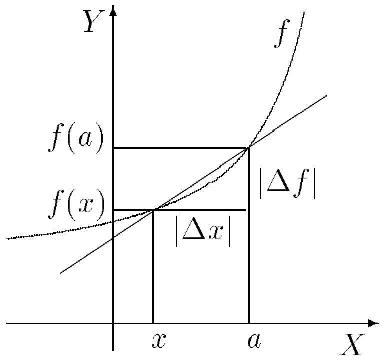
Rozdział 4

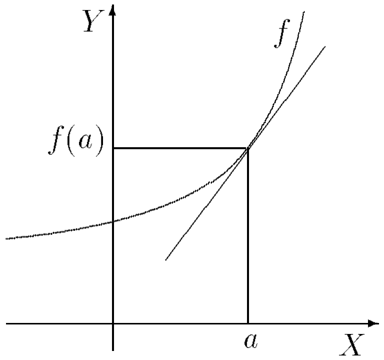
RÓŻNICZKOWANIE

4.1 Pochodna

W tym rozdziale poznamy jedno z dwóch podstawowych pojęć tego wykładu, mianowicie pochodną funkcji. Dugim pojęciem jest całka, o której będzie następny rozdział. Pochodna jest potrzebna do wyliczenia szybkości zmian funkcji, a na wykresach do znajdowania linii prostej stycznej do wykresu funkcji. Warto wspomnieć, że pochodne i całki oraz oparty na nich rachunek różniczkowy i całkowy został stworzony po koniec XVII wieku przez Isaaca Newtona (1643–1727) i Godfrieda Wilhelma Leibniza (1646–1716). Jeden był Anglikiem, drugi Niemcem, obu można nazwać matematykami i fizykami. Cały ten rachunek został stworzony dla potrzeb fizyki.



Rysunek 4.1



Rysunek 4.2

Jeśli uznamy, że zmienna x oznacza czas, a zmienna y położenie na jakiejś osi w przestrzeni, to funkcja f opisuje pewien ruch po tej osi. Wówczas stosunek

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{4.1}$$

jest *prędkością średnią* na odcinku $\langle f(a), f(x) \rangle$ lub $\langle f(a), f(x) \rangle$. Jest on zarazem tangensem nachylenia *siecznej*, czyli prostej przecinającej wykres w dwóch punktach $(x, f(x))$ oraz $(a, f(a))$. Wyrażenie (4.1) nazywa się *ilorazem różnicowym* funkcji f. W miarę jak punkt x zbliża się do punktu a, sieczna zbliża się do stycznej, aż wreszcie dla punktów pokrywających się, czyli przy $x = a$ sieczna staje się styczną do wykresu w punkcie a. W takim razie granica wyrażenia (4.1) przy $x \to a$ jest tangensem nachylenia stycznej do wykresu w punkcie a. A przy podanej interpretacji fizycznej jest to *prędkość chwilowa* albo krócej *prędkość* w ruchu opisanym przez funkcję f.

Widzimy więc, jak ważna jest granica wyrażenia (4.1) przy $x \to a$, dlatego wprowadza się następujące pojęcie. Niech funkcja f określona będzie w pewnym przedziale otwartym zawierającym punkt a. *Pochodną funkcji f w punkcie a* nazywamy granicę

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Jeśli wprowadzimy przyrosty $\Delta f = f(x) - f(a)$, $\Delta x = x - a$, to tę granicę możemy zapisać jeszcze inaczej:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Widzimy, że tu chodzi o granicę przy różnicy argumentów dążącej do zera. Tę dowolnie małą wartość różnicy (łac. *differentia*) Leibniz oznaczył dx i nazwał po łacinie *differential*, a Józef Jakubowski przetłumaczył na język polski jako *różniczkę*. Było to w jego przekładzie na język polski dzieła Etienne Bézouta *Nauka matematyki do użycia artyleryi francuskiej*, które ukazało się w latach 1781–1783. Różniczkę dx i odpowiadającą jej różniczkę df bardzo długo nazywano wielkościami *nieskończenie małymi*, ale w XX wieku matematycy odeszli od tego uważając je za określenia pozbawione sensu. W książkach fizycznych można je jeszcze spotkać.

Pochodną w punkcie a zapisujemy na trzy sposoby:

$$\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = \frac{df}{dx}(a) = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

W dwóch pierwszych sposobach rozpoznajemy oznaczenia Leibniza, które pozostawiono mimo tego, że osobno zapisane dx i df są potępiane przez matematyków. Obliczanie pochodnych nazywa się *różniczkowaniem* i stąd nazwa tego działu matematyki: *rachunek różniczkowy*.

To, że pochodna jest równa tangensowi kąta nachylenia stycznej do wykresu funkcji, nazywamy *interpretacją geometryczną pochodnej*. Zgodnie z nią równanie kierunkowe prostej stycznej do wykresu w punkcie a ma postać

$$y = f'(a)x + b. \tag{4.2}$$

Stałą b wyliczymy z warunku, że ta prosta przechodzi przez punkt o współrzędnych $(a, f(a))$:

$$f(a) = f'(a)a + b, \quad \text{skąd} \quad b = f(a) - f'(a)a.$$

W takim razie równanie (4.2) możemy zapisać w postaci

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

albo

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Z równości

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

mamy jeszcze inną interpretację pochodnej – jest to szybkość zmian wielkości f względem wielkości x. Można to nazwać *interpretacją fizyczną pochodnej.* Już wspomnieliśmy, że gdy x jest czasem, a f położeniem ciała na jakiejś osi, to pochodna jest prędkością tego ciała. Jeśli zaś f jest prędkością, a x czasem, to pochodna jest przyspieszeniem. Jeśli f jest masą fragmentu jakiegoś układu niejednorodnego, np. Słońca, a x objętością tego fragmentu, to pochodna jest gęstością w tym układzie. Jeśli f jest ładunkiem elektrycznym, a x czasem, to pochodna jest natężeniem prądu elektrycznego.

Znak pochodnej też ma swoje znaczenie: jeśli pochodna jest dodatnia $f'(a) > 0$, to funkcja jest rosnąca w pewnym otoczeniu punktu a, jeśli zaś ujemna, to funkcja jest malejąca. Prędkość dodatnia oznacza, że ciało porusza się w dodatnią stronę osi, prędkość ujemna – że w stronę przeciwną.

Funkcję f nazywamy *różniczkowalną w punkcie* a, jeśli istnieje jej pochodna w punkcie a w sensie granicy właściwej, czyli jako liczba rzeczywista.

Lemat 1. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a, to jest ciągła w tym punkcie.

Dowód. Z założenia istnieje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, więc dzięki Twierdzeniu 1 z § 3.1

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a}(x-a) = f'(a)\cdot 0 = 0,$$

stąd

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

a to oznacza, że funkcja f jest ciągła w punkcie a. ■

Mówimy, że funkcja f jest *różniczkowalna*, jeśli jest różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny. Wtedy pochodna liczona w każdym punkcie z osobna zadaje nową funkcję, którą także nazywamy *pochodną* funkcji f i oznaczamy f'.

PRZYKŁAD 1. Funkcja stała $x \mapsto c$ jest różniczkowalna i jej pochodna jest zerem w każdym punkcie, co widać z tego, że iloraz różnicowy jest zerem:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{c-c}{x-a} = 0 \quad \text{dla} \quad x \neq a.$$

Symbolicznie: $c' = 0$.

PRZYKŁAD 2. Funkcja tożsamościowa jest różniczkowalna i jej pochodna jest jedynką w każdym punkcie, gdyż iloraz różnicowy wynosi jeden;

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x-a}{x-a} = 1 \quad \text{dla} \quad x \neq a.$$

Symbolicznie: $x' = 1$.

Istnieją funkcje ciągłe, które nie są różniczkowalne.

PRZYKŁAD 3. Funkcja moduł: $f(x) = |x|$ nie ma pochodnej w zerze, gdyż iloraz różnicowy wynosi

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1 \qquad \text{dla} \quad x > 0$$

oraz

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1 \quad \text{dla} \quad x < 0.$$

Można jednak wprowadzić pojęcie *pochodnej jednostronnej*. Granicę prawostonną

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nazywamy *pochodną prawostronną funkcji f w punkcie a*, zaś granicę lewostronną

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

pochodną lewostronną funkcji f w punkcie a. Funkcja moduł ma pochodne jednostronne w zerze – pochodna prawostronna wynosi jeden, a lewostronna – minus jeden. Te granice są różne, więc dlatego funkcja moduł nie jest różniczkowalna w zerze.

PRZYKŁAD 4. Wyrzućmy z dziedziny modułu punkt zero i określmy nową funkcję:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{gdy} \quad x > 0, \\ -x & \text{gdy} \quad x < 0. \end{cases}$$

Ta funkcja ma pochodną w każdym punkcie dziedziny, więc jest różniczkowalna. Jej pochodną możemy również zapisać jako funkcję:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x > 0, \\ -1 & \text{gdy} \quad x < 0, \end{cases}$$

Zatem jest to funkcja znakowa z punktem zero usuniętym z dziedziny. Zobaczyliśmy więc, ze funkcja moduł bez zera ma jako pochodną funkcję znakową bez zera. Symbolicznie: $|x|' = \operatorname{sgn} x$ dla $x \neq 0$.

Twierdzenie 1. Niech funkcje f i g będą różniczkowalne w punkcie a. Pochodna ich sumy (bądź różnicy) w punkcie a jest sumą (bądź różnicą) ich pochodnych w tym punkcie.

Dowód. Liczymy pochodną sumy:

$$(f+g)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{[f(a+h) + g(a+h)] - [f(a) + g(a)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right].$$

Granica sumy jest sumą granic, więc

$$(f+g)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(a) + g'(a).$$

Liczymy pochodną różnicy:

$$(f-g)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{[f(a+h) - g(a+h)] - [f(a) - g(a)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right].$$

Granica różnicy jest różnicą granic, więc

$$(f-g)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = f'(a)-g'(a). \blacksquare$$

Jeśli funkcje f i g są różniczkowalne, to otrzymany wynik zapisuje się na dwa sposoby dla sumy:

$$(f+g)' = f'+g' \qquad \text{lub} \qquad \frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx}$$

i na dwa sposoby dla różnicy:

$$(f-g)' = f'-g' \qquad \text{lub} \qquad \frac{d}{dx}(f-g) = \frac{df}{dx}-\frac{dg}{dx}.$$

Twierdzenie 2. Niech funkcje f i g będą różniczkowalne w punkcie a. Pochodna iloczynu fg wyraża się następująco przez pochodne czynników:

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$

Dowód. Liczymy:

$$\begin{aligned}
(fg)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)]+[f(a)g(a+h)-f(a)g(a)]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[f(a+h)-f(a)]g(a+h)+f(a)[g(a+h)-g(a)]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a+h)+f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right].
\end{aligned}$$

Granica sumy jest sumą granic, a granica iloczynu jest iloczynem granic, więc

$$(fg)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\lim_{h\to 0}g(a+h)+f(a)\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}.$$

Funkcja g z założenia jest różniczkowalna, więc na mocy Lematu 1 jest ciągła, stąd

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a). \blacksquare$$

Jeśli funkcje f i g są różniczkowalne, to ten wynik zapisuje się na dwa sposoby:

$$(fg)' = f'g+fg' \quad \text{lub} \quad \frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g+f\frac{dg}{dx}.$$

Znany jest on pod nazwą *reguły Leibniza* albo *wzoru Leibniza.*

Lemat 2. Niech funkcja g bedzie różniczkowalna w punkcie a i niech $g(a)\neq 0$. Pochodna odwrotności funkcji g wyraża się następującym wzorem

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

Dowód. Liczymy

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{g(a)-g(a+h)}{g(a+h)g(a)h}$$

$$= -\frac{1}{g(a)}\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(a+h)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = -\frac{1}{g^2(a)}g'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}. \blacksquare$$

Twierdzenie 3. Niech funkcje f i g będą różniczkowalne w punkcie a i niech $g(a) \neq 0$. Pochodna ilorazu f/g wyraża się następującym wzorem:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Dowód. Liczymy korzystając z Twierdzenia 2:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a)$$

i Lematu 2:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}. \blacksquare$$

Lemat 3. Stałą można wyciągnąć przed znak pochodnej, tzn.

$$\frac{d(cf)}{dx} = c\frac{df}{dx}.$$

Dowód. Wynika to z Przykładu 1 i Twierdzenia 2:

$$\frac{d}{dx}(cf) = \frac{dc}{dx}f + c\frac{df}{dx} = 0\cdot f + c\frac{df}{dx} = c\frac{df}{dx}. \blacksquare$$

PRZYKŁAD 5. Dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$ oraz $x \in \mathbb{R}$: $(x^n)' = nx^{n-1}$. Dla $n \in \mathbb{N}$ udowodnimy to przez indukcję. Wzór jest prawdziwy dla $n = 1$, bo to jest treść Przykładu 2. Załóżmy jego prawdziwość dla pewnego $k \in \mathbb{N}$:

$$(x^k)' = kx^{k-1}. \tag{4.3}$$

Sprawdzamy go dla $k+1$:

$$(x^{k+1})' = (x\cdot x^k)'.$$

Korzystamy z Twierdzenia 2:

$$(x^{k+1})' = x'\cdot x^k + x\cdot(x^k)'$$

z Przykładu 2 i wzoru (4.3):

$$(x^{k+1})' = 1\cdot x^k + x\cdot kx^{k-1} = x^k + kx^k = (k+1)x^k.$$

A to jest odpowiednik wzoru (4.3) dla $k+1$ w miejsce k. Podany wzór można uważać za obowiązujący również dla $n=0$, bo daje on wtedy po prawej stronie zero zgodnie z Przykładem 1.

Dla n całkowitych ujemnych trzeba z dziedziny usunąć zero. W tym przypadku korzystamy z Lematu 2:

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = -\frac{(x^{-n})'}{x^{-2n}}.$$

Tym razem $-n$ jest dodatnie, więc korzystamy z udowodnionej części dla wykładników naturalnych:

$$= -\frac{(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{-n-1} \cdot x^{2n} = nx^{n-1}. \blacksquare$$

Zauważmy, że wzór (4.3) nie da wykładnika -1 wśród pochodnych, albowiem musiałoby wtedy być $k=0$, co daje funkcję $x \mapsto x^0 = 1$ stałą, a pochodna funkcji stałej jest zerem. Zresztą wzór (4.3) też daje pochodną zero.

PRZYKŁAD 6. $(\sin x)' = \cos x$. Sprawdzamy to z definicji:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}.$$

Korzystamy z tożsamości trygonometrycznej $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2} \cdot \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Korzystamy z Przykładu 4 w § 3.1 i z ciągłości funkcji cosinus

$$(\sin x)' = \cos x. \blacksquare$$

PRZYKŁAD 7. $(\cos x)' = -\sin x$. Sprawdzamy to z definicji:

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}.$$

Korzystamy z tożsamości $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin(x+\frac{h}{2})}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2} \cdot \lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Korzystamy z Przykładu 4 na str. 37 i z ciągłości funkcji sinus

$$(\cos x)' = -\sin x. \blacksquare$$

PRZYKŁAD 8. Znajdziemy pochodną logarytmu naturalnego. Na początek przekształcimy iloraz różnicowy korzystając z tego, że logarytm ilorazu jest różnicą logarytmów

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}\right] = \frac{1}{x}\ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right].$$

Teraz liczymy pochodną

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right].$$

Zamieniamy zmienne $y = \frac{h}{x}$:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \lim_{y\to 0} \ln(1+y)^{1/y}.$$

Korzystamy z ciągłości logarytmu i z Przykładu 11 w § 3.1:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \ln \lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = \frac{1}{x}\ln \mathrm{e} = \frac{1}{x}.$$

Ta pochodna daje wykładnik -1 brakujący we wzorze (4.3).

PRZYKŁAD 9. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$. Pokażemy to wykorzystując jedną z tożsamości spełnianych przez logarytm:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

W takim razie dzięki Lematowi 3

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}. \blacksquare$$

Po porównaniu ostatnich dwóch przykładów widać, dlaczego logarytm o podstawie e nazywa się *logarytmem naturalnym* – tylko wtedy pochodna nie zawiera żadnych logarytmów, lecz wyłącznie funkcję potęgową.

Twierdzenie 4. Jeśli $f : D_f \to D_g$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie a oraz $g : D_g \to \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie $b = f(a)$, to złożenie $g\circ f$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie a oraz

$$(g\circ f)'(a) = g'(b)f'(a).$$

Dowód. Określmy funkcję

$$p(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} - g'(b) & \text{dla} \quad y \in D_g \setminus \{b\}, \\ 0 & \text{dla} \quad y = b. \end{cases}$$

Z założenia o różniczkowalności funkcji g ta funkcja jest ciągła w punkcie b. Z tego wzoru wyliczymy

$$g(y) - g(b) = g'(b)\,(y-b) + p(y)(y-b).$$

Przepisujemy to podstawiając $y = f(x)$ i $b = f(a)$

$$(g\circ f)(x) - (g\circ f)(a) = g'(b)[f(x)-f(a)] + p(f(x))[f(x)-f(a)],$$

a stąd

$$\frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(a)}{x-a} = g'(b)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + p(f(x))\frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \tag{4.4}$$

Funkcja p jest ciągła w punkcie $b = f(a)$, funkcja f jest ciągła w punkcie a, więc

$$\lim_{x\to a} p(f(x)) = p(b) = 0,$$

wobec tego w granicy dla $x \to a$ z równości (4.4) wypada ostatni wyraz:

$$\lim_{x\to a} \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(a)}{x-a} = g'(b) \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

A to oznacza, że

$$(g\circ f)'(a) = g'(b)f'(a). \blacksquare$$

Przy oznaczeniach $y = f(x)$, $z = g(y)$ ten wynik zapisuje się w postaci

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx},$$

która sugeruje, jakoby różniczki dy można było upraszczać. Tę regułę można przyjąć, ale tylko dla łatwiejszego zapamiętania, bez podkładania głębszej treści.

PRZYKŁAD 10. Wyliczmy pochodną funkcji $x \mapsto \sin^n x$. Zauważmy, że jest to złożenie dwóch funkcyj: $y = f(x) = \sin x$ oraz $g(y) = y^n$, tzn $(g\circ f)(x) = (\sin x)^n = \sin^n x$. Pochodne funkcyj składanych wynoszą $f'(x) = \cos x$ oraz $g'(y) = ny^{n-1}$. W takim razie

$$(g\circ f)'(x) = g'(\sin x)\, f'(x) = n(\sin x)^{n-1}\cos x = n\sin^{n-1} x\cos x.$$

Twierdzenie 5. Jeśli $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i różnowartościową, różniczkowalną w punkcie $x \in (a, b)$ oraz $f'(x) \neq 0$, to funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y = f(x)$ oraz

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{4.5}$$

Dowód. Obraz funkcji f, będący dziedziną funkcji f^{-1}, dzięki własności Darboux (Tw. 4, § 3.2) jest przedziałem. Dla dowolnego ciągu $\{y_n\}$ punktów tego przedziału takiego, że $y_n \neq y$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, mamy

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)}, \tag{4.6}$$

gdzie $x_n = f^{-1}(y_n)$. Na mocy Twierdzenia 5 w § 3.2 funkcja f^{-1} jest ciągła, więc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = f^{-1}(y) = x$. W takim razie prawa strona wzoru (4.6) dąży do odwrotności pochodnej $f'(x)$ i mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \frac{1}{f'(x)},$$

a to oznacza równość (4.5). $\blacksquare$

Równość (4.5) można zapisać inaczej jako

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

przez co staje się łatwiejsza do zapamiętania.

PRZYKŁAD 11. Jeśli $f(x) = \mathrm{e}^x$, to $f'(x) = \mathrm{e}^x$. Oznaczmy $y = \mathrm{e}^x$, wtedy $x = f^{-1}(y) = \ln y$. Z Przykładu 8 wiemy, że $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y}$. Na mocy Twierdzenia 5 mamy $f'(x) = 1/(f^{-1})'(y) = 1/(1/y) = y = \mathrm{e}^x$, co można zapisać

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x.$$

Znaleźliśmy funkcję, która jest równa swojej własnej pochodnej. Inne funkcje o tej własności to $x \mapsto A\,\mathrm{e}^x$.

PRZYKŁAD 12. Niech $a \in \mathbb{R}^+$. Znajdźmy pochodną funkcji $x \mapsto a^x$. Korzystamy z tożsamości $a = \mathrm{e}^{\ln a}$, zatem $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$. Traktujemy to jako złożenie dwóch funkcyj $f(x) = x \ln a$ oraz $g(y) = \mathrm{e}^y$, czyli

$$(g \circ f)(x) = g(x \ln a) = \mathrm{e}^{x \ln a}.$$

Funkcja f jest liniowa i ma pochodną $f'(x) = \ln a$, pochodną funkcji g wyliczyliśmy w poprzednim przykładzie, więc

$$(a^x)' = g'(y)f'(x) = \mathrm{e}^y \cdot \ln a = \mathrm{e}^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Ta funkcja już nie jest równa swojej pochodnej, ona jest tylko proporcjonalna do swojej pochodnej. Inne funkcje o tej własności to $x \mapsto A\mathrm{e}^{bx}$.

W złożeniu funkcyj $g \circ f$ funkcja f nazywa się *wewnętrzna*, a funkcja g – *zewnętrzna*. Nazwy te biorą się stąd, że w zapisie $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ funkcja f jest w środku, a g na zewnątrz.

PRZYKŁAD 13. Niech $a \in \mathbb{R}$. Znajdźmy pochodną funkcji potęgowej $x \mapsto x^a$ o dziedzinie $\mathbb{R}^+$. Korzystamy z tożsamości $x = \mathrm{e}^{\ln x}$, zatem $x^a = (\mathrm{e}^{\ln x})^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$. Widzimy tu złożenie dwóch funkcyj $f(x) = a \ln x$ oraz $g(y) = \mathrm{e}^y$, czyli

$$(g \circ f)(x) = g(a \ln x) = \mathrm{e}^{a \ln x}.$$

Funkcja wewnętrzna ma pochodną $f'(x) = a/x$, pochodna funkcji zewnętrznej wynosi $g'(y) = \mathrm{e}^y$, więc

$$(x^a)' = g'(y)f'(x) = \mathrm{e}^y \cdot \frac{a}{x} = \mathrm{e}^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

Jest to wzór ten sam, co w Przykładzie 5, ale tym razem dla dowolnych wykładników rzeczywistych.

W szczególności dla $a = \frac{1}{2}$ dostajemy

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Podsumujmy poznane pochodne funkcyj elementarnych. Tabela 1 podaje wzory, które trzeba znać na pamięć. Funkcja $x \mapsto \sqrt{x}$ jest szczególnym przypadkiem funkcji potęgowej, ale została umieszczona osobno, bo jej pochodną liczy się wyjątkowo często. Pochodne z tej tabeli, których nie wyliczyliśmy na wykładzie, będą znalezione na ćwiczeniach.

Tabela 1

Funkcja	Pochodna	Funkcja	Pochodna	Funkcja	Pochodna
stała	0	$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
x	1	$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
x^a	ax^{a-1}	$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tgh}\, x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathrm{ctgh}\, x$	$-\frac{1}{\sin h^2 x}$
e^x	e^x	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{ar}\ \sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{ar}\ \cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\ln \|x\|$	$\frac{1}{x}$	$\mathrm{arc\,tg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{ar}\ \mathrm{tgh}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\log_a \|x\|$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\mathrm{arc\,ctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{ar}\ \mathrm{ctgh}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$

4.2 Zastosowania pochodnych

Otoczeniem punktu $a \in \mathbb{R}$ nazywamy przedział otwarty zawierający ten punkt. Niech funkcja f będzie określona w otoczeniu punktu a. Jeśli istnieje takie $\delta > 0$, że dla $|h| < \delta$ zachodzi nierówność

$$f(a+h) \leq f(a), \tag{4.7}$$

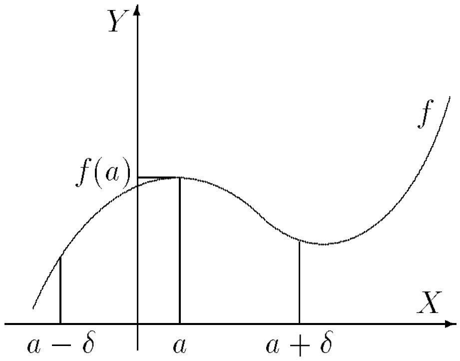
to mówimy, że funkcja f ma w punkcie a *lokalne maksimum*, patrz Rys. 4.3. To oznacza, że istnieje taki przedział otaczający punkt a, że $f(a)$ jest największą wartością w tym przedziale.

Niech funkcja f będzie określona w otoczeniu punktu b. Jeśli istnieje takie $\delta > 0$, że dla $|h| < \delta$ zachodzi nierówność

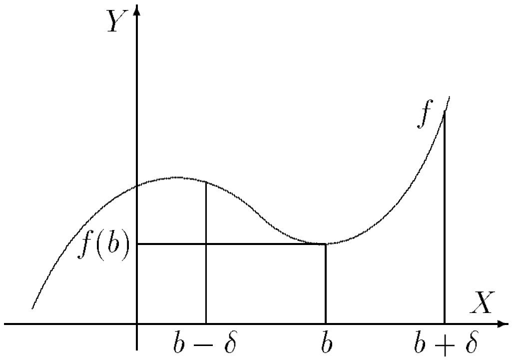
$$f(b+h) \geq f(b), \tag{4.8}$$

to mówimy, że funkcja f ma w punkcie b *lokalne minimum*, patrz Rys. 4.3. Innymi słowy, istnieje taki przedział otaczający punkt b, że $f(b)$ jest najmniejszą wartością w tym przedziale.

Jeśli we wzorach (4.7) i (4.8) można zastąpić nierówności słabe przez ostre dla $h \neq 0$, to mówimy, że maksimum czy minimum lokalne jest *właściwe*. Maksima i minima obejmujemy łączną nazwą *ekstremów* funkcji f.



Rysunek 4.3



Rysunek 4.4

Oprócz ekstremów lokalnych istnieją jeszcze *ekstrema globalne*. Mówimy, ze funkcja f ma w punkcie $c \in D_f$ *maksimum globalne*. jeśli wartość $f(c)$ jest największa spośród wartości funkcji przyjmowanych na całej dziedzinie, a *minimum globalne*, jeśli $f(c)$ jest najmniejsza spośród wartości funkcji na całej dziedzinie. Jeśli za dziedzinę funkcji ukazanej na Rysunkach 4.3 i 4.4 przyjmiemy taki przedział domknięty, żeby obejmował tylko ukazaną część wykresu, to maksimum globalne występuje na prawym końcu przedziału-dziedziny i pokrywa się z kresem górnym funkcji, a minimum globalne występuje na lewym końcu przedziału i pokrywa się z kresem dolnym funkcji.

PRZYKŁADY 1. Funkcja $x \mapsto x^2$ ma właściwe minimum lokalne w punkcie 0; jest to zarazem minimum globalne. Funkcja sinus ma właściwe maksima lokalne w punktach $\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Są to zarazem maksima globalne, chociaż nie pojedyncze.

Lemat 1. Niech $D_f = \langle a, b\rangle$. Jeśli funkcja $f : D_f \to \mathbb{R}$ osiąga kres górny w punkcie c położonym wewnątrz przedziału $\langle a, b\rangle$, czyli $c \in (a, b)$, to funkcja w tym punkcie ma też maksimum lokalne. Jeśli funkcja $f : D_f \to \mathbb{R}$ osiąga kres dolny w punkcie $c \in (a, b)$, to funkcja w tym punkcie ma też minimum lokalne.

Dowód. Za otoczenie punktu c, potrzebne w definicji ekstremum lokalnego, wystarczy wziąć przedział (a, b), a nierówności (4.7) lub (4.8) będą spełnione dla wszystkich argumentów z dziedziny, więc δ może być dowolna. ■

Jeśli kres górny funkcji wypada w jednym z końców przedziału $D_f = \langle a, b\rangle$, to w tym punkcie nie jest maksimum lokalne, bo nie można wskazać otoczenia tego punktu (przypominam: przedziału otwartego), zawartego w dziedzinie. Na przykład funkcja tożsamościowa z dziedziną $\langle -1, 1\rangle$ ma kres górny w punkcie 1, ale nie jest to maksimum lokalne.

Twierdzenie 1 (Fermata). Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $c \in D_f$ i ma w tym punkcie ekstremum lokalne, to $f'(c) = 0$.

[Pierre Fermat (VIII 1601–12 I 1665) – matematyk francuski, z zawodu prawnik. Jeden z twórców teorii liczb i analizy matematycznej.]

Dowód. Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie c maksimum lokalne. Wtedy istnieje $\delta > 0$ takie, że dla $|h| < \delta$ zachodzi (22), czyli $f(c + h) - f(c) \leq 0$. Stąd

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \quad \text{dla} \quad h > 0, \tag{4.9}$$

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \quad \text{dla} \quad h < 0. \tag{4.10}$$

Z założenia istnieje pochodna w punkcie c, więc pochodne jednostronne są jej równe: $f'_+(c) = f'(c) = f'_-(c)$. Z Lematu 2 w § 2.2 wiemy, że po przejściu do granicy nierówności słabe zachowują się, więc z (4.9) i (4.10) wynika $f'_+(c) \leq 0 \leq f'_-(c)$. A skoro te pochodne jednostronne są sobie równe, to musi być

$$f'_+(c) = 0 = f'_-(c),$$

skąd $f'(c) = 0$.

Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie c minimum lokalne. Wtedy istnieje $\delta > 0$ takie, że dla $|h| < \delta$ zachodzi (4.8), czyli $f(c+h) - f(c) \geq 0$. Stąd

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \quad \text{dla} \quad h > 0,$$

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \quad \text{dla} \quad h < 0.$$

Po przejściu do granicy nierówności słabe zachowują się, więc $f'_-(c) \leq 0 \leq f'_+(c)$. Z założenia o istnieniu pochodnej pochodne jednostronne są sobie równe, więc musi być

$$f'_-(c) = 0 = f'_+(c).$$

Stąd $f'(c) = 0$. ■

Twierdzenie to oznacza geometrycznie, że gdy funkcja różniczkowalna f ma ekstremum lokalne w punkcie c, to styczna w tym punkcie do jej wykresu jest równoległa do osi X albo się z nią pokrywa.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Jeśli pochodna w jakimś punkcie jest zerem, to w tym punkcie nie musi być ekstremum lokalne – przykładem jest funkcja $f(x) = x^3$, której pochodna $3x^2$ w zerze jest zerem, a na lewo od zera wartości funkcji f są ujemne, na prawo zaś dodatnie.

Twierdzenie 2 (Rolle'a). Niech $D_f = \langle a, b\rangle$ i niech funkcja $f : D_f \to \mathbb{R}$ będzie ciągła na swojej dziedzinie i różniczkowalna na (a, b). Jeśli $f(a) = f(b)$, to istnieje takie $c \in (a, b)$, że $f'(c) = 0$.

[Michel Rolle (1652-1719) – matematyk francuski, o 6 lat młodszy od Leibniza, a o 9 od Newtona. W 1703 roku wystąpił z krytyką rachunku wielkości nieskończenie małych.]

Dowód. Jeśli funkcja f jest stała, to $f'(x) = 0$ dla wszystkich $x \in D_f$, więc c jest dowolne z dziedziny.

Niech funkcja f nie będzie stała i np. przyjmuje wartości większe od $f(a)$. Oznaczywszy $M = \sup f$ mamy $M > f(a)$. Na mocy Twierdzenia Weierstrassa (Tw. 3 w § 3.2) istnieje takie $c \in \langle a, b\rangle$, że $f(c) = M$. Przy tym $a \neq c \neq b$, bo z założenia $f(a) = f(b) < M$. Zatem $c \in (a, b)$, tzn. funkcja f osiąga kres górny w punkcie położonym wewnątrz przedziału domkniętego. Lemat 1 mówi na to, że funkcja f ma w tym punkcie maksimum lokalne, a Twierdzenie 1, że $f'(c) = 0$.

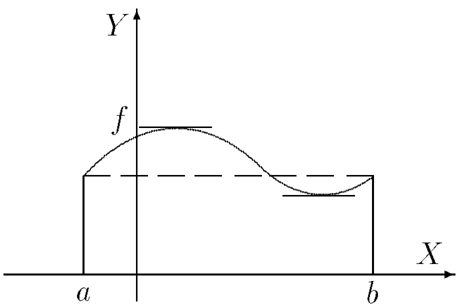
Jeśli funkcja f nie przyjmuje wartości większych od $f(a)$, to przyjmuje mniejsze i wtedy wystarczy zająć się kresem dolnym, a Twierdzenie Weierstrassa da ten sam wynik. ■

Twierdzenie Rolle'a można też wyrazić następująco: przy założeniach z poprzedniego sformułowania, jeśli $f(x) = f(x+h)$, to

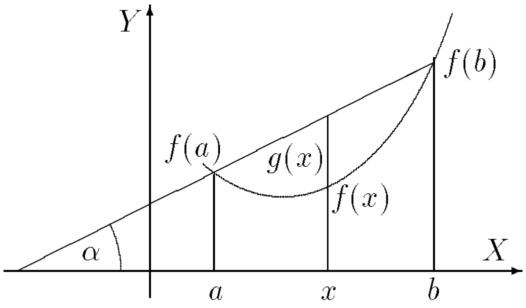
$$f'(x+\theta h) = 0 \quad \text{dla pewnego} \quad \theta \in (0,1).$$

Przy tym nie musimy zakładać, że $h > 0$, lecz jedynie $h \neq 0$, gdyż dla $h < 0$ wystarczy uznać, że $x+h$ jest lewym końcem przedziału, a x prawym. Można to twierdzenie sformułować samymi słowami: jeśli funkcja różniczkowalna przyjmuje jednakowe wartości na końcach pewnego przedziału, to istnieje w tym przedziale punkt pośredni, w którym pochodna funkcji jest zerem. Właśnie warunek $\theta \in (0,1)$ odpowiada słowu „pośredni".

Twierdzenie to nie mówi, ile jest takich punktów, w których pochodna jest zerem. Może ich być więcej niż jeden, co pokazuje Rys. 4.5, na którym widać dwa punkty o zerowej pochodnej, w których styczna jest równoległa do osi X.



Rysunek 4.5



Rysunek 4.6

Twierdzenie 3 (Lagrange'a). Niech funkcja $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ będzie ciągła na swojej dziedzinie i różniczkowalna na (a,b). Wtedy istnieje takie $\theta \in (0,1)$, że

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a+\theta h),, \qquad \text{gdzie } h = b-a. \tag{4.11}$$

[Joseph Louis Lagrange (1736–1813) – matematyk francuski, w wieku 17 lat wykładał w Szkole Artyleryjskiej w Turynie.]

Dowód. Rozważmy sieczną przechodzącą przez wykres funkcji w punktach $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, patrz Rys. 4.6. Kąt nachylenia siecznej do osi X oznaczmy α. Przez dowolny punkt $x \in (a,b)$ przeprowadźmy prostą równoległą do osi Y i oznaczmy przez $g(x)$ długość odcinka tej prostej zawartego między krzywą $f(x)$ a sieczną. Długość odcinka zawartego między osią X a sieczną z jednej strony wynosi $f(x)+g(x)$, a z drugiej strony, z równania siecznej wynosi

$$f(a) + (x-a)\operatorname{tg}\alpha = f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Z przyrównania tych dwóch wyrażeń dostajemy

$$g(x) + f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

$$g(x) = f(a) - f(x) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Funkcja $g(x)$ wyraża się przez funkcję $-f(x)$, funkcję liniową $x - a$ oraz różne stałe, więc tak samo jak funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$ i różniczkowalna w (a, b), Sprawdzamy, że $g(a) = g(b) = 0$, zatem funkcja g spełnia założenia Twierdzenia Rolle'a. Jej pochodna wynosi

$$g'(x) = -f'(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tak więc na mocy Twierdzenia Rolle'a istnieje punkt między a i b, w którym pochodna g' znika. Innymi słowy, istnieje takie $\theta \in (0, 1)$, że $g'(a + \theta h) = 0$, czyli

$$-f'(a + \theta h) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

skąd

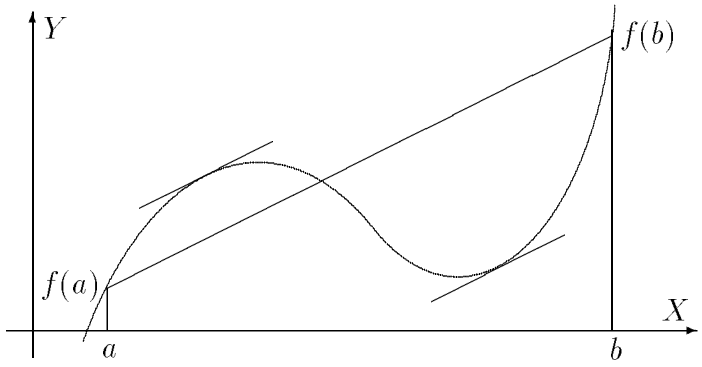
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a + \theta h). \ \blacksquare$$

To twierdzenie nazywa się czasami *twierdzeniem o wartości pośredniej*, gdyż mówi ono, że iloraz różnicowy jest równy pochodnej w jakimś punkcie pośrednim. Wykorzystując oznaczenie $h = b - a$ można wzorowi (4.11) nadać postać

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a + \theta h), \quad \text{a stąd} \quad f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h),$$

albo zamieniając a na dowolne x:

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h). \tag{4.12}$$



Rysunek 4.7

Na Rys. 4.7 ukazano wykres funkcji, która ma dwa punkty pośrednie, w których pochodna jest równa ilorazowi różnicowemu – w tych punktach styczne mają takie samo nachylenie do osi X jak sieczna przechodząca przez punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$.

Twierdzenie Lagrange'a pozwala ustalić związek między znakiem pochodnej, a wzrastaniem lub maleniem funkcji.

Lemat 2. Jeśli dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzi $f'(x) > 0$, to funkcja jest w tym przedziale rosnąca. Jeśli dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzi $f'(x) < 0$, to funkcja jest w tym przedziale malejąca.

Dowód. Z wzoru (4.12) przy $h > 0$ mamy $f(x + h) > f(x)$ dla pochodnej dodatniej, co oznacza, że funkcja jest rosnąca, albo $f(x + h) < f(x)$ dla pochodnej ujemnej, co oznacza, że funkcja jest malejąca. $\blacksquare$

Jeśli przyjmiemy dla pochodnej nierówności słabe, to dla $f'(x) \geq 0$ funkcja jest niemalejąca, a dla $f' \leq 0$ funkcja jest nierosnąca.

PRZYKŁAD 2. Funkcja $f(x) = (x-a)^2$ ma pochodną $f'(x) = 2(x-a)$. Pochodna jest ujemna dla $x < a$ i tam funkcja jest malejąca; pochodna jest dodatnia dla $x > a$ i tam funkcja jest rosnąca.

Lemat 3. Jeśli $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in (a,b)$, to funkcja f jest stała w przedziale (a,b).

Dowód. Wzór (4.12) daje wtedy $f(x+h) = f(x)$ dla wszystkich $x, \in (a,b)$ i odpowiednich h. ■

Jeśli założyć dodatkowo, że funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a,b\rangle$, to ma ona wartość stałą w całym tym przedziale. Można bowiem w dowodzie podstawić $x = a$.

Twierdzenie 4. Jeśli dla każdego $x \in (a,b)$ zachodzi $f'(x) = g'(x)$, to $f(x) = g(x) +$ const.

Dowód. Na mocy Tw. 1 z poprzedniego paragrafu $(f-g)' = f' - g'$, więc z założenia $(f-g)' = 0$. Dzięki Lematowi 3 mamy $(f-g)(x) = c$ dla pewnej stałej c, stąd $f(x) - g(x) = c$, $f(x) = g(x) + c$. ■

To twierdzenie jest bardzo ważne dla rachunku całkowego. Mówi ono, że dwie funkcje o tej samej pochodnej mogą się różnić tylko o *stałą addytywną*.

PRZYKŁAD 3. Prównajmy pochodne dwóch funkcyj o tej samej dziedzinie $f(c) = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tgh}\frac{x}{2})$ oraz $g(x) = \operatorname{arc\,tg} e^x$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(1+\frac{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}\right)\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\left(\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}+\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\operatorname{ch}x}.$$

Wykorzystalismy tu tożsamość $\operatorname{ch}^2 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$.

$$g'(x) = \frac{1}{1+(e^x)^2}\,e^x = \frac{1}{(1+e^{2x})\,e^{-x}} = \frac{1}{e^{-x}+e^x} = \frac{2}{\operatorname{ch}x}.$$

Stwierdzamy, że obie funkcje mają taką samą pochodną. Na mocy Tw. 4 funkcje te różnią się o stałą addytywną C:

$$g(x) = f(x) + C.$$

Ową stałą wyliczymy z porównania wartości obu funkcyj w wybranym punkcie $x = 0$:

$$g(0) = \operatorname{arc\,tg} e^0 = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}, \qquad f(0) = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tgh} 0) = \operatorname{arc\,tg} 0 = 0.$$

Stąd $C = \frac{\pi}{4}$ i mamy związek

$$\operatorname{arc\,tg} e^x = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{4}.$$

Twierdzenie 5 (Cauchy'ego). Jeśli funkcje f i f_1 są ciągłe w przedziale $\langle a, b\rangle$, różniczkowalne w (a, b) oraz $f_1'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in (a, b)$, to istnieje takie $\theta \in (0, 1)$, że

$$\frac{f(b) - f(a)}{f_1(b) - f_1(a)} = \frac{f'(a + \theta h)}{f_1'(a + \theta h)}, \tag{4.13}$$

gdzie $h = b - a$.

Dowód. Nie trzeba zakładać $f_1(b) \neq f_1(a)$, bo założyliśmy $f_1' \neq 0$, a wtedy Twierdzenie Rolle'a daje potrzebną nierówność. Wybierzmy funkcję g postaci

$$g(x) = f(a) - f(x) + [f_1(x) - f_1(a)]\frac{f(b) - f(a)}{f_1(b) - f_1(a)}.$$

Funkcja ta zeruje się na końcach przedziału: $g(a) = 0 = g(b)$. Jej pochodna ma postać

$$g'(x) = -f'(x) + f_1'(x)\frac{f(b) - f(a)}{f_1(b) - f_1(a)}.$$

Funkcja g spełnia założenia Twierdzenia Rolle'a, więc istnieje $\theta \in (0, 1)$ takie, że $g'(a + \theta h) = 0$, czyli

$$-f'(a + \theta h) + f_1'(a + \theta h)\frac{f(b) - f(a)}{f_1(b) - f_1(a)} = 0,$$

a stąd

$$\frac{f(b) - f(a)}{f_1(b) - f_1(a)} = \frac{f'(a + \theta h)}{f_1'(a + \theta h)}. \quad \blacksquare$$

We wzorze (4.13) istotne jest to, że θ jest to samo w liczniku i w mianowniku. Przy zastosowaniu Twierdzenia 3, czyli Lagrange'a osobno do funkcyj f oraz f_1 utworzenie ilorazu otrzymanych wyrażeń z pochodnymi dałoby różne liczby θ w liczniku i w mianowniku. Z Twierdzenia 5 otrzymuje się Twierdzenie Lagrange'a przez podstawienie za f_1 funkcji tożsamościowej. To oznacza, że Twierdzenie Cauchy'ego jest uogólnieniem Twierdzenia Lagrange'a.

To twierdzenie pozwala wyliczać wyrażenia nieoznaczone. Jeśli dwie funkcje f i g zerują się w tym samym punkcie: $f(a) = g(a) = 0$, to granica

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{4.14}$$

nazywa się *wyrażeniem nieoznaczonym typu* $\frac{0}{0}$. Jeśli w tym samym punkcie funkcje są rozbieżne do nieskończoności

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

to granica (4.14) nazywa się *wyrażeniem nieoznaczonym typu* $\frac{\infty}{\infty}$.

Twierdzenie 6. Jeśli funkcje f, g są ciągłe w zbiorze (a, b) i różniczkowalne w zbiorze $(a, b) \setminus \{c\}$ oraz $f(c) = g(c) = 0$, to

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{4.15}$$

przy założeniu, że ostatnia granica istnieje.

Dowód. Przyjmijmy oznaczenie $x = c + h$. Z założenia $f(c) = g(c) = 0$ mamy

$$\frac{f(c+h)}{g(c+h)} = \frac{f(c+h) - f(c)}{g(c+h) - g(c)}.$$

Funkcje f, g spełniają założenia Twierdzenia Cauchy'ego, więc korzystamy z (4.13)

$$\frac{f(c+h)}{g(c+h)} = \frac{f(c+h) - f(c)}{g(c+h) - g(c)} = \frac{f'(c+\theta h)}{g'(c+\theta h)}.$$

Skoro zachodzi $\lim\limits_{h\to 0} \theta h = 0$, więc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(c+\theta h)}{g'(c+\theta h)} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h)}{g'(c+h)}.$$

W ten sposób dostajemy

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)}{g(c+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h)}{g'(c+h)}.$$

Po powrocie do oznaczenia $c + h = x$ jest to wzór (4.15). ∎

Twierdzenie 7. Jeśli funkcje f, g są ciągłe i różniczkowalne w zbiorze $(a, b) \setminus \{c\}$ oraz

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \infty,$$

to

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{4.16}$$

przy założeniu, że ostatnia granica istnieje.

Dowód – patrz książka Witolda Kołodzieja *Analiza matematyczna*, str. 155.

Twierdzenia 6 i 7 zwane są *regułami de l'Hospitala.* [Guillaume François Antoin de l'Hospital (1661-1704) – matematyk francuski, uczeń Johanna Bernoullego, autor pierwszego podręcznika o rachunku różniczkowym.]

PRZYKŁAD 4. Dla znalezienia granicy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

oznaczmy $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = x$. Stwierdzamy, że $f(0) = g(0) = 0$, więc mamy wyrażenie nieoznaczone typu $\frac{0}{0}$. Wzór (4.15) daje w tym wypadku

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x)}{1} = 1.$$

Na koniec tego paragrafu przedstawię, jak matematycy opisywali różniczki jeszcze przed 30 laty – opieram się tu na podręczniku Kazimierza Kuratowskiego *Rachunek różniczkowy i całkowy*, wydanie trzecie, str. 130. Wzór (4.12) możemy przepisać w postaci

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h,$$

albo po wprowadzeniu oznaczeń $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x), \Delta x = h$:

$$\Delta f = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x. \tag{4.17}$$

W miarę, gdy $\Delta x \to 0$, współczynnik przy Δx po prawej stronie dąży do pochodnej w punkcie x. *Różniczką funkcji f* nazywa się wyrażenie

$$df(x) = f'(x)\Delta x. \tag{4.18}$$

W miarę, gdy $\Delta x \to 0$, różnica wyrażeń (4.17) i (4.18) dąży do zera. Co więcej – stosunek tej różnicy do Δx dąży do zera, gdyż

$$\frac{\Delta f - df}{\Delta x} = f'(x + \theta\Delta x) - f'(x) \to 0.$$

To znaczy, że różnica $\Delta f - df$ dąży do zera szybciej niż Δx.

Istnienie różniczki jest zatem nierozłącznie związane z istnieniem pochodnej – jeśli funkcja ma pochodną, to ma także różniczkę, a różniczki nie określimy bez pochodnej. Wobec tego zamiast mówić „funkcja ma pochodną", mówimy „funkcja jest różniczkowalna", a zamiast mówić „obliczyć pochodną funkcji", mówimy „zróżniczkować funkcję". Z tego powodu naukę o pochodnych nazywamy *rachunkiem różniczkowym*.

Zastosujmy wzór (4.18) do funkcji tożsamościowej $f(x) = x$. Wiemy, że $f'(x) = 1$, dostajemy więc

$$dx = \Delta x,$$

co oznacza, że różniczka zmiennej x pokrywa się z jej przyrostem. Kiedy to wstawimy do wzoru (4.18) po prawej stronie, wtedy dostaniemy

$$df(x) = f'(x)dx. \tag{4.19}$$

To jest najczęściej używana postać różniczki funkcji. Podsumujmy: wzór (4.19) jest wzorem przybliżonym na przyrost funkcji – o przybliżeniu tym lepszym, im mniejszy jest przyrost zmiennej niezależnej $dx = \Delta x$. W takim rozumieniu różniczki nie są wielkościami nieskończenie małymi, lecz raczej dowolnie małymi.

4.3 Pochodne wyższych rzędów

Pochodną funkcji f nazywamy także *pochodną rzędu pierwszego. Drugą pochodną* albo *pochodną rzędu drugiego* funkcji f nazywamy pochodną pochodnej tej funkcji. Podobnie *trzecia pochodna* albo *pochodna rzędu trzeciego* to pochodna drugiej pochodnej. Definicja indukcyjna: *n-ta pochodna* jest to pochodna $(n-1)$-szej pochodnej. Pochodne wyższych rzędów oznaczamy

$$f',\ f'',\ f''',\ f^{(4)},\ f^{(5)},\ \ldots,\ f^{(n)}, \ldots \quad \text{lub} \quad \frac{df}{dx},\ \frac{d^2f}{dx^2},\ \frac{d^3f}{dx^3},\ \ldots,\ \frac{d^nf}{dx^n},\ \ldots$$

Mamy więc indukcyjny wzór na *pochodną n-go rzędu*:

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})', \quad \text{lub} \quad \frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right).$$

Mówimy, że funkcja f jest *n-krotnie różniczkowalna w punkcie a*, jeśli ma w punkcie a pochodną rzędu n. Funkcja jest *n-krotnie różniczkowalna*, jeśli ma pochodną rzędu n w każdym punkcie dziedziny.

PRZYKŁAD FIZYCZNY. Jeśli zmienna niezależna jest czasem, a wartości funkcji oznaczają położenie, to druga pochodna tej funkcji jest pochodną prędkości względem czasu, czyli *przyspieszeniem*. Trzecia pochodna położenia względem czasu nazywana jest *zrywem*.

PRZYKŁAD 1. Funkcja potęgowa o wykładniku naturalnym jest n-krotnie różniczkowalna dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i zachodzi wzór:

$$(x^k)^{(n)} = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+2)(k-n+1)x^{k-n}.$$

Dla $n > k$ ten wzór daje zero dla wszystkich x, bo już dla $n = k+1$ ostatni współczynnik przed zmienną niezależną jest zerem.

PRZYKŁAD 2. Funkcja potęgowa o wykładniku rzeczywistym różnym od liczb naturalnych i od zera jest n-krotnie różniczkowalna dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i zachodzi wzór podobny do poprzedniego:

$$(x^a)^{(n)} = a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+2)(a-n+1)x^{a-n}.$$

Tym razem żadna pochodna nie jest zerem, gdyż wśród współczynników stojących przed zmienną niezależną nie wystąpi zero.

PRZYKŁAD 3. Funkcja e^x ma tę własność, że pochodne wszystkich rzędów są z nią identyczne, jest więc różniczkowalna dowolnie wiele razy.

PRZYKŁAD 4. Funkcja wykładnicza a^x jest n-krotnie różniczkowalna dla dowolnego n i zachodzi wzór

$$(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n \ a^x.$$

Lemat 1. Niech funkcje f i g będą n-krotnie różniczkowalne w punkcie a. Wtedy n-ta pochodna ich sumy (bądź różnicy) w punkcie a jest sumą (bądź różnicą) ich n-tych pochnych w tym punkcie.

D o w ó d przez indukcję. Dla $n = 1$ ten Lemat jest powtórzeniem Tw. 1 z § 4.1. Załóżmy jego prawdziwość dla $n = k$ i sprawdźmy dla $n = k+1$. Wykorzystujemy indukcyjny wzór na $(k+1)$-ą pochodną:

$$(f \pm g)^{(k+1)} = [(f \pm g)^{(k)}]'.$$

Z założenia indukcyjnego:

$$(f \pm g)^{(k+1)} = (f^{(k)} \pm g^{(k)})',$$

i z Tw. 1 w § 4.1:

$$(f \pm g)^{(k+1)} = (f^{(k)})' \pm (g^{(k)})' = f^{(k+1)} \pm g^{(k+1)}. \ \blacksquare$$

Lemat 2. Niech funkcje f i g będą n-krotnie różniczkowalne w punkcie a. Wtedy n-ta pochodna ich iloczynu w punkcie a wyraża się następującym *wzorem Leibniza*:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}. \tag{4.20}$$

D o w ó d przez indukcję. Dla $n = 1$ ten Lemat jest powtórzeniem Tw. 2 z § 4.1. Załóżmy jego prawdziwość dla n i sprawdźmy dla $n + 1$. Wykorzystujemy indukcyjny wzór na $(k + 1)$-ą pochodną:

$$(fg)^{(n+1)} = [(fg)^{(n)}]'.$$

Z założenia indukcyjnego:

$$(fg)^{(n+1)} = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right]' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f^{(k)} g^{(n-k)}\right]',$$

i z Tw. 2 w § 4.1:

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\left(f^{(k)}\right)' g^{(n-k)} + f^{(k)} \left(g^{(n-k)}\right)'\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right] \\
&= \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} f^{(k')} g^{(n+1-k')} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f\, g^{(n+1)}.
\end{aligned}$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest równe $\binom{n+1}{k}$, więc dostajemy

$$(fg)^{(k+1)} = f\, g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)} g = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.$$

A to jest szukany wzór (4.20) dla $n + 1$ w miejsce n. $\blacksquare$

PRZYKŁAD 5. Dla wielomianu k-go stopnia $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k$ otrzymujemy

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + (k-1) a_{k-1} x^{k-2} + k a_k x^{k-1}, \qquad p'(0) = a_1,$$

$$p''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + \ldots + (k-1)(k-2) a_{k-1} x^{k-3} + k(k-1) a_k x^{k-2}, \ \ p''(0) = 2a_2,$$

$$p'''(x) = 3 \cdot 2 a_3 + \ldots + (k-1)(k-2)(k-3) a_{k-1} x^{k-4} + k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3},$$

$$p'''(0) = 3! a_3,$$

. . . .

$$p^{(k-1)}(x) = (k-1)(k-2)(k-3)\cdots 3\cdot 2a_{k-1} + k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2a_k x,$$

$$p^{(k-1)}(0) = (k-1)!a_{k-1}$$

$$p^{(k)}(x) = p^{(k)}(0) = k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2a_k = k!a_k.$$

Ta pochodna jest funkcją stałą; wyższe pochodne są zerami. Oczywiście ta funkcja jest różniczkowalna dowolnie wiele razy. Stąd wyliczamy

$$a_0 = p(0), \quad a_1 = p'(0), \ a_2 = \frac{1}{2}p''(0), \ a_3 = \frac{1}{3!}p'''(0), \ \ldots \ a_k = \frac{1}{k!}p^{(k)}(0).$$

Wstawiwszy tak wyliczone współczynniki do wyjściowego wielomianu otrzymujemy

$$p(x) = p(0) + xp'(0) + \frac{x^2}{2!}p''(0) + \frac{x^3}{3!}p'''(0) + \ \ldots \ + \frac{x^k}{k!}p^{(k)}(0). \tag{4.21}$$

Jest to ważny wzór, który będzie uogólniony dla dowolnej funkcji.

Twierdzenie 1. Jeśli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w przedziale $\langle a, b\rangle$, to $f(b)$ można przedstawić w postaci

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ \ldots \ + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n, \tag{4.22}$$

przy czym

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta h) \tag{4.23}$$

gdzie $h = b - a$, zaś $\theta \in (0, 1)$.

Dowód. Wzór (4.22) można zawsze napisać, dopóki nie określi się wielkości R_n. Zatem dowód polega na udowodnieniu równości (4.23). Z wzoru (4.22) mamy

$$R_n = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) - \ \ldots \ - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a).$$

Oznaczmy przez $g_n(x)$ funkcję pomocniczą, która powstaje z R_n, jeśli zastąpić a przez x:

$$g_n(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!}f''(x) - \ \ldots \ - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x).$$

Zauważmy, że $g_n(a) = R_n$, $g_n(b) = 0$. Zróżniczkujmy funkcję g_n względem x; w nawiasach prostokątnych jest wynik stowania wzoru na pochodną iloczynu:

$$g_n'(x) = -f'(x) + [f'(x) - (b-x)f''(x)] + \left[2\frac{b-x}{2!}f''(x) - \frac{(b-x)^2}{2!}f'''(x)\right] + \ \ldots$$

$$\ldots \ + \left[(n-1)\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)\right].$$

Zauważamy dużo wyrazów podobnych, które się redukują i zostaje

$$g_n'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x).$$

Do funkcji g_n stosujemy Twierdzenie Lagrange'a o wartości pośredniej:

$$\frac{g_n(b) - g_n(a)}{b-a} = g_n'(a + \theta h).$$

Podstawiamy wyliczone poprzednio wartości

$$\frac{-R_n}{h} = -\frac{[b-(a+\theta h)]^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta h) = -\frac{(h-\theta h)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta h)$$

$$= -\frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta h).$$

Stąd

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta h). \blacksquare$$

Wzór (4.22) nazywa się *wzorem Taylora*, a (4.23) *wzorem Cauchy'ego na resztę*. W przypadku $a = 0$ i $b = x$ otrzymuje się *wzór Maclaurina*:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ \dots\ + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n, \tag{4.24}$$

gdzie

$$R_n = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\theta x). \tag{4.25}$$

Wzór (4.21) jest szczególnym przypadkiem wzoru (4.24), gdy reszta wynosi zero. [Brook Taylor (1685–1731) – matematyk angielski, Colin Maclaurin (1698–1746) – matematyk szkocki.]

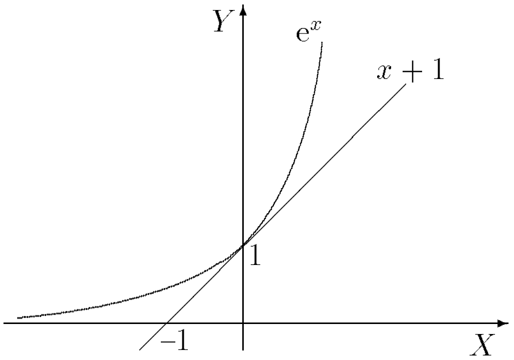
PRYKŁAD 6. Zastosujmy wzór Maclaurina do funkcji wykładniczej $f(x) = \mathrm{e}^x$ wybierając $n = 2$. Wtedy $f'(x) = f''(x) = \mathrm{e}^x$ oraz $f(0) = f'(0) = 1$ a wzór (4.25) daje $R_2 = x^2(1-\theta)\mathrm{e}^{\theta x}$. Wstawiamy to do (4.24) otrzymując

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + x^2(1-\theta)\mathrm{e}^{\theta x}.$$

Ostatni wyraz jest nieujemny, bo $x^2 \geq 0$ tudzież $\mathrm{e}^{\theta x} > 0$, więc opuszczając go dostajemy nierówność

$$\mathrm{e}^x \geq 1 + x.$$

To oznacza, że wykres funkcji wykładniczej nigdy nie schodzi poniżej wykresu funkcji $y = x{+}1$. A o tym, że wykresy mają punkt wspólny (0,1), przekonujemy się przez zwykłe podstawienie. Wspomniane własności ilustruje Rys. 4.8.



Rysunek 4.8

Wzór (4.22) można zapisać za pomocą znaku sumy (przy okazji zamieniamy też b na x):

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+R_n.$$

Wyraz $f^{(0)}$ w tej sumie oznacza samą funkcję bez różniczkowania. Jeśli reszta (4.23) spełnia własność $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$, to po przejściu granicznym $n\to\infty$ dostajemy sumę nieskończoną, czyli szereg:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a). \tag{4.26}$$

Wyrażenie to nazywa się *szeregiem Taylora*. Jako szczególny przypadek odpowiada mu *szereg Maclaurina*:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0). \tag{4.27}$$

Jeśli we wzorze Maclaurina zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$, to mówimy, że funkcja f *ma rozwinięcie w szereg potęgowy* albo że *daje się rozwinąć w szereg potęgowy.*

PRZYKŁAD 7. Zastosujmy wzór Maclaurina do funkcji wykładniczej $f(x)=\mathrm{e}^x$. Wiemy, że $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x$, stąd $f^{(n)}(0)=1$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$, więc (4.24) daje

$$\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}+R_n.$$

Przyjrzymy się, do czego dąży reszta R_n. Według wzoru (4.25) mamy

$$R_n=\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{\theta x}=x\mathrm{e}^{\theta x}\frac{[x(1-\theta)]^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Oznaczywszy $x(1-\theta)=b$, granicę tego ciągu możemy zapisać

$$\lim_{n\to\infty}R_n=x\mathrm{e}^{\theta x}\lim_{n\to\infty}\frac{b^{n-1}}{(n-1)!}=x\mathrm{e}^{\theta x}\lim_{n\to\infty}\frac{b^n}{n!}.$$

Granica ostatniego ciągu jest zerem, o czym przekonamy się na ćwiczeniach. Skoro ciąg reszt dąży do zera, to funkcja wykładnicza daje się rozwinąć w następujący *szereg potęgowy*:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{4.28}$$

Po Twierdzeniu 1 z poprz. pragrafu umieściliśmy uwagę, że jeśli pochodna funkcji w jakimś punkcie jest zerem, to w tym punkcie nie musi być ekstremum lokalne. Zajmiemy się teraz dokładniejszym kryterium na występowanie ekstremum.

Twierdzenie 2. Niech funkcja f ma ciągłą n-tą pochodną w punkcie c, niech $f'(c) = 0$, $f''(c) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(c) = 0$, natomiast

$$f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Wówczas jeśli n jest liczbą parzystą, to funkcja f ma w punkcie c lokalne maksimum właściwe dla $f^{(n)}(c) < 0$ lub lokalne minimum właściwe dla $f^{(n)}(c) > 0$. Natomiast jeśli n jest liczbą nieparzystą, to funkcja nie ma ekstremum w punkcie c.

Dowód. Na mocy wzoru Taylora mamy

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{2!}f''(c) + \ \ldots \ + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(c) + \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c+\theta h).$$

Z założeń twierdzenia wiele składników sumy jest zerami, więc zostaje tylko pierwszy i ostatni składnik

$$f(c+h) - f(c) = \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c+\theta h). \tag{4.29}$$

Niech n będzie liczbą parzystą i niech $f^{(n)}(c) < 0$. Skoro pochodna $f^{(n)}$ jest ciągła w punkcie c, to na mocy twierdzenia o lokalnym zachowaniu znaku (Tw. 6, § 3.2) istnieje taka $\delta > 0$, że dla $|x - c| < \delta$ zachodzi $f^{(n)}(x) < 0$. Jeśli więc $|h| < \delta$, to i $|\theta h| < \delta$, a zatem $f^{(n)}(c + \theta h) < 0$. Dla parzystego n mamy też $h^n > 0$, więc prawa strona wzoru (4.29) jest ujemna. Tak więc mamy wynikanie

$$0 < |h| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(c+h) < f(c).$$

To oznacza, że funkcja f ma w punkcie c lokalne maksimum właściwe. Analogicznie pokazuje się, że dla $f^{(n)}(c) > 0$ zachodzi wynikanie

$$0 < |h| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(c+h) > f(c),$$

zatem funkcja f ma w punkcie c lokalne minimum właściwe.

Załóżmy teraz, że n jest liczbą nieparzystą. Jeśli $f^{(n)}(c) < 0$, to dobieramy $\delta > 0$ tak, zeby dla $|h| < \delta$ było $f^{(n)}(c + \theta h) < 0$. Wtedy dzięki (4.29) zachodzą nierówności

$$f(c) > f(c+h) \quad \text{dla} \quad h \in (0, \delta)$$

oraz

$$f(c) < f(c+h) \quad \text{dla } h \in (-\delta, 0).$$

To oznacza, że w punkcie c funkcja f nie ma ani maksimum, ani minimum. Jeśli $f^{(n)}(c) > 0$, to nierówności zmieniają zwroty:

$$f(c) < f(c+h) \quad \text{dla} \quad h \in (0, \delta)$$

$$f(c) > f(c+h) \quad \text{dla } h \in (-\delta, 0)$$

i także nie ma estremum w punkcie c. ■

PRZYKŁAD 8. Zbadajmy, kiedy funkcja $f(x) = x^k$ ma ekstremum. W Przykładzie 1 wyliczyliśmy

$$f^{(n)}(x) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+2)(k-n+1)x^{k-n}.$$

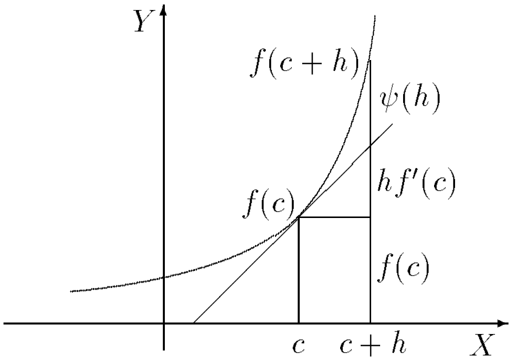
Widzimy, że dla wszystkich $n < k$ zachodzi $f^{(n)}(0) = 0$, dopiero niezerowa w zerze jest pochodna rzędu k, która wynosi $f^{(k)}(0) = k! > 0$. Na mocy Twierdzenia 2 możemy powiedzieć, że dla k parzystego funkcja ma minimum w zerze, zaś dla k nieparzystego nie ma ekstremum w zerze.

Twierdzenie 3. Niech funkcja f ma ciągłą drugą pochodną. Jeśli $f''(c) > 0$, to krzywa $y = f(x)$ w pewnym otoczeniu punktu c jest położona powyżej stycznej w punkcie $(c, f(c))$ (tzn. ma wypukłość zwróconą w dół). Jeśli $f''(c) < 0$, to krzywa $y = f(x)$ w pewnym otoczeniu punktu c jest położona poniżej stycznej w punkcie $(c, f(c))$ (tzn. ma wypukłość zwróconą w górę).

Dowód. Wprowadźmy różnicę między wykresem a styczną

$$\psi(h) = f(c+h) - f(c) - hf'(c).$$

Związek między wielkościami z tego wzoru ukazany jest na Rys. 4.9.



Rysunek 4.9

Z wzoru Taylora dla $n = 2$ mamy

$$f(c+h) - f(c) - hf'(c) = h^2(1-\theta)f''(c+\theta h)$$

a stąd

$$\psi(h) = h^2(1-\theta)f''(c+\theta h). \tag{4.30}$$

Jeśli $f''(c) > 0$, to dla dostatecznie małych h mamy $f''(c+\theta h) > 0$ i na podstawie (4.30) otrzymujemy $\psi(h) > 0$ dla $h \neq 0$. A to oznacza, że wykres leży nad styczną w punkcie $(c, f(c))$.

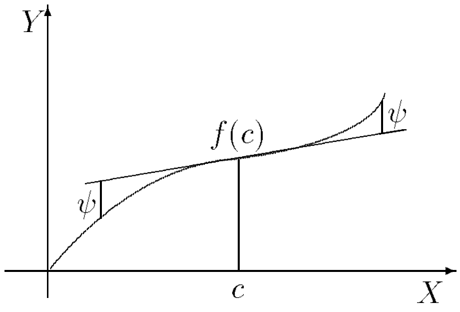
Dowód drugiej tezy jest analogiczny. ■

PRZYKŁAD 9. Dla funkcji $f(x) = \sin x$ druga pochodna wynosi $f''(x) = -\sin x$ i jest ujemna tam, gdzie sama funkcja jest dodatnia, czyli w tych fragmentach wykres leży pod styczną. Natomiast tam, gdzie funkcja jest ujemna, jej druga pochodna jest dodatnia i tam wykres leży nad styczną.

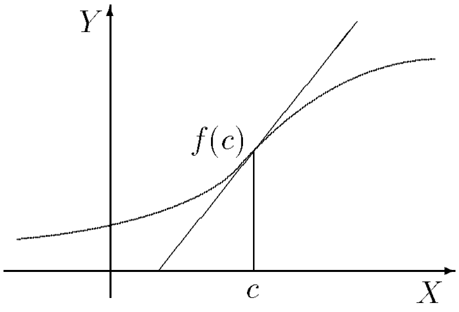
Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ ma w punkcie c *punkt przegięcia*, jeśli dla dostatecznie małych przyrostów h łuk krzywej dla $h > 0$ leży po innej stronie stycznej do wykresu w punkcie $(c, f(c))$ niż dla $h < 0$, patrz Rys. 4.10. Innymi słowy, jeśli istnieje takie $\delta > 0$, że dla $h \in (0, \delta)$ wyrażenie

$$\psi(h) = f(c+h) - f(c) - hf'(c) \tag{4.31}$$

jest dodatnie, zaś dla $h \in (-\delta, 0)$ ujemne jak na Rys. 4.10 lub odwrotnie jak na Rys. 4.11.



Rysunek 4.10



Rysunek 4.11

PRZYKŁAD 10. Sinusoida $y = \sin x$ ma w zerze punkt przegięcia. Faktycznie, w tym wypadku $\psi(h) = \sin h - \sin 0 - h\cos 0 = \sin h - h$; różnica ta jest ujemna dla $h > 0$, a dodatnia dla $h < 0$.

Twierdzenie 4. Jeśli c jest punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$, to $f''(c) = 0$.

Dowód nie wprost. Przyjmijmy, że $f''(c) \neq 0$; wtedy z Twierdzenia 3 wynika, że krzywa wykresu funkcji leży lokalnie (czyli dla pewnego otoczenia punktu c) po jednej stronie stycznej. A to oznacza, że c nie jest punktem przegięcia. ■

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe: znamy funkcje, dla których druga pochodna jest zerem w jakimś punkcie, a nie jest to punkt przegięcia. Na przykład dla funkcji $f(x) = x^4$ druga pochodna $f''(x) = 12x^2$ w zerze jest zerem, ale zero nie jest punktem przegięcia, lecz minimum tej funkcji.

Twierdzenie 5. Niech funkcja f ma ciągłą n-tą pochodną w punkcie c, niech $f''(c) = 0$, $f'''(c) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(c) = 0$, natomiast

$$f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Wówczas jeśli n jest liczbą nieparzystą, to funkcja f ma w c punkt przegięcia. Natomiast jeśli n jest liczbą parzystą, to c nie jest punktem przegięcia.

Dowód. Na mocy wzoru Taylora mamy

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{2!}f''(c) + \ \ldots \ + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(c) + \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c+\theta h).$$

Z założeń twierdzenia wiele składników sumy jest zerami, zostaje więc

$$f(c+h) - f(c) - hf'(c) = \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c+\theta h).$$

Po porównaniu z wzorem (4.31) możemy napisać

$$\psi(h) = \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(c+\theta h).$$

Załóżmy, że n jest liczbą nieparzystą. Jeśli $f^{(n)}(c) > 0$, to dzięki ciągłości tej pochodnej w punkcie c dla dostatecznie małego h mamy również $f^{(n)}(c+\theta h) > 0$. Stąd przy dodatnim h mamy $h^n > 0$ i $\psi(h) > 0$, czyli wykres jest nad styczną, zaś przy ujemnym h mamy $h^n < 0$ i $\psi(h) < 0$, czyli wykres jest pod styczną. A to oznacza, że c jest punktem przegięcia. Dla $f^{(n)}(c) < 0$ rozumowanie jest podobne, a wniosek identyczny.

Załóżmy, że n jest liczbą parzystą, wtedy $h^n > 0$ niezależnie od znaku h, więc $\psi(h)$ ma ten sam znak, co $f^{(n)}(c)$. To oznacza, że krzywa leży po jednej stronie stycznej, zatem c nie jest punktem przegięcia. ■