Skoro $\{k_n\}$ jest podciągiem ciągu liczb naturalnych, a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, to wnosimy stąd, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = \mathrm{e}.$$

Chcemy to wykorzystać w nierównościach (3.8). Zauważmy, że zachodzi także

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} = \mathrm{e},$$

bo ciąg $\{k_n+1\}$ też dąży do nieskończoności. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{k_n+1}} = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right) = 1,$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach dostajemy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{y_n} = \mathrm{e}.$$

Skoro ciąg $\{x_n\}$ jest dowolny rozbieżny do nieskończoności, to możemy napisać granicę samej funkcji

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}.$$

PRZYKŁAD 6. Pokażemy, że

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}^{-1}.$$

Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Jak przedtem wybieramy $k_n = [x_n]$. Z (3.7) mamy $k_n \le x_n$, a stąd $\frac{1}{k_n} \ge \frac{1}{x_n}$, potem $-\frac{1}{k_n} \le -\frac{1}{x_n}$, wreszcie

$$\left(1-\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} \le \left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{k_n+1}.$$

Liczba w nawiasie jest mniejsza od jedynki, więc nierówność $k_n+1 > x_n$ wynikająca z (3.7) daje

$$\left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{k_n+1} \le \left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}.$$

Prawą stronę można dalej powiększać

$$\left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le \left(1-\frac{1}{k_n+1}\right)^{x_n} \le \left(1-\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}.$$

Zostawmy tylko dwie nierówności krańcowe

$$\left(1-\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} \le \left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le \left(1-\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}.$$

Z zadania 1 na liście 10 wiemy, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}}$, więc podobnie jak w poprzednim przykładzie z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Skoro ciąg $\{x_n\}$ jest dowolny rozbieżny do nieskończoności, to możemy napisać

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Przechodzimy do rozważenia granic złożenia dwóch funkcyj. Mamy dwie funkcje $g: D_g \to D_h$ oraz $h: D_h \to \mathbb{R}$.

Twierdzenie 2. Niech funkcja g nie przyjmuje wartości b poza punktem a w pewnym przedziale otwartym zawierającym punkt a. Zachodzi następujące wynikanie dla złożenia funkcyj $h \circ g$:

$$\text{Jeśli} \quad \lim_{x\to a} g(x) = b \quad \text{oraz} \quad \lim_{y\to b} h(y) = B, \quad \text{to} \quad \lim_{x\to a} h(g(x)) = B.$$

Dowód. Weźmy dowolny ciąg $\{x_n\}$ taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ oraz $x_n \neq a$. Z przyjętego założenia o granicy funkcji g w punkcie a mamy

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = b. \tag{3.9}$$

Podstawmy $y_n = g(x_n)$. Skoro w pewnym przedziale zawierającym a funkcja g nie przyjmuje wartości b, to dla dostatecznie dużych n mamy $y_n \neq b$. Z wzoru (3.9) mamy $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, więc z przyjętego założenia o granicy funkcji hw punkcie b mamy $\lim\limits_{n\to\infty} h(y_n) = B$, co można inaczej zapisać

$$\lim_{n\to\infty} h(g(x_n)) = B.$$

Skoro ciąg $\{x_n\}$ jest dowolny zbieżny do a, to możemy napisać

$$\lim_{x\to a} h(g(x)) = B. \quad \blacksquare$$

Podobne twierdzenie jest prawdziwe dla granic jednostronnych, niewłaściwych oraz gdy zastąpić a lub b przez ∞ lub $-\infty$.

Lemat 2. Jeśli istnieje granica $\lim\limits_{t\to\infty} f\left(\frac{1}{t}\right) = A$, to $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = A$.

Dowód. Zastosujemy Twierdzenie 2 do przypadku $g(x) = \frac{1}{x}$ oraz $h(t) = f(\frac{1}{t})$. Wtedy złożenie $h \circ g$ ma postać

$$h(g(t)) = h\left(\frac{1}{t}\right) = f\left(\frac{1}{1/t}\right) = f(t). \tag{3.10}$$

Funkcja g jest nam znana i wiemy, że

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \infty,$$

a z założenia Lematu $\lim_{t\to\infty} h(t) = A$. Wtedy na mocy Twierdzenia 2 mamy

$$\lim_{x\to 0+} h(g(x)) = A.$$

Na mocy (3.10) ten wzór możemy zapisać

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = A. \ \blacksquare$$

Lemat 3. Jeśli istnieje granica $\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{1}{t}\right) = A$, to $\lim_{x\to 0-} f(x) = A$.

Dowód pomijamy, bo jest analogiczny do poprzedniego z tymi samymi podstawieniami.

Te lematy pozwalają sprowadzać wyliczanie granicy jednej funkcji w zerze do granicy innej funkcji w nieskończoności.

PRZYKŁAD 7. Interesuje nas granica $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$. Występuje tu funkcja $f : (-1, \infty) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = (1+x)^{1/x}.$$

Aby znaleźć potrzebną granicę, trzeba rozważyć dwa przypadki:

a) $x > 0$. Zgodnie z Lematem 2

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{t\to\infty} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t,$$

a dzięki Przykładowi 5

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \mathrm{e}.$$

b) $-1 < x < 0$. Zgodnie z Lematem 3

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \frac{1}{\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^t},$$

a dzięki Przykładowi 6

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-1}} = \mathrm{e}.$$

Obie granice jednostronne dają to samo, więc możemy napisać

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \mathrm{e}.$$

Twierdzenie 3. Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest granicą funkcji f w punkcie $a \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall\ \epsilon > 0 \ \ \exists\ \delta > 0 : \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon. \tag{3.11}$$

Dowód $\Longrightarrow$ nie wprost. Przypuśćmy, że warunek (3.11) nie jest spełniony, tzn.

$$\exists\ \epsilon > 0 \ \ \forall\ \delta > 0 : \ 0 < |x-a| < \delta \ \wedge |f(x) - b| \geq \epsilon.$$

W szczególności po podstawieniu $\delta = \frac{1}{n}$ zauważymy, że istnieje ciąg $\{x_n\}$ taki, że

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \tag{3.12}$$

oraz

$$|f(x_n) - b| \geq \epsilon. \tag{3.13}$$

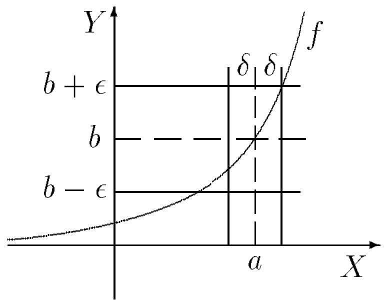
Nierówności (3.12) mówią, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ oraz $x_n \neq a$. Nierówność (3.14) natomiast mówi, że nie zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. W takim razie nie może zachodzić

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Dowód $\Longleftarrow$. Weźmy dowolne $\epsilon > 0$ i dowolny ciąg $\{x_n\}$ o własności $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ oraz $x_n \neq a$. Na mocy warunku (3.11) istnieje $\delta > 0$ taka, że $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$. Ze względu na założenie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ nierówność $|x_n - a| < \delta$ jest spełniona dla wszystkich n większych od pewnego $N \in \mathbb{N}$. Dla tych samych $n > N$ mamy więc nierówność $|f(x_n) - b| < \epsilon$, co oznacza $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Z dowolności ciągu $\{x_n\}$ wynika, że

$$\lim_{x\to a} f(x) = b. \blacksquare$$

To twierdzenie daje nam inną równoważną definicję granicy funkcji w punkcie – nazywamy ją *definicją Cauchy'ego*. Można ją zilustrować na wykresie funkcji, jak to pokazuje Rys. 3.7. Poziomy pas o szerokości 2ϵ i prostej $y = b$ w środku wyznacza pionowy pas o szerokości 2δ z prostą $x = a$ w środku o tej własności, że część wykresu wycięta przez pas pionowy mieści się calkowicie w pasie poziomym. Jeśli zmniejszamy ϵ, to również δ musi być mniejsze.



Rysunek 3.7

Można udowodnić odpowiednie twierdzenia o definicji Cauchy'ego granicy funkcji w nieskończonościach:

$$\forall\, \epsilon > 0 \ \ \exists\, M > 0: \ M < x \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon \qquad \text{dla} \ \lim_{x\to\infty} f(x) = b \tag{3.14}$$

oraz

$$\forall\, \epsilon > 0 \ \ \exists\, M < 0: \ x < M \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon \qquad \text{dla} \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = b,$$

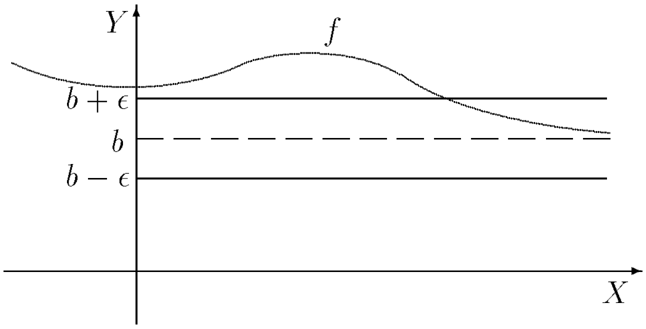
albo granic niewłaściwych:

$$\forall\, M > 0 \ \ \exists\, \delta > 0: \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M \qquad \text{dla} \ \lim_{x\to a} f(x) = \infty \tag{3.15}$$

oraz

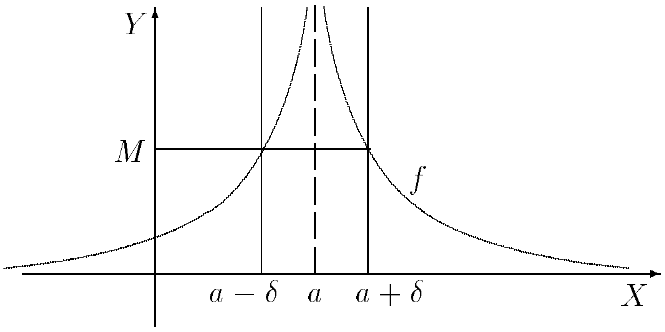
$$\forall\ M < 0\ \ \exists\ \delta > 0 :\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M \qquad \text{dla}\ \lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Dowody tych twierdzeń wymagają niewielkich zmian w stosunku do dowodu Twierdz. 3. Granicę (3.14) zilustrowaliśmy na Rys. 3.8. Pasek o szerokości 2ϵ ze środkiem na prostej $y = b$ wyznacza liczbę M taką, że na prawo od niej wartości funkcji mieszczą się w zadanym pasku. Przy tym im mniejsze ϵ, tym większe jest M.



Rysunek 3.8

Rys. 3.9 ilustruje granicę (3.15). Liczba M wyznacza pionowy pas o szerokości 2δ i środku na prostej $x = a$ taki, że wykres funkcji w tym pasie jest ponad prostą $y = M$. Przy tym im większe jest M, tym mniejsze musi być δ.



Rysunek 3.9

3.2 Funkcje ciągłe

Niech $D_f \subset \mathbb{R}$, $f : D_f \to \mathbb{R}$, $a \in D_f$. Funkcja f nazywa się *prawostronnie ciągła w punkcie a*, jeśli

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a).$$

zaś *lewostronnie ciągła w punkcie a*, jeśli

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a).$$

Mówimy, że funkcja f jest *ciągła w punkcie* a, jeśli

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{3.16}$$

Tym razem punkt a musi należeć do dziedziny funkcji, bo porównujemy wartości funkcji $f(x)$ w pobliżu a z wartością funkcji $f(a)$ właśnie w punkcie a.

Jeśli na przykład dziedziną jest przedział domknięty $\langle a, b\rangle$, to ciągłość w punkcie a jest równoważna prawostronnej ciągłości w tym punkcie, a ciągłość w punkcie b jest równoważna lewostronnej ciągłości w tym punkcie.

PRZYKŁAD 1. Rozważmy funkcję tożsamościową $f(x) = x$. Z założenia $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ wynika

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = a = f(a)$$

dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$. Stąd

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

To zachodzi dla dowolnego $a \in D_f$, więc funkcja tożsamościowa jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

PRZYKŁAD 2. W przykładzie 3 w poprzednim paragrafie pokazaliśmy, że funkcja $f(x) = \cos x$ ma w zerze granicę jeden: $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. Wiemy, że $\cos 0 = 1$, więc otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0.$$

To oznacza, że funkcja cosinus jest ciągła w zerze.

PRZYKŁAD 3. Jaka jest granica w zerze funkcji $f(x) = x^2$? Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem o własności $\lim x_n = 0,\ x_n \neq 0$. Wtedy dzięki Twierdzeniu 2 z § 2.2 granica iloczynu jest iloczynem granic:

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = (\lim_{n\to\infty} x_n)^2 = 0 \cdot 0 = 0.$$

Skoro ciąg $\{x_n\}$ jest dowolny, to

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 = f(0).$$

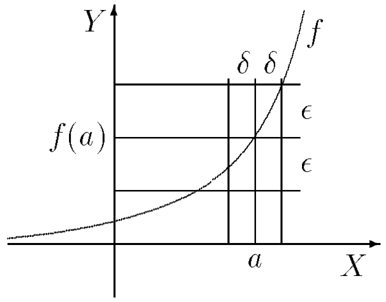
To oznacza, że funkcja kwadratowa jest ciągła w zerze.

Istnienie definicji Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie a pozwala nam sfomułować równoważny warunek ciągłości funkcji w punkcie a:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon. \tag{3.17}$$

Mówiąc obrazowo oznacza to, że dostatecznie małym przyrostom argumentu względem a odpowiadają dowolnie małe przyrosty wartości funkcji względem $f(a)$.

Na wykresie funkcji można to pokazać jak na Rys. 3.10. Wykreślmy równoległy do osi X poziomy pas o szerokości 2ϵ i prostej $y = f(x)$ w środku. Istnieje wtedy równoległy do osi Y pionowy pas o szerokości 2δ z prostą $x = a$ w środku taki, że część wykresu wycięta przez pas pionowy mieści się równocześnie w pasie poziomym.



Rysunek 3.10

Funkcję ciągłą w każdym punkcie swojej dziedziny nazywamy krótko *funkcją ciągłą*. Funkcja stała jest w sposób oczywisty ciągła. To samo można powiedzieć o funkcji tożsamościowej.

PRZYKŁAD 4. Funkcja signum nie jest ciągła w zerze, więc nie można jej nazwać funkcją ciągłą. Ale po usunięciu zera z dziedziny mamy prawo tę nową funkcję nazwać ciągłą.

Istnieje pojęcie nieco słabsze od funkcji ciągłej. Niech $a, b \in \mathbb{R}$ lub $a = -\infty$, lub $b = \infty$. Usuwamy z dziedziny $D_f = (a, b)$ skończoną liczbę punktów

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ \ldots\ < a_{n-1} < a_n, \quad \text{gdzie} \quad a < a_1, \quad a_n < b,$$

pozostawiając przedziały otwarte (a_{k-1}, a_k), $k \in \{1, 2, 3, \ \ldots\ n\}$. Jeśli w każdym z tych przedziałów funkcja f jest ciągła oraz istnieją granice jednostronne

$$\lim_{x \to a_k -} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x \to a_k +} f(x),$$

to funkcja f nazywa się *przedziałami ciągłą*.

PRZYKŁAD 4a. Funkcja signum jest przedziałami ciągła, bo wystarczy dla niej wskazać dwa przedziały otwarte $(-\infty, 0)$ oraz $(0, \infty)$, w których ona jest ciągła.

PRZYKŁAD 5. Pokażemy, że moduł jest funkcją ciągłą. Skorzystamy z warunku (3.17). Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą, czyli dowolną liczbą z dziedziny funkcji moduł. Wybierzmy dowolne $\epsilon > 0$. Na podstawie Zadania 3 z Listy 2 możemy napisać

$$|\ |x| - |a|\ | \leq |x - a|.$$

Jeśli wybierzemy $\delta = \epsilon$, to dzięki temu z nierówności $0 < |x - a| < \delta$ wynika $|\ |x| - |a|\ | < \delta$, czyli $|\ |x| - |a|\ | < \epsilon$. W takim razie mamy prawdziwe całe zdanie (3.17), które teraz zapiszemy w postaci

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \epsilon : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\ |x| - |a|\ | < \epsilon.$$

To oznacza, że

$$\lim_{x \to a} |x| = |a|.$$

Skoro punkt a jest dowolny z dziedziny, to moduł jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie 1. Jeśli funkcje f i g są ciągłe w punkcie a, to ich suma, różnica, iloczyn i iloraz (o ile $g(a) \neq 0$) są w tym punkcie ciągłe.

Dowód pomijamy jako oczywisty w świetle Twierdzenia 1 z poprzedniego paragrafu.

Nazwą *funkcje elementarne* określa się wszystkie funkcje, które można otrzymać przez cztery działania arytmetyczne i przez składanie z funkcji stałej, tożsamościowej, potęgowej, wykładniczej, funkcyj trygonometrycznych oraz odwrotnych do nich. Warto wspomnieć ofunkcjach odwrotnych do trygonometrycnych. Na przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ sinus jest różnowartościowy, więc posiada funkcję odwrotną, nazywamy ją *arcus sinus*, co można przetłumaczyć: łuk sinusa. Po zawężeniu do odpowiednich przedziałów można wprowadzić funkcje odwrotne do pozostałych funkcyj trygonometrycznych. Warto wiedzieć, że funkcje odwrotne do trygonometrycznych, tzn. arcus sinus, arcus cosinus, arcus tangens i arcus cotanges nazywają się *funkcjami kołowymi* lub *cyklometrycznymi*. Będziemy teraz rozważać, czy funkcje elementarne są ciągłe.

Skoro funkcje stała i tożsamościowa są ciągłe, to funkcja $x \mapsto ax$ jako ich iloczyn też jest ciągła. Dalej, funkcja $x \mapsto ax^n$ zwana *jednomianem* jest ciągła jako wielokrotny iloczyn funkcji tożsamościowej z sobą i z funkcją stałą. Następnie *wielomian* P określony wzorem

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ \dots\ + a_n x^n = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$$

jest funkcją ciągłą jako wielokrotna suma jednomianów. Wreszcie określona poprzez dwa wielomiany P i Q *funkcja wymierna* f o dziedzinie $D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$, dana wzorem

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

jest funkcją ciągłą jako iloraz wielomianów.

PRZYKŁAD 6. Niech $a > 0$. Zamierzamy udowodnić, że funkcja wykładnicza $x \mapsto a^x$ jest ciągła. Na początek pokażemy, że funkcja ta jest ciągła w zerze, tzn.

$$\text{jeśli} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad \text{to} \quad \lim_{n\to\infty} a^{x_n} = 1. \tag{3.18}$$

Niech będzie dana liczba $\epsilon > 0$. Na mocy Przykładu 4 z § 2.2 mamy $\lim a^{1/n} = 1$ oraz $\lim a^{-1/n} = 1$, więc jeśli k jest dostatecznie dużą liczbą naturalną, to

$$-\epsilon < a^{1/k} - 1 < \epsilon \ \text{ oraz } \ -\epsilon < a^{-1/k} - 1 < \epsilon$$

$$1 - \epsilon < a^{1/k} < 1 + \epsilon \ \text{ oraz } \ 1 - \epsilon < a^{-1/k} < 1 + \epsilon. \tag{3.19}$$

Ze zbieżności $\{x_n\} \to 0$ istnieje N takie, że dla $n > N$ zachodzi $-\frac{1}{k} < x_n < \frac{1}{k}$ i wobec tego

$$a^{-1/k} \leq a^{x_n} \leq a^{1/k} \ \text{ dla } a \geq 1 \quad \text{lub} \quad a^{1/k} \leq a^{x_n} \leq a^{-1/k} \ \text{ dla } a < 1.$$

Porównując to z (3.19) możemy napisać

$$1 - \epsilon < a^{x_n} < 1 + \epsilon \ \text{ dla } n > N,$$

$$-\epsilon < a^{x_n} - 1 < \epsilon \ \text{ dla } n > N.$$

To oznacza prawdziwość zdania (3.18), czyli ciągłość funkcji w zerze.

Niech teraz $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ dla dowolnego $b \in \mathbb{R}$. Z własności potęgowania $a^{x_n} = a^b a^{x_n - b}$, drugi wykładnik dąży do zera, więc z (3.18) dostajemy $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^b \lim_{n\to\infty} a^{x_n-b} = a^b \cdot 1 = a^b$. Skoro ciąg $\{x_n\} \to b$ jest dowolny, to zachodzi $\lim_{x\to b} a^x = a^b$, czyli funkcja wykładnicza jest ciągła w punkcie b. Punkt b jest dowolny z dziedziny, więc funkcja ta jest ciągła.

PRZYKŁAD 7. Zbadamy ciągłość funkcji sinus. Korzystamy z tożsamości trygonometrycznej $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, która daje

$$\sin x - \sin a = 2\sin\frac{1}{2}(x-a)\cos\frac{1}{2}(x+a).$$

Z Przykładu 3 na str. 39 wiemy, że $|\sin t| \le |t|$, a poza tym $|\cos t| \le 1$, więc

$$|\sin x - \sin a| \le 2\left|\frac{1}{2}(x-a)\right| \cdot 1 = |x-a|. \tag{3.20}$$

Teraz sprawdzamy warunek Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie, czyli wzór (3.17). Niech będzie dane dowolna liczba $\epsilon > 0$. Przyjmijmy $\delta = \epsilon$. Na mocy (3.20) z nierówności $|x-a| < \delta$, czyli $|x-a| < \epsilon$ wynika $|\sin x - \sin a| < \epsilon$. Widzimy, że zdanie (3.17) jest spełnione. To oznacza, że $\lim_{x\to a}\sin x = \sin a$. Funkcja sinus jest ciągła w punkcie a. Skoro to zachodzi w każdym punkcie a z dziedziny, to funkcja sinus jest ciągła.

PRZYKŁAD 8. Funkcja cosinus jest ciągła – sprawdzenie na ćwiczeniach.

PRZYKŁADY 9. Ponieważ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, więc funkcja tangens jako iloraz funkcyj ciągłych jest funkcją ciągłą. Z tych samych powodów funkcje cotangens, secans i cosecans:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

są ciągłe.

Twierdzenie 2. Jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie a, a funkcja g jest ciągła w punkcie $f(a)$, to ich złożenie, czyli funkcja $g \circ f$ jest ciągła w punkcie a. Złożenie funkcyj ciągłych jest funkcją ciągłą.

Dowód. Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem takim, że $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Na mocy założenia o funkcji f wtedy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Oznaczywszy $b = f(a)$ i $y_n = f(x_n)$ mamy $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, więc na mocy założenia o funkcji g mamy

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(b),$$

czyli

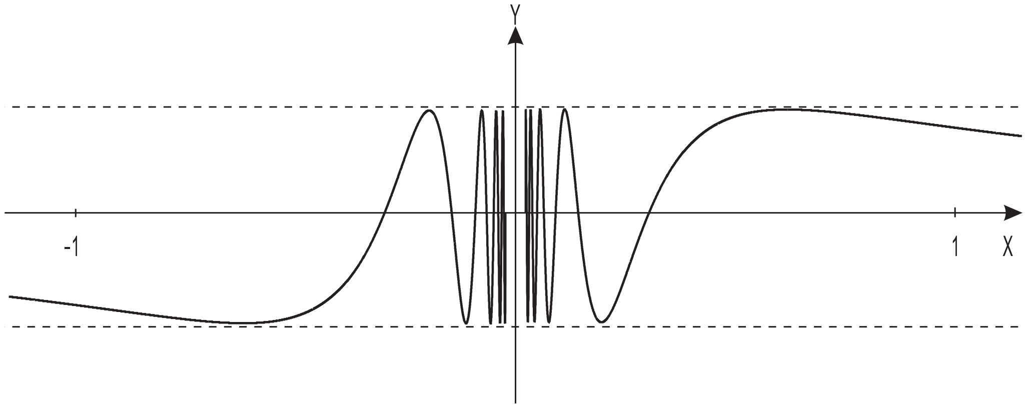
$$\lim_{n\to\infty}(g\circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(a)) = (g\circ f)(a).$$

to oznacza, że funkcja $g \circ f$ jest ciągła w punkcie a.

Druga część twierdzenia jest prawdziwa po zastosowaniu pierwszej części do każdego punktu dziedziny funkcji złożonej. ■

Z tego twierdzenia wynika, że biorąc funkcje elementarne dotąd rozważane i operując na nich za pomocą działań arytmetycznych i składania otrzymujemy nadal funkcje ciągłe. Z tych powodów np. na dziedzinie $D_f = \mathbb{R}^+$ funkcja $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$ jest ciągła.

PRZYKŁAD 10. Bardzo ciekawa jest funkcja $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $h(x) = \sin(\frac{1}{x})$. Jest to złożenie dwóch funkcyj. Funkcja wewnętrzna g o wzorze $g(x) = 1/x$ nie jest określona w zerze, więc złożenie też nie jest określone w zerze. Funkcja g dla małych $x > 0$ daje duże wartości $g(x)$, przy tym małe zmiany x dają duże zmiany $g(x)$ przewyższające wiele razy liczbę π, wobec tego jasnym powinno być, że przy małych zmianach x wartość $\sin(\frac{1}{x})$ zmienia się bardzo często od –1 do 1. Funkcję tę ilustruje Rys. 3.11. Funkcja ta jest złożeniem dwóch funkcyj antysymetrycznych, więc sama jest antysymetryczna. Jest ona też złożeniem dwóch funkcyj ciągłych, więc jest ciągła.



Rysunek 3.11

Ale funkcja f określona wzorem klamrowym

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{gdy} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{gdy} \quad x = 0. \end{cases}$$

jest nieciągła w zerze. Dzięki odpowiedniemu zadaniu z ćwiczeń wiemy, że funkcja f nie ma granicy w tym punkcie.

PRZYKŁAD 11. Niech $\beta \in \mathbb{R}$. Funkcja potęgowa $x \mapsto x^\beta$ o dziedzinie $\mathbb{R}^+$ jest ciągła.

Najpierw pokażemy, że ta funkcja jest ciągła w jedynce. Niech $\{x_n\}$ – dowolny ciąg taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Wybieramy $k \in \mathbb{N}$ takie, że

$$-k \leq \beta \leq k. \tag{3.21}$$

Skoro jednomian jest funkcją ciągłą, to

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = 1, \tag{3.22}$$

a z Twierdzenia 1

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{-k} = \lim_{n\to\infty} (1/x_n^k) = 1. \tag{3.23}$$

Z warunków (3.22) i (3.23) wiemy, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\forall\, n > N : \ |x_n^k - 1| < \epsilon \quad \wedge \quad |x_n^{-k} - 1| < \epsilon,$$

co można zapisać

$$-\epsilon < x_n^k - 1 < \epsilon \quad \wedge \quad -\epsilon < x_n^{-k} - 1 < \epsilon,$$

$$1 - \epsilon < x_n^k < 1 + \epsilon \quad \wedge \quad 1 - \epsilon < x_n^{-k} < 1 + \epsilon. \tag{3.24}$$

Funkcja wykładnicza o podstawie ≥ 1 jest rosnąca, więc z (3.21) dostajemy

$$x_n^{-k} \leq x_n^{\beta} \leq x_n^k \quad \text{dla} \quad x_n \geq 1.$$

Funkcja wykładnicza o podstawie < 1 jest malejąca, więc z (3.21) dostajemy

$$x_n^{k} \leq x_n^{\beta} \leq x_n^{-k} \quad \text{dla} \quad x_n < 1.$$

W takim razie z (3.24) w obydwu przypadkach $x_n \geq 1$ oraz $x_n < 1$ możemy napisać

$$1 - \epsilon < x_n^{\beta} < 1 + \epsilon,$$

$$-\epsilon < x_n^{\beta} - 1 < \epsilon,$$

$$|x_n^{\beta} - 1| < \epsilon$$

dla każdego $n > N$. Wobec tego $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{\beta} = 1$. Skoro ciąg $\{x_n\}$ jest dowolny, to mamy $\lim\limits_{x\to 1} x^{\beta} = 1$, więc funkcja potęgowa jest ciągła w jedynce.

Teraz pokażemy ciągłość w dowolnym punkcie $a \in \mathbb{R}^+$. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, co oznacza

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{a} = 1.$$

Ponieważ $x_n^{\beta} = a^{\beta}\left(\frac{x_n}{a}\right)^{\beta}$, to z udowodnionej ciągłości w jedynce wynika

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{\beta} = \lim_{n\to\infty} a^{\beta}\left(\frac{x_n}{a}\right)^{\beta} = a^{\beta} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{a}\right)^{\beta} = a^{\beta}.$$

to oznacza ciąglość funkcji potęgowej w dowolnym punkcie a dziedziny.

Ten przykład zawiera jako przypadek szczególny tezę, iż pierwiastek dowolnego stopnia jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}^+$, bowiem $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$. Pozostaje jeszcze tylko udowodnienie ciągłości w zerze dla dodatnich wykładników, co przenosimy na ćwiczenia.

Twierdzenie 3 (Weierstrassa). Funkcja f ciągła w przedziale domkniętym jest ograniczona. Taka funkcja osiąga przy tym swój kres górny M i dolny m, tzn. istnieją w dziedzinie dwa punkty x_1 i x_2 takie, że $f(x_1) = M$ oraz $f(x_2) = m$.

Dowód w książce Kuratowskiego na str. 81. [Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) – matematyk niemiecki.]

Domkniętość przedziału jest tutaj bardzo ważna, bo na przykład funkcja tangens jest ciągła w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ale przy zbliżaniu się do końców tego przedziału dąży do nieskończoności albo do minus nieskończoności, więc nie jest ograniczona w przedziale otwartym.

Twierdzenie 4 - *własność Darboux.* Funkcja ciągła w przedziale domkniętym przechodzi przez wszystkie wartości pośrednie.

Dowód w książce Kuratowskiego na str. 82. [Jean Gaston Darboux (1842–1917) – matematyk francuski.] To twierdzenie udowodnił już matematyk czeski Bernhard Bolzano (1781–1848). Trzeba je rozumieć następująco. Jeśli dziedziną funkcji f jest przedział $\langle a, b\rangle$ i jeśli y jest liczbą pośrednią między $f(a)$ i $f(b)$, tzn. albo $f(a) < y < f(b)$, albo $f(b) < y < f(a)$, to istnieje takie $x \in \langle a, b\rangle$, że $f(x) = y$.

Z przytoczonych dwóch twierdzeń wynika następujący

Lemat 1. Funkcja ciągła w przedziale domkniętym przyjmuje wszystkie wartości od kresu dolnego m do kresu górnego M włącznie. Innymi słowy, obrazem funkcji jest przedział domknięty $\langle m, M\rangle$.

Ten lemat pozwala uważać, że funkcje odwrotne do funkcyj ciągłych na przedziałach domkniętych mają za swoje dziedziny także przedziały domknięte. Na przykład funkcja sinus jest ciągła na każdym przedziale domkniętym zwierającym przedział $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Dzięki Lematowi 1 możemy być pewni, że jej obrazem jest przedział $\langle -1, 1\rangle$. Już wspomieliśmy, że na przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ sinus ma funkcję odwrotną arcus sinus. Zatem możemy napisać

$$\arcsin : \ \langle -1, 1\rangle \ \to \ \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle .$$

Twierdzenie 5. Niech $m = \inf f, \ M = \sup f$. Jeśli funkcja f jest różnowartościowa i ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$, to funkcja odwrotna $g = f^{-1}$ jest ciągła w przedziale $\langle m, M\rangle$.
Dowód na str. 84 w książce Kuratowskiego.

PRZYKŁAD 12. Logarytm jest funkcją ciągłą, bo jest to odwrócenie funkcji wykładniczej.

PRZYKŁAD 13. *Funkcje cyklometryczne*: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arc\,tg}\, x$ i $\mathrm{arc\,ctg}\, x$ są ciągłe jako funkcje odwrotne do trygonometrycznych.

Teraz możemy być pewni, że wszystkie funkcje elementarne są ciągłe. Warto jeszcze poznać pewne szczególne funkcje elementarne zwane *hiperbolicznymi*, mające za swoje dziedziny $\mathbb{R}$ albo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; *sinus hiperboliczny*:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

o dziedzinie $\mathbb{R}$, *cosinus hiperboliczny*:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

o dziedzinie $\mathbb{R}$, *tangens hiperboliczny*:

$$\mathrm{tgh}\, x = \frac{\sinh x}{\cosh x};$$

skoro cosinus hiperboliczny nigdzie się nie zeruje, to dziedziną tej funkcji jest $\mathbb{R}$, wreszcie *cotangens hiperboliczny*:

$$\operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x};$$

sinus hiperboliczny jest zerem tylko w zerze, więc dziedziną tej funkcji jest $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Funkcja odwrotna do sinusa hiperbolicznego oznaczana jest „ar sinh” trzeba czytać „area sinus hiperboliczny”; łacińskie słowo *area* oznacza pole, plac, a chodzi o to, że funkcja odwrotna do sinusa hiperbolicznego jest polem powierzchni pod pewnym wycinkiem hiperboli, patrz I.N. Bronsztejn, K.A. Siemiendiajew *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*, § 3.11. Podobnie trzy pozostałe funkcje odwrotne do hiperbolicznych oznaczane są „ar cosh”, „ar tgh” oraz „ar ctgh”. Wykresy tych funkcyj poznamy na ćwiczeniach.

Otoczeniem punktu $a \in \mathbb{R}$ nazywamy przedział otwarty zawierający ten punkt.

Twierdzenie 6 *o lokalnym zachowaniu znaku.* Jeśli ciągła funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ w pewnym punkcie $x_o \in (a, b)$ jest dodatnia (ujemna), to istnieje otoczenie punktu x_0 takie, że funkcja jest w nim dodatnia (ujemna).

D o w ó d. Niech $f(x_0) > 0$. Przypomnijmy definicję Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie x_0

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{3.25}$$

Wybieramy $\epsilon = f(x_0)$, wtedy istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $|x - x_0| < \delta$ [co oznacza $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$] zachodzi

$$-f(x_0) < f(x) - f(x_0) < f(x_0).$$

Zostawiamy lewą nierówność

$$-f(x_0) < f(x) - f(x_0),$$

$$0 < f(x).$$

W ten sposób mamy $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Niech $f(x_0) < 0$. Skoro ϵ ma być dodatnie, to wybieramy $\epsilon = -f(x_0)$, wtedy istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ zachodzi

$$f(x_0) < f(x) - f(x_0) < -f(x_0).$$

Zostawiamy prawą nierówność

$$f(x) - f(x_0) < -f(x_0)$$

$$f(x) < 0.$$

Zatem mamy $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. ■

Na koniec jeszcze warto przytoczyć, do czego przydaje się ciągłość funkcji. Jeśli ciągłość funkcji f w punkcie a zapiszemy jako wynikanie

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a),$$

to możemy pierwszą równość wykorzystać po prawej stronie drugiej równości i otrzymać wzór

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

Jego interpretację można wyrazić następującymi słowami: jeśli funkcja jest ciągła, to można z symbolem granicy wejść pod argument funkcji.

W ten sposób można na przykład dzięki ciągłości funkcji $f(x) = x^{1/2}$ wyliczyć granicę następującego ciągu:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{1+0} = 1.$$