Rozdział 5

CAŁKOWANIE

5.1 Całka nieoznaczona

W tym rozdziale poznamy drugie z dwóch podstawowych pojęć tego wykładu, mianowicie całkę funkcji. Dział matematyki tym się zajmujący nazywa się *rachunkiem całkowym.* Obiczanie całek wiąże się z obliczaniem pól powierzchni obszarów o zakrzywionych brzegach.

Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$ i niech D_f zawiera przedział otwarty. Funkcję $F : D_f \to \mathbb{R}$ nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f, jeśli dla każdego $x \in D_f$ zachodzi $F'(x) = f(x)$. Na przykład funkcja $F(x) = \sin x + 4$ jest pierwotna dla funkcji $f(x) = \cos x$. Jeśli funkcja f ma za dziedzinę przedział domknięty $D_f = \langle a, b \rangle$, to F nazywamy jej funkcją pierwotną, jeśli $F'(x) = f(x)$ dla $x \in (a, b)$ oraz pochodne jednostronne wynoszą $F'_+(a) = f(a)$ oraz $F'_-(b) = f(b)$.

Jeśli z funkcji F utworzymy inną funkcję G przez dodanie stałej C: $G(x) = F(x) + C$, to funkcja G jest też pierwotna dla f, bo pochodna sumy jest sumą pochodnych, a pochodna stałej jest zerem.

Lemat 1. Jeśli dwie funkcje F i G są funkcjami pierwotnymi funkcji f w przedziale (a, b), to różnią się między sobą tylko o stałą addytywną.

Dowód. Jest to w istocie inne sformułownie Twierdzenia 4 z § 4.2. ■

Dzięki temu Lematowi możemy twierdzić, że wyrażenie $F(x) + C$ jest ogólną postacią funkcji pierwotnej funkcji f – więcej ich nie ma. Funkcję pierwotną oznaczamy symbolem

$$\int f(x)dx,$$

czytamy: całka f od x po dx i nazywamy również *całką nieoznaczoną* funkcji f. Niektórzy autorzy używają nazwy *antypochodna.* Symbol $\int$ wziął się z litery S i pochodzi od łacinskiego słowa *summa*, co znaczy suma. Mamy przeto cztery zapisy tej samej treści:

$$F'(x) = f(x), \tag{5.1}$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{5.2}$$

$$\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x), \tag{5.3}$$

$$\int \frac{dF(x)}{dx}dx = F(x) + C. \tag{5.4}$$

Znajdowanie funkcji pierwotnej funkcji f, czyli znajdowanie całki nieoznaczonej funkcji f nazywa się *całkowaniem* funkcji f. Jest to działanie odwrotne do różniczkowania, co widać z wzorów (5.3) i (5.4).

Z definicji całki nieoznaczonej widać, że jeśli znamy pochodną jakiejś, funkcji to automatycznie możemy napisać wzór na całkę funkcji pochodnej. Na przykład z wzoru

$$\frac{d\ln|x|}{dx} = \frac{1}{x}$$

otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C.$$

Jednak na ogół zagadnienie obliczenia całki jakiejś funkcji ciągłej, która nie jest nam znana jako pochodna innej funkcji, przedstawia większe trudności niż różniczkowanie. Jak widzieliśmy w § 10 (Twierdzenie 4), różniczkowanie złożenia funkcyj elementanych daje funkcje elementarne, natomiast dla całkowania nie można tego powiedzieć.

Na podstawie wzorów z Tabeli 1 możemy napisać wzory na całki nieoznaczone niektórych funkcyj elementarnych. Zbieramy je w Tabeli 2, której wzory trzeba znać na pamięć.

Tabela 2

całka nieoznaczona	całka nieoznaczona
$\int 0dx = C$	$\int \cos x \; dx = \sin x + C$
$\int bdx = bx + C$	$\int \sin x \; dx = -\cos x + C$
$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$ dla $a \neq -1$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$

Jeśli dziedzina funkcji F dającej równość $F' = f$ nie jest przedziałem skończonym lub nieskończonym, to nie można twierdzić, że wyrażenie $F(x)+C$ obejmuje wszystkie funkcje pierwotne funkcji f na tej dziedzinie. Na przykład funkcja $\ln|x|+C$ ma za dziedzinę sumę mnogościową dwóch przedziałów $(-\infty, 0)$ oraz $(0, \infty)$ bez punktu wspólnego, a w każdym z tych przedziałów może być inna stała całkowania. Funkcja G określona wzorem

$$G(x) = \begin{cases} \ln|x| + C_1 & \text{gdy} \quad x < 0, \\ \ln|x| + C_2 & \text{gdy} \quad x > 0 \end{cases}$$

też ma jako pochodną funkcję $f(x) = 1/x$, czyli jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 1/x$.

Twierdzenie 1. Niech będzie dany punkt $x_0 \in (a, b)$ i liczba $y_0 \in \mathbb{R}$. Jeśli funkcja f posiada pierwotną w przedziale (a, b), to posiada tylko jedną funkcję pierwotną F taką, że $F(x_0) = y_0$.

Dowód. Niech P będzie dowolną funkcją pierwotną funkcji f w (a, b). Określamy $F(x) = P(x) - P(x_0) + y_0$. Jej pochodna wynosi $F'(x) = P'(x) = f(x)$, poza tym $F(x_0) = y_0$. Znaleźliśmy funkcję F spełniającą warunki twierdzenia.

Każda inna funkcja pierwotna jest postaci $F(x) + C$. Jeśli od niej zażądamy spełnienia warunku $F(x_0) + C = y_0$, to dostaniemy $C = 0$, więc pokrywa się ona z funkcją $F(x)$. ■

To oznacza geometrycznie, że przez każdy punkt płaszczyzny o współrzędnej poziomej $x \in (a, b)$ przechodzi linia wykresu jakiejś funkcji pierwotnej zwana *krzywą całkową* i to tylko jedna taka krzywa. Wszystkie krzywe całkowe są do siebie równoległe.

Lemat 2. Całka sumy jest sumą całek:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx. \tag{5.5}$$

Dowód. Zróżniczkujmy prawą stronę i skorzystajmy z faktu, iż pochodna sumy jest sumą pochodnych:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right) = \frac{d}{dx}\int f(x)dx + \frac{d}{dx}\int g(x)dx.$$

A teraz korzystamy z (5.3):

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right) = f(x) + g(x).$$

Skoro pochodna prawej strony wzoru (5.5) daje funkcję podcałkową lewej strony, to wzór ten jest prawdziwy. ■

Lemat 3. Stałą można wyciągnąć przed całkę:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx. \tag{5.6}$$

Dowód. Różniczkujemy prawą stronę i korzystamy z tego, że stałą można wyciągnąć przed znak pochodnej, oraz z tożsamości (5.3):

$$\frac{d}{dx}\left(a\int f(x)dx\right) = a\frac{d}{dx}\int f(x)dx = af(x).$$

Skoro pochodna prawej strony wzoru (5.6) daje funkcję podcałkową lewej strony,to wzór ten jest prawdziwy. ■

PRZYKŁAD 1. Całka wielomianu wynosi

$$\int \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ \dots \ + a_nx^n\right) dx = C + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_3}{4}x^4 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Twierdzenie 2 – *Całkowanie przez podstawienie albo zamianę zmiennych*:

$$\int g(f(x))\frac{df(x)}{dx}dx = \left[\int g(y)dy\right]\Big|_{y=f(x)}, \tag{5.7}$$

przy czym po prawej stronie po obliczeniu całki trzeba podstawić $y = f(x)$.

Dowód. Podstawmy $G(y) = \int g(y)dy$, co oznacza $G'(y) = g(y)$. Aby udowodnić wzór (5.7), trzeba wykazać, że pochodna funkcji $(G \circ f)$ równa się funkcji podcałkowej po lewej stronie. Liczymy pochodną funkcji złożonej:

$$(G \circ f)'(x) = \frac{dG(f(x))}{dx} = \left(\frac{dG(y)}{dy}\right)_{y=f(x)} \frac{df(x)}{dx} = g(f(x))\frac{df(x)}{dx},$$

co jest właśnie funkcją podcałkową po lewej stronie wzoru (5.7). ■

Po podstawieniu $y = f(x)$ wzór (5.7) można zapisać następująco

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int g(y)dy.$$

Wtedy wygląda on tak, jakby nastąpiło uproszczenie przez różniczkę dx.To spostrzeżenie ułatwia zapamiętanie wzoru (5.7).

PRZYKŁAD 2. Jak wyliczyć całkę $\int g(ax)dx$? Podstawmy w Twierdzeniu 2 $f(x) = ax$, a wtedy $\frac{df(x)}{dx} = a$ i wzór (5.7) przyjmuje postać

$$\int g(ax)adx = \int g(y)dy,$$

skąd po podzieleniu stronami przez a dostajemy

$$\int g(ax)dx = \frac{1}{a}\int g(y)dy.$$

PRZYKŁAD 3. Jak wyliczyć całkę $\int g(x+a)dx$? Podstawmy w Twierdzeniu 2 funkcję $f(x) = x + a$, a wtedy $\frac{df(x)}{dx} = 1$ i wzór (5.7) daje

$$\int g(x+a)dx = \int g(y)dy.$$

PRZYKŁAD 4. Chcemy wyliczyć całkę $\int \frac{xdx}{1+x^2}$. Zauważamy, ze licznik jest proporcjonalny do pochodnej mianownika. Zróbmy tak, żeby tam była cała pochodna mianownika $y = 1 + x^2$, czyli $\frac{dy}{dx} = 2x$. Musimy więc pomnożyć i podzielić całkę przez 2:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\frac{d(1+x^2)}{dx}dx.$$

Widzimy w tym wzorze $g(y) = \frac{1}{y}$ oraz $y = f(x) = 1 + x^2$, więc według wzoru (5.7)

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

PRZYKŁAD 5. Wyliczymy całkę z tangensa. Zapisawszy $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ zauważamy, że licznik jest proporcjonalny do pochodnej mianownika:

$$\int \operatorname{tg} x\; dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}\frac{d\cos x}{dx}dx = -\int \frac{dy}{y} = -\ln|y| + C$$
$$= -\ln|\cos x| + C.$$

W podanych przykładach metoda całkowania polega na znalezieniu takiej funkcji $y = f(x)$, żeby daną całkę przekształcić w łatwiejszą do obliczenia całkę względem zmiennej y.

Twierdzenie 3 – *Całkowanie przez części.* Niech funkcje v i u mają ciągłe pochodne; wtedy

$$\int v(x)u'(x)dx = v(x)u(x) - \int v'(x)u(x)dx. \tag{5.8}$$

Dowód. Wychodzimy od wzoru na pochodną iloczynu: $(vu)' = v'u + vu'$. Piszemy całkę obu stron; na mocy wzoru (5.4) mamy więc

$$(vu)(x) + C = \int (vu)'(x)dx = \int v'(x)u(x)dx + \int v(x)u'(x)dx.$$

Po przeniesieniu jednego z wyrazów na drugą stronę dostajemy

$$\int v(x)u'(x)dx = v(x)u(x) + C - \int v'(x)u(x)dx.$$

Dowolna stała całkowania i tak jest zawarta w innych całkach, więc możemy ją opuścić i zostaje

$$\int v(x)u'(x)dx = v(x)u(x) - \int v'(x)u(x)dx. \blacksquare$$

PRZYKŁAD 6. Znajdziemy całkę funkcji logarytm naturalny. Trzeba wybrać $v(x) = \ln x,\ u'(x) = 1$; wtedy $v'(x) = \frac{1}{x},\ u(x) = x$, a wzór (5.8) daje

$$\int \ln x \ dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x \ dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

PRZYKŁAD 7. Szukamy całki funkcji arcus tangens. Warto podstawić $v(x) = \operatorname{arc\,tg} x,\ u'(x) = 1$; wtedy $v'(x) = 1/(1 + x^2),\ u(x) = x$, więc dzięki (5.8)

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1 + x^2} \, dx.$$

Korzystamy z Przykładu 4:

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$

5.2 Metody obliczania całek

5.2.1 Metoda rekurencyjna

Jeśli mamy całkę zależną od liczby naturalnej n, to obliczamy ją dla $n = 1$ lub $n = 0$ oraz znajdujemy wzór sprowadzający n-tą całkę do całki $(n - 1)$-szej. To się nazywa *metodą rekurencyjną* z łacińskiego *recurro* = wrócić do czegoś.

PRZYKŁAD 1. Mamy obliczyć całkę $I_n = \int x^n \mathrm{e}^{-x} dx$. Otóż liczymy całkę dla $n = 0$:

$$I_0 = \int \mathrm{e}^{-x} dx = -\mathrm{e}^{-x} + C.$$

Do całki I_n stosujemy metodę całkowania przez części wybierając $v(x) = x^n$, $u'(x) = \mathrm{e}^{-x}$; wtedy $v'(x) = nx^{n-1}$, $u(x) = -\mathrm{e}^{-x}$:

$$I_n = \int x^n \mathrm{e}^{-x} dx = -x^n \mathrm{e}^{-x} + n \int x^{n-1} \mathrm{e}^{-x} dx = -x^n \mathrm{e}^{-x} + n I_{n-1}.$$

Udało się wyrazić całkę I_n przez całkę I_{n-1}. To się nazywa *wzorem rekurencyjnym.* Mając ten wzór możemy wyliczyć poszczególne całki:

$$I_1 = -x\mathrm{e}^{-x} + I_0 = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + C.$$

$$I_2 = -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2I_1 = -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} + C.$$

PRZYKŁAD 2. Niech

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Wiemy z Tabeli 2, że $I_1 = \operatorname{arc\,tg} x + C$. Natomiast dla $n > 1$ korzystając z tego, że całka różnicy jest różnicą całek, możemy napisać

$$I_n = \int \frac{1 + x^2 - x^2}{(1+x^2)^n} dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n}$$

$$I_n = I_{n-1} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n}. \tag{5.9}$$

Ale z drugiej strony

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} = -\frac{2(n-1)x}{(1+x^2)^n},$$

więc ostatni wyraz w (5.9) całkujemy przez części podstawiając $v(x) = x$, $u'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}$, a wtedy $v'(x) = 1$, $u(x) = \frac{-1}{2(n-1)} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$:

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n} = \frac{-x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

Wstawiamy to do (5.9):

$$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1}.$$

Widzimy dwa razy I_{n-1}. Redukujemy te wyrazy podobne otrzymując

$$I_n = \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1},$$

co jest szukanym wzorem rekurencyjnym. W szczególności

$$I_2 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} I_1 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

5.2.2 Całkowanie funkcyj wymiernych

Na początek rozważymy tak zwane *ułamki proste*. Są to ułamki następujących czterech typów:

$$\text{I.}\ \frac{A}{x-a}, \qquad \text{II.}\ \frac{A}{(x-a)^k},\quad k\in\{2,3,...\},$$
$$\text{III,}\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \qquad \text{IV,}\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},\quad m\in\{2,3,...\},$$

gdzie A, M, N, a, p, $q\in\mathbb{R}$ są stałymi. Zakładamy, że trójmian kwadratowy w mianownikach ułamków typu III i IV nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc

$$\Delta = p^2-4q<0, \qquad \text{czyli} \qquad q-\frac{p^2}{4}>0. \tag{5.10}$$

Ułamki typu I i II umiemy całkować metodą podstawienia $y=x-a$:

$$A\int\frac{dx}{x-a} = A\int\frac{dy}{y} = A\ln|y|+C = A\ln|x-a|+C,$$
$$A\int\frac{dx}{(x-a)^k} = A\int\frac{dy}{y^k} = \frac{A}{1-k}\,\frac{1}{y^{k-1}}+C = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C.$$

Całkowanie ułamków typu III i IV też odbywa się przez podstawienie, ale przedtem trzeba trójmian sprowadzić do postaci kanonicznej:

$$x^2+px+q = x^2+2\,\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right] = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Wyrażenie w ostatnim nawiasie na mocy (5.10) jest liczbą dodatnią, więc możemy przyjąć

$$a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}. \tag{5.11}$$

Teraz wybieramy podstawienie $y=x+\frac{p}{2}$, dla którego $\frac{dy}{dx}=1$. Wówczas licznik i mianownik następująco wyraża się przez nową zmienną:

$$Mx+N = M\left(y-\frac{p}{2}\right)+N = My+\left(N-\frac{Mp}{2}\right), \qquad x^2+px+q = y^2+a^2.$$

Liczymy całkę ułamka typu III:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int\frac{My+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{y^2+a^2}\,dy = M\int\frac{y\,dy}{y^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dy}{y^2+a^2}$$
$$= \frac{M}{2}\int\frac{2y\,dy}{y^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\int\frac{\frac{1}{a}\,dy}{(\frac{y}{a})^2+1}.$$

Stosujemy dalsze podstawienia: do pierwszej całki $t=y^2+a^2$, $\frac{dt}{dy}=2y$, do drugiej $u=\frac{y}{a}$, $\frac{du}{dy}=\frac{1}{a}$, co daje

$$\frac{M}{2}\int\frac{dt}{t}+\frac{1}{a}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{du}{u^2+1} = \frac{M}{2}\ln t+\frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arc\,tg}u+C$$

$$= \frac{M}{2} \ln(y^2 + a^2) + \frac{2N - Mp}{2a} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{a} + C.$$

Wracamy do zmiennej x i podstawienia (5.11):

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\, dx = \frac{M}{a} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

Do całki ułamka typu IV stosujemy te same podstawienia, co daje

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m}\, dx = \int \frac{My + (N - \frac{1}{2}Mp)}{(y^2 + a^2)^m}\, dy \; = \; \frac{M}{2} \int \frac{2y\, dy}{(y^2 + a^2)^m}$$

$$+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{a^{2m-1}} \int \frac{\frac{1}{a} dy}{[(\frac{y}{a})^2 + 1]^m} \; = \; \frac{M}{2} \int \frac{dt}{t^m} + \frac{2N - Mp}{2a^{2m-1}} \int \frac{du}{(u^2 + 1)^m}.$$

Pierwsza całka wynosi

$$-\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{t^{m-1}} + C = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{(y^2 + a^2)^{m-1}} + C = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{(x^2 + px + q)^{m-1}} + C,$$

a drugą całkę można wyliczyć metodą rekurencyjną opisaną w Przykładzie 2.

Teraz będziemy rozważać funkcje wymierne postaci $f(x) = P(x)/Q(x)$, w której współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu Q jest równy jedności. Jeśli stopień licznika jest wyższy niż mianownika, to można wykonać dzielenie z resztą, co daje sumę wielomianu z inną funkcją wymierną o niższym stopniu licznika.

PRZYKŁAD 3. Przekształćmy taką funkcję wymierną:

$$\frac{x^4}{x^2 + 1} = \frac{x^4 + x^2 - x^2 - 1 + 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2(x^2 + 1) - (x^2 + 1) + 1}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x^2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} - \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Z dwóch składników pierwszy jako wielomian umiemy scałkować, zadanie sprowadza się więc do scałkowania drugiego składnika, w którym licznik ma stopień niższy od mianownika.

Odtąd będziemy więc rozważać funkcje wymierne postaci $P(x)/Q(x)$, w której wielomian P jest stopnia niższego niż wielomian Q – nazywamy je *ułamkami właściwymi*. Będziemy dążyć do pokazania, że ułamek właściwy można rozłożyć na sumę ułamków prostych. Wiąże się to ściśle z rozkładem mianownika Q na czynniki pierwsze. Jak wiadomo, każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych rozkłada się jednoznacznie na czynniki postaci $x - a$ oraz $x^2 + px + q$, przy czym czynniki stopnia drugiego nie mają pierwiastków rzeczywitych, więc już nie rozkładają się na czynniki liniowe rzeczywiste. Zapiszmy schematycznie rozkład wielomianu Q na czynniki w postaci

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \cdots (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1}(x^2 + p_2 x + q_2)^{m_2} \cdots, \tag{5.12}$$

gdzie $k_i, m_j \in \mathbb{N}$.

Lemat 1. Niech czynnik liniowy $x-a$ występuje w rozkładzie wielomianu Q z wykładnikiem $k \geq 1$:

$$Q(x) = (x-a)^k Q_1(x),$$

gdzie wielomian Q_1 nie dzieli się przez $x-a$, tzn. $Q_1(a) \neq 0$. Wówczas ułamek właściwy

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}$$

można przedstawić w postaci sumy dwóch ułamków właściwych:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)},$$

z których pierwszy jest ułamkiem prostym, a mianownik drugiego zawiera czynnik $x-a$ w potędze niższej niż poprzednio.

Dowód. Dla udowodnienia Lematu trzeba znaleźć liczbę A i wielomian P_1 tak, żeby była spełniona tożsamość

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k Q_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}.$$

Po pomnożeniu tej równości stronami przez wspólny mianownik dostajemy

$$P(x) = AQ_1(x) + (x-a)P_1(x). \tag{5.13}$$

Podstawmy $x = a$, wtedy równość (5.13) przyjmuje postać $P(a) = AQ_1(a)$, a stąd

$$A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}.$$

Wyrażenie to ma sens, gdyż $Q_1(a) \neq 0$. Wielomian P_1 wyliczamy z (5.13), bo różnica $P(x) - AQ_1(x) = P(x) - \frac{P(a)}{Q_1(a)}Q_1(x)$ jest podzielna przez $x-a$. Równość (5.13) jest udowodniona. ■

Lemat 2. Niech czynnik x^2+px+q występuje w rozkładzie wielomianu Q z wykładnikiem m:

$$Q(x) = (x^2+px+q)^m Q_2(x),$$

gdzie wielomian Q_2 nie dzieli się przez trójmian x^2+px+q. Wówczas ułamek właściwy

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m Q_2(x)}$$

można przedstawić w postaci sumy dwóch ułamków właściwych:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} + \frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}Q_2(x)},$$

z kótrych pierwszy jest ułamkiem prostym, a drugi zawiera wpomniany trójmian w niższej potędze.

Dowód – patrz: G.M. Fichtenholz *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom II, str. 30.

Twierdzenie 1. Każdy ułamek właściwy można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych.

Dowód polega na kilkukrotnym stosowaniu Lematów 1 i 2, które pozwalają kolejno wydzielać ułamki proste z danego ułamka właściwego $\frac{P}{Q}$ aż do jego wyczerpania.

Spójrzmy na wzór (5.12). Jeśli czynnik $x-a$ wchodzi w skład mianownika Q tylko w pierwszej potędze, to na mocy Lematu 1 przyporządkujemy mu jeden ułamek prosty postaci $\frac{A}{x-a}$. Jeśli wykładnik potęgi przy dwumianie $x-a$ jest równy $k>1$, to dzięki Lematowi 1 wydzielamy ułamek prosty $\frac{A_k}{(x-a)^k}$, a do ułamka, który pozostanie, stosujemy znowu ten sam Lemat i wydzielamy następny ułamek prosty $\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}$ i tak dalej, aż dwumian $x-a$ w ogóle zniknie z rozkładu mianownika. W ten sposób czynnikowi $(x-a)^k$ będzie odpowiadać suma k ułamków prostych:

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_1}{x-a}. \tag{5.14}$$

Jeśli będą jeszcze inne czynniki liniowe $x-a_i$, to zastosujmy takie samo postępowanie do każdego z nich, aż wszystkie dwumiany liniowe znikną z mianownika.

Analogicznie, korzystając z Lematu 2, czynnikowi kwadratowemu x^2+px+q występującemu w potędze m przyporządkujemy sumę m ułamków prostych:

$$\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}+\frac{M_{m-1}x+N_{m-1}}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\ldots+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}. \tag{5.15}$$

To samo można zrobić z pozostałymi czynnikami kwadratowymi, jeśli takowe jeszcze pozostaną. ■

Tak więc, jeśli znany jest rozkład (5.12) mianownika Q, to znane są mianowniki ułamków prostych, na które rozkłada się ułamek P/Q. W licznikach tych ułamków występują jeszcze nieznane współczynniki A_i, M_j, N_j. Sposób ich znajdowania objaśnimy na przykładzie.

PRZYKŁAD 4. Znajdźmy rozkład ułamka $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$. Na mocy Twierdzenia 1 możemy zapisać jego rozkład:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Sprowadźmy prawą stronę do wspólnego mianownika:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-2)+(Dx+E)(x^2+1)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)^2}.$$

Liczniki mają być równe, więc współczynniki A,B,C,D,E wyznaczymy z tożsamości

$$2x^2+2x+13=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-2)+(Dx+E)(x^2+1)(x-2),$$

$$\begin{aligned}2x^2+2x+13=&\,Ax^4+2Ax^2+A+Bx^2+Cx-2Bx-2C+Dx^4+Dx^2\\&-2Dx^3-2Dx+Ex^3+Ex-2Ex^2-2E.\end{aligned}$$

Przyrównując współczynniki przy jednakowych potęgach x po obu stronach dostajemy pięć równań na pięć niewiadomych A, B, C, D, E:

$$\begin{aligned} A + D &= 0 \quad \text{przy} && x^4, \\ -2D + E &= 0 && x^3, \\ 2A + B + D - 2E &= 2 && x^2, \\ C - 2B - 2D + E &= 2 && x^1, \\ A - 2C - 2E &= 13 && x^0. \end{aligned}$$

Ten układ ma rozwiązanie $A = 1,\ B = -3,\ C = -4,\ D = -1,\ E = -2$. Ostatecznie otrzymujemy rozkład

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} - \frac{x+2}{x^2+1}.$$

Łącząc Twierdzenie 1 z opisanym wcześniej całkowaniem ułamków prostych dochodzimy do następującego wyniku. Całka dowolnej funkcji wymiernej wyraża się przez funkcję wymierną, logarytm i arcus tangens.

5.2.3 Całkowanie wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne

Będziemy rozważać całki postaci

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx, \tag{5.16}$$

gdzie R jest funkcją wymierną dwóch zmiennych rzeczywistych. Przez *funkcję wymierną dwóch zmiennych* rozumiemy iloraz $R(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$, gdzie P i Q są *wielomianami dwóch zmiennych*, czyli sumami postaci

$$P(x,y) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j, \qquad Q(x,y) = \sum_{k,l=0}^{m} b_{kl} x^k y^l.$$

Dla obliczenia (5.16) warto wybrać podstawienie $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Wykorzystując tożsamości trygonometryczne

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \qquad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

możemy wyrazić $\cos x$ i $\sin x$ przez zmienną t:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Potrzebny jest jeszcze wzór wiążący różniczkę dx z różniczką dt. W tym celu piszemy $x = 2 \operatorname{arc\,tg} t$, skąd $dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$. Teraz możemy całkę (5.16) sprowadzić do postaci

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt,$$

która jest całką funkcji wymiernej i daje się wyliczyć omówioną wcześniej metodą.

PRZYKŁAD 5. Zajmijmy się całką $\int \frac{dx}{\cos x}$. Według przedstawionej metody przez postawienie $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ dostajemy

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{2}{1-t^2}\, dt.$$

Mamy funkcję wymierną. Ułamek stojący pod całką nie jest prosty, więc rozkładamy go na ułamki proste:

$$\frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1},$$

a zatem

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t-1} = \ln|t+1| - \ln|t-1| + C = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$$

PRZYKŁAD 6. To samo podstawienie daje

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

Trzeba powiedzieć, że podana metoda obliczania całek postaci (5.16) jest uniwersalna, przydatna dla wszystkich funkcyj wymiernych R, ale dla prostszych wyrażeń, na przykład wielomianów (tzn. gdy $Q = 1$) jest ona zbyt żmudna i prowadzi do wyniku zbyt długą drogą. Lepiej wtedy wykorzystywać tożsamości trygonometryczne.

PRZYKŁAD 7. Niech funkcją podcałkową będzie $\cos^2 x$. Wykorzystujemy tożsamość trygonometryczną

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1,$$

skąd $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$. Wobec tego

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

5.2.4 Całkowanie wyrażeń zawierających pierwiastki

Rozważamy całki nieoznaczone funkcyj niewymiernych szczególnej postaci

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,)\, dx, \tag{5.17}$$

gdzie R jest funkcją wymierną dwóch zmiennych rzeczywistych.

Przypadek I. Niech $a = 0$, wtedy rozważana całka ma postać

$$\int R(x, \sqrt{bx + c})dx.$$

Gdyby było $b = 0$, to druga zmienna funkcji R byłaby stałą i pod znakiem całki byłaby funkcja wymierna, a takie umiemy całkować. Zakładamy przeto $b \neq 0$ i podstawiamy $t = \sqrt{bx + c}$. Stąd wyliczamy

$$x = \frac{t^2 - c}{b} \quad \text{oraz} \quad dx = \frac{2t}{b}dt,$$

więc otrzymujemy

$$\int R(x, \sqrt{bx + c})dx = \frac{2}{b}\int R\left(\frac{t^2 - c}{b}, t\right) t\, dt.$$

W ten sposób sprowadziliśmy całkę (5.17) do całki pewnej funkcji wymiernej.

PRZYKŁAD 8. Wyliczmy całkę $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\, dx$. Podane podstawienia mają postać $t = \sqrt{2x + 1}$, $x\frac{t^2-1}{2}$, $dx = t\, dt$ więc

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x + 1}}\, dx = \int \frac{\frac{t^2-1}{2}}{t}\, t\, dt = \int \frac{t^2 - 1}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int t^2\, dt - \frac{1}{2}\int dt$$

$$= \frac{t^3}{6} - \frac{t}{2} + C = \frac{(\sqrt{2x + 1})^3}{6} - \frac{\sqrt{2x + 1}}{2} + C.$$

Przypadek II. Niech $a \neq 0$. Jeżeli wyróżnik jest zerem, to trójmian można zapisać $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2$, więc pierwiastek wynosi $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\,(x + \frac{b}{2a})$ i niewymierność pod znakiem całki jest pozorna. Załóżmy wobec tego, że wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$. Mamy

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = \frac{|\Delta|}{4a}\left[\frac{4a^2}{|\Delta|}\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{|\Delta|}\right]$$

i podstawiamy

$$y = \frac{2a}{\sqrt{|\Delta|}}\left(x + \frac{b}{2a}\right). \tag{5.18}$$

Daje to

$$x = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}y - \frac{b}{2a}, \quad dx = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}dy, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{\frac{|\Delta|}{4a}\left(y^2 - \frac{\Delta}{|\Delta|}\right)}$$

więc otrzymujemy

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\int R\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}y - \frac{b}{2a}, \sqrt{\frac{|\Delta|}{4a}\left(y^2 - \frac{\Delta}{|\Delta|}\right)}\right) dy. \tag{5.19}$$

(i) Jeśli $\Delta > 0$ i $a > 0$, to drugi argument funkcji R można zapisać

$$\sqrt{\frac{\Delta}{4a}(y^2-1)} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a}}\sqrt{y^2-1}.$$

W takim razie całkę (5.19) można zapisać inaczej jako

$$\int R_1\left(y, \sqrt{y^2-1}\right) dy, \tag{5.20}$$

gdzie R_1 jest jakąś inną funkcją wymierną dwóch zmiennych.

(ii) Jeśli $\Delta > 0$ i $a < 0$, to drugi argument funkcji R można zapisać

$$\sqrt{\frac{\Delta}{4a}(y^2-1)} = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}(1-y^2)} = \sqrt{\frac{\Delta}{4|a|}}\sqrt{1-y^2}.$$

W takim razie całkę (5.19) można zapisać inaczej jako

$$\int R_1\left(y, \sqrt{1-y^2}\right) dy. \tag{5.21}$$

(iii) Jeśli $\Delta < 0$ i $a > 0$, to drugi argument funkcji R można zapisać

$$\sqrt{\frac{|\Delta|}{4a}(y^2+1)} = \sqrt{\frac{|\Delta|}{4a}}\sqrt{y^2+1},$$

W takim razie całkę (5.19) można zapisać inaczej jako

$$\int R_1\left(y, \sqrt{y^2+1}\right) dy. \tag{5.22}$$

Czwarta możliwość $\Delta < 0$ i $a < 0$ nie może wystąpić, bo wtedy pod pierwiastkiem w (5.17) byłoby wyrażenie stale ujemne.

Wykażemy teraz, że każdą z całek (5.20)–(5.22) za pomocą odpowiedniego podstawienia można przekształcić w całkę trygonometryczną postaci (5.16), którą umiemy wyliczyć. W przypadku całki (5.20) warto stosować podstawienie

$$y = \frac{1}{\sin t}, \quad t \in (0, \pi/2), \tag{5.23}$$

któremu odpowiadają wzory

$$dy = -\frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt, \qquad \sqrt{y^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{\cos t}{\sin t} = \operatorname{ctg} t.$$

W takim razie

$$\int R_1(y, \sqrt{y^2-1})dy = -\int R_1\left(\frac{1}{\sin t}, \operatorname{ctg} t\right)\frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt, \quad \text{gdzie} \quad t = \arcsin y^{-1}.$$

Dostaliśmy całkę z funkcji wymiernej od dwóch funkcyj trygonometrycznych.

PRZYKŁAD 9. Weźmy od razu trójmian kwadratowy w postaci występującej w (5.20), czyli np. całkę postaci $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}$. Podstawienie (5.23), czyli $y = 1/\sin t$ daje

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = -\int \frac{1}{\operatorname{ctg} t} \frac{\cos t}{\sin^2 t}\, dt = -\int \frac{dt}{\sin t}.$$

Mamy już funkcję wymierną funkcji trygonometrycznej. Tę właśnie całkę liczyliśmy w Przykładzie 6, wiemy więc, ile ona wynosi:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C.$$

Teraz trzeba $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$ wyrazić przez $y = 1/\sin t$ występujące w (5.23). Istnieje tożsamość trygonometryczna $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{\sin t}{1+\cos t}$, stąd

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} = \frac{1+\cos t}{\sin t} = \frac{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{1}{\sin t} + \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = y + \sqrt{y^2-1}.$$

W takim razie otrzymujemy

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = -\ln\left|\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}\right| + C = \ln|y+\sqrt{y^2-1}| + C.$$

W przypadku całki (5.21) stosujemy podstawienie

$$y = \sin t, \quad t \in (-\pi/2, \pi/2), \tag{5.24}$$

któremu odpowiadają wzory $dy = \cos t\, dt$, $\sqrt{1-y^2} = \cos t$. W takim razie

$$\int R_1(y, \sqrt{1-y^2})dy = \int R_1(\sin t, \cos t)\, \cos t\, dt, \quad \text{gdzie} \quad t = \arcsin y.$$

Dostaliśmy całkę z funkcji wymiernej od dwóch funkcyj trygonometrycznych.

PRZYKŁAD 10. Rozważmy całkę $\int \sqrt{1-y^2}dy$. Podstawienie (5.24), czyli $y = \sin t$ daje $\int \cos^2 t\, dt$. Według Przykładu 7 możemy napisać

$$\int \sqrt{1-y^2}\, dy = \int \cos^2 t\, dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C$$
$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + C = \frac{1}{2}\arcsin y + \frac{y}{2}\sqrt{1-y^2} + C.$$

Wreszcie do całki (5.22) wykorzystujemy podstawienie

$$y = \operatorname{ctg} t, \qquad t \in (0, \pi),$$

któremu odpowiadają wzory $dy = -\frac{dt}{\sin^2 t}$, $\sqrt{y^2+1} = \frac{1}{\sin t}$. Daje ono

$$\int R_1(y, \sqrt{y^2+1})dy = -\int R_1\left(\operatorname{ctg} t, \frac{1}{\sin t}\right) \frac{1}{\sin^2 t}\, dt, \quad \text{gdzie} \quad t = \operatorname{arc\,ctg} y.$$

I znowu dostaliśmy całkę z funkcji wymiernej od dwóch funkcyj trygonometrycznych.

PRZYKŁAD 11. Opisane podstawienia pozwalają wyliczyć następującą całkę

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = -\int \sin t \frac{1}{\sin^2 t} dt = -\int \frac{dt}{\sin t}.$$

Tę całkę już mieliśmy w Przykładzie 6, wynosi ona $-\ln|\operatorname{tg}\frac{t}{2}|$. Trzeba jeszcze wrócić do zmiennej $y = \operatorname{ctg} t$, w tym celu wykorzystujemy tę samą tożsamość trygonometryczną, co w Przykładzie 9:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} = \frac{\cos t + 1}{\sin t} = \frac{\cos t + \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}}{\sin t} = \operatorname{ctg} t + \sqrt{\operatorname{ctg}^2 t + 1} = y + \sqrt{y^2+1}.$$

W ten sposób dostajemy

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = -\ln|\operatorname{tg}\frac{t}{2}| + C = -\ln(y+\sqrt{y^2+1})^{-1} = \ln(y+\sqrt{y^2+1}) + C.$$

PRZYKŁAD 12. Całka funkcji $1/\sqrt{x^2-5x+4}$. W tym przypadku $\Delta = 9 > 0$, $a = 1 > 0$, więc jest to przypadek II, podpunkt (i). Wzór (5.19) zamienia całkę następująco

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}} = \frac{3}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{9}{4}(y^2-1)}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Tę całkę znamy z Przykładu 9:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \ln|y+\sqrt{y^2-1}| + C. \tag{5.25}$$

Teraz należy wrócić do zmiennej x. Podstawienie (5.18), czyli $y = \frac{2}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)$ daje

$$y^2 - 1 = \frac{4}{9}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - 1 = \frac{4}{9}\left(x^2-5x+\frac{25}{4}\right) - 1 = \frac{4}{9}(x^2-5x+4).$$

Po wstawieniu tego do (5.25) otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+4} = \ln\left|\frac{2}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right) + \frac{2}{3}\sqrt{x^2-5x+4}\right| + C.$$

W II tomie książki G.M. Fichtenholza jest więcej metod obliczania całek postaci (5.17).

5.2.5 Przypadki szczególne

Na koniec zajmiemy się całkami funkcyj ciągłych danych przez wzory klamrowe. Najlepiej wyjaśnić to na przykładzie.

PRZYKŁAD 13. Wyliczymy całkę nieoznaczoną $F(x) = \int f(x)\,dx$, gdzie funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dana wzorem klamrowym

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla} \quad x \geq 0, \\ x & \text{dla} \quad x < 0. \end{cases}$$

W takiej sytuacji osobno całkujemy w poszczególnych przedziałach, gdzie funkcja podcałkowa jest dana jednym wzorem:

$$F(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x + C \qquad \text{dla} \quad x \geq 0,$$

$$F_1(x) = \int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \quad \text{dla} \quad x < 0.$$

Na razie mamy dwie stałe całkowania, ale funkcja pierwotna ma być różniczkowalna, a na mocy Lematu 1 w § 4.1 musi być ciągła, więc powinniśmy zapewnić ciągłość funkcji F w punkcie $x = 0$, który nazywamy *punktem sklejenia* lub *zszycia*:

$$F(0) = F_1(0), \qquad \Rightarrow \qquad -1 + C = C_1.$$

Stąd mamy stałą C_1 wyrażoną przez C. W ten sposób otrzymujemy następujący wzór klamrowy dla funkcji pierwotnej:

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + C & \text{dla} \quad x \geq 0, \\ \frac{1}{2}x^2 - 1 + C & \text{dla} \quad x < 0. \end{cases}$$

PRZYKŁAD 14. Dla znalezienia całki nieoznaczonej z funkcji moduł warto przypomnieć wzór klamrowy

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{dla} \quad x < 0. \end{cases}$$

Wtedy funkcja pierwotna ma dwa wzory

$$F(x) = \int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + C \qquad \text{dla} \quad x \geq 0,$$

$$F_1(x) = -\int x \, dx = -\frac{1}{2}x^2 + C_1 \quad \text{dla} \quad x < 0.$$

Ciągłość w punkcie sklejenia $F(0) = F_1(0)$ daje $C = C_1$, zatem otrzymujemy

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{1}{2}x^2 + C & \text{dla} & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 + C & \text{dla} & x < 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}x \cdot \left\{ \begin{array}{lll} x & \text{dla} & x \geq 0 \\ (-x) & \text{dla} & x < 0 \end{array} \right\} + C$$

W ostatniej klamrze rozpoznajemy moduł, więc można to zawrzeć w jednym wzorze:

$$\int |x| \, dx = \frac{1}{2}x|x| + C.$$

Podsumujmy to, czego nauczyliśmy się z podanych przykładów. Jeśli funkcja dana jest przez wzór klamrowy, to liczymy całki nieoznaczone dla każdego wzoru spod klamry pisząc osobne stałe całkowania. A związek między tymi stałymi znajdujemy z warunku ciągłości w punkcie zszywania. Na koniec pozostaje tylko jedna stała całkowania.

Jeśli natomiast przedziały zmiennej x występujące we wzorze klamrowym nie mają wspólnych granic, to stałe całkowania w tych przedziałach mogą być dowolnie różne.

5.3 Całka oznaczona

Niech będzie dana funkcja ciągła $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f w przedziale $\langle a, b\rangle$. Przez *całkę oznaczoną* funkcji f rozumiemy

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{5.26}$$

Liczby a i b nazywamy *granicami całkowania* albo *granicami całki oznaczonej: a – granicą dolną, b – granicą górną.* Zauważmy różnicę: całka nieoznaczona jest funkcją, a całka oznaczona jest liczbą rzeczywistą.

Całka oznaczona nie zależy od wyboru funkcji pierwotnej F, tzn. jeśli G jest również funkcją pierwotną funkcji f, to na mocy Lematu 1 z § 5.1 mamy $G(x) = F(x) + C$ oraz

$$G(b) - G(a) = F(b) + C - [F(a) + C] = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a),$$

więc równie dobrze możemy napisać

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

W szczególnym przypadku $b = a$ dostajemy

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0.$$

Całkę oznaczoną możemy też zapisać w przypadku, gdy $b < a$, zachodzi wtedy

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x)dx. \tag{5.27}$$

Na oznaczenie różnicy $F(b) - F(a)$ używamy też symbolu

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Całka oznaczona (5.26) zależy od *funkcji podcałkowej* f i od granic całkowania a, b. Nie jest natomiast funkcją zmiennej x, która nazywana jest *zmienną związaną*. Wartość całki nie ulegnie zmianie, jeśli zmienną x zastąpimy jakąś inną zmienną, np. y czy t:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt.$$

PRZYKŁAD 1. Wyliczymy całkę oznaczoną $\int_a^b c\ dx$. Wiemy, że całka nieoznaczona tej samej funkcji wynosi $\int c\ dx = cx + C$, więc

$$\int_a^b c\ dx = cx|_a^b = cb - ca = c(b - a).$$

PRZYKŁAD 2. Wiemy, że $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$, więc

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

PRZYKŁAD 3.

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\ dx = -\cos x|_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) - (-\cos 0) = -0 + 1 = 1.$$

Lematy 2 i 3 z § 5.1 pozwalają sformułować ich odpowiedniki:

Lemat 1. Całka sumy jest sumą całek:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Dowód. Niech F i G będą odpowiednio funkcjami pierwotnymi funkcyj f i g. Wtedy Lemat 2 z § 5.1 mówi, że funkcją pierwotną sumy $f+g$ jest $F+G$. Wobec tego na mocy (5.26):

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b) + G(b) - F(a) - G(a)$$

$$= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \blacksquare$$

Lemat 2. Stałą multyplikatywną można wyciągnąć przed znak całki:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Dowód. Niech F będzie funkcją pierwotną dla f. Wtedy Lemat 3 z § 5.1 mówi, że funkcją pierwotną dla cf jest cF. Wobec tego ma mocy (5.26):

$$\int_a^b cf(x)dx = cF(b) - cF(a) = c[F(b) - F(a)] = c\int_a^b f(x)dx. \blacksquare$$

Wykorzystując oba lematy dostajemy

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b \{f(x) + [-g(x)]\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b [-g(x)]dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx. \tag{5.28}$$

Ten wynik mówi, że całka różnicy jest różnicą całek.

Twierdzenie 3 (z § 5.1) o całkowaniu przez części prowadzi do wzoru

$$\int_a^b v(x)u'(x)dx = v(x)u(x)|_a^b - \int_a^b v'(x)u(x)dx.$$

Natomiast Twierdzenie 2 o całkowaniu przez podstawienie prowadzi do trochę innego wyniku.

Twierdzenie 1 – *Całkowanie przez podstawienie*

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy.$$

Dowód. Niech G będzie funkcją pierwotną dla g. Twierdzenie 2 z § 5.1 mówi, że $G \circ f$ jest funkcją pierwotną funkcji $(g \circ f)f'$. Na mocy (5.26) mamy

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)dx = (G \circ f)(b) - (G \circ f)(a) = G(f(b)) - G(f(a))$$

$$= G(y)|_{f(a)}^{f(b)} = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy. \blacksquare$$

Widać stąd, że w samym zapisie funkcji pierwotnej nie musimy wracać do zmiennej x – możemy pozostać przy nowej zmiennej y, ale musimy dostosować granice całkowania do tej zmiennej.

PRZYKŁAD 4.

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{\frac{1}{2}dx}{(\frac{x}{2})^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} y\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Twierdzenie 2. – *O podziale przedziału całkowania.*

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Dowód. Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f, wtedy

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = [F(c)-F(a)] + [F(b)-F(c)] = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)dx. \blacksquare$$

Lemat 3. Jeśli $a < b$ oraz $f(x) \geq 0$, to

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Innymi słowy, całka funkcji nieujemnej jest nieujemna.

Dowód. Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f. Na mocy Lematu 2 z § 4.2 z nierówności $f(x) \geq 0$ wynika, że funkcja F jest niemalejąca. Wówczas nierówność $a < b$ pociąga za sobą $F(a) \leq F(b)$, a stąd dostajemy

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \geq 0. \blacksquare$$

Twierdzenie 3. Jeśli $a < b$ oraz $f(x) \leq g(x)$, to

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Innymi słowy, przejście do całki oznaczonej zachowuje zwrot nierówności słabej.

Dowód. Z założenia twierdzenia otrzymujemy $g(x) - f(x) \geq 0$. Na mocy Lematu 3 ta nierówność pociąga za sobą

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]dx \geq 0,$$

a stąd dzięki (5.28) otrzymujemy

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

oraz

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \blacksquare$$

To twierdzenie mówi, że dla właściwej kolejności granic całkowania (granica dolna mniejsza od górnej) całka oznaczona zachowuje zwrot nierówności.

Twierdzenie 4. Jeśli $a < b$, to spełniona jest nierówność

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Dowód. Z podwójnej nierówności $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ dzięki Twierdzeniu 3 otrzymujemy

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{5.29}$$

Podwójna nierówność $-u \leq v \leq u$ oznacza dwie nierówności $-u \leq v \ \wedge \ v \leq u$, czyli dwie nierówności $-v \leq u \ \wedge \ v \leq u$, co można zawrzeć w jednym wzorze $|v| \leq u$. Dzięki temu z (5.29) wynika nierówność

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \ \blacksquare$$

Lemat 4. *Wzór na wartość pośrednią.* Istnieje taka liczba $\theta \in (0,1)$, że

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = h\,f(a+\theta h),$$

Dowód. Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f; mamy

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = F(a+h) - F(a).$$

Na mocy twierdzenia o wartości pośredniej (Tw. 3 w § 4.2) istnieje liczba $\theta \in (0,1)$ taka, że $F(a+h) - F(a) = h\,F'(a+\theta h)$, więc

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = h\,F'(a+\theta h) = h\,f(a+\theta h). \blacksquare$$

Obecnie przejdziemy do twierdzenia ważnego dla geometrycznej interpretacji całki oznaczonej. *Podziałem przedziału* $\langle a,b\rangle$ nazywamy zbiór mniejszych przedziałów $\langle a_{k-1}, a_k\rangle$ o własności $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ \ldots \ < a_{n-1} < a_n = b$, czyli $\langle a,b\rangle = \bigcup_{k=1}^n \langle a_{k-1}, a_k\rangle$. Liczbę $s = \max_k(a_k - a_{k-1})$ nazywamy *średnicą podziału.* Jeśli wszystkie przedziały $\langle a_{k-1}, a_k\rangle$ są jednakowej długości, to średnica podziału wynosi $s = \frac{b-a}{n}$.

Twierdzenie 5. Niech $f : \ \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ o następującej własności: Jeśli mamy podział przedziału $\langle a,b\rangle$ o średnicy $s < \delta$ i jeśli $x_k \in \langle a_{k-1}, a_k\rangle$, to

$$\left|\sum_{k=1}^n f(x_k)(a_k - a_{k-1}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \epsilon.$$

Dowód. Niech $\epsilon > 0$, wtedy także $\epsilon/(b-a) > 0$. Z ciągłości funkcji f w przedziale domkniętym wynika istnienie $\delta > 0$ takiej, że

$$|x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \epsilon/(b-a).$$

Wybierzmy podział przedziału $\langle a, b\rangle$ o średnicy $s < \delta$. Na mocy Twierdzenia 2

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a_0}^{a_1} f(x)dx + \ \ldots\ \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx,$$

a na mocy Lematu 4

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_1')(a_1 - a_0) + \ \ldots\ + f(x_n')(a_n - a_{n-1}) = \sum_{k=1}^n f(x_k')(a_k - a_{k-1}),$$

gdzie $x_k' \in \langle a_{k-1}, a_k\rangle$ jest innym oznaczeniem dla $a_{k-1} + \theta h$.

Wybierzmy punkty $x_k \in \langle a_{k-1}, a_k\rangle$. Skoro oba punkty x_k i x_k' należą do tego samego przedziału $\langle a_{k-1}, a_k\rangle$, to odległość między nimi jest nie większa niż długość tego przedziału, tj. $|x_k - x_k'| \leq a_k - a_{k-1}$, a ta z kolei nie jest większa od średnicy $s < \delta$, więc mamy $|x_k - x_k'| < \delta$. Stąd zaś wynika

$$|f(x_k) - f(x_k')| < \epsilon/(b-a). \tag{5.30}$$

W takim razie

$$\sum_{k=1}^n f(x_k)(a_k - a_{k-1}) - \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n f(x_k)(a_k - a_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(x_k')(a_k - a_{k-1})$$
$$= \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_k')](a_k - a_{k-1}).$$

Z nierówności trójkąta

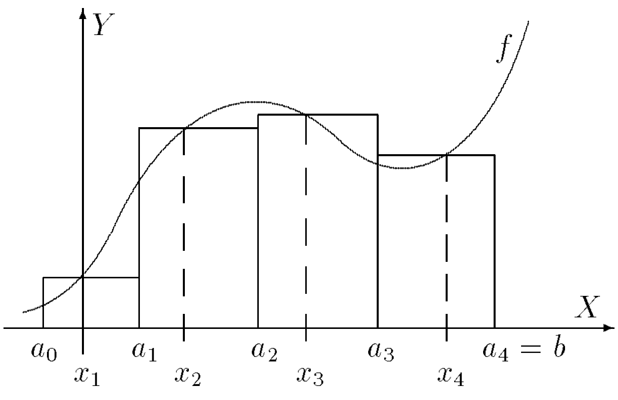
$$\left|\sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_k')](a_k - a_{k-1})\right| \leq \sum_{k=1}^n \left| [f(x_k) - f(x_k')](a_k - a_{k-1}) \right|,$$

więc

$$\left|\sum_{k=1}^n f(x_k)(a_k - a_{k-1}) - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_k')|\,(a_k - a_{k-1}).$$

Teraz korzystamy z (5.30)

$$\left|\sum_{k=1}^n f(x_k)(a_k - a_{k-1}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon. \ \blacksquare$$



Rysunek 5.1

Występująca w Twierdzeniu 5 suma $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)(a_k - a_{k-1})$ ma interpretację geometryczną zilustrowaną na Rys. 5.1. Jeden składnik tej sumy to pole prostokątnego słupka o podstawie $a_k - a_{k-1}$ i wysokości $f(x_k)$. Tradycyjnie długości poszczególnych przedziałów oznacza się $a_k - a_{k-1} = \Delta x_k$, a rzeczoną sumę zapisuje się w postaci

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k.$$

Twierdzenie 4 mówi, ze suma jest przybliżeniem pola powierzchni ograniczonej przez oś X dwie proste $x = a$, $x = b$ oraz wykres funkcji. Przybliżenie to jest tym lepsze (czyli dla mniejszego ϵ), im mniejsza jest średnica podziału.

Rozważmy teraz zamiast jednego podziału przedziału $\langle a, b\rangle$ cały ciąg podziałów o coraz większym n. Niech n-ty podział zawiera l_n małych przedziałów $\langle a_{n,k-1}, a_{n,k}\rangle$, $k \in \{1, 2, \ldots, l_n\}$, przy czym $a_{n,0} = a$, $a_{n,l_n} = b$. Niech s_n będzie średnicą n-go podziału. Interesują nas podziały coraz drobniejsze, czyli takie, że $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$.

Twierdzenie 6 – *o całce oznaczonej jako granicy sum.* Niech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i niech będzie dany ciąg podziałów przedziału $\langle a, b\rangle$ o własności $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. Jeśli $x_{n,k} \in \langle a_{n,k-1}, a_{n,k}\rangle$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k})(a_{n,k} - a_{n,k-1}). \tag{5.31}$$

Dowód. Niech będzie dane $\epsilon > 0$. Skoro ciąg średnic $\{s_n\}$ dąży do zera, to dobieramy N tak, aby dla $n > N$ zachodziła nierówność $s_n < \delta$. Na mocy poprzedniego twierdzenia mamy stąd

$$\left| \sum_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k})(a_{n,k} - a_{n,k-1}) - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \epsilon.$$

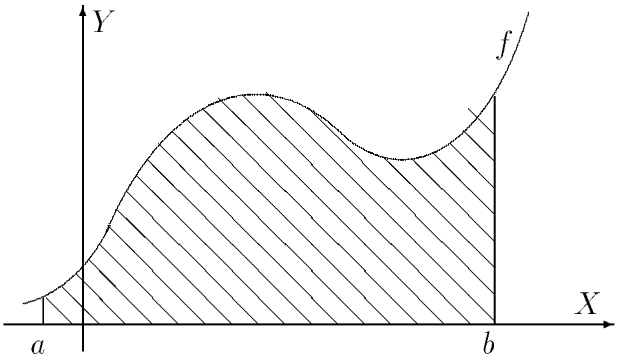
A to oznacza zbieżność wyrażoną wzorem (5.31). ■

To twierdzenie jest objaśnieniem symbolu stylizowanego „S", gdyż pokazuje, że całka oznaczona jest granicą sum przybliżających pole powierzchni między wykresem a przedziałem całkowania. Wzór (5.31) zapisuje się też inaczej, podstawiając $\Delta x_{n,k} = a_{n,k} - a_{n,k-1}$ za długość k-go przedziału:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k})\Delta x_{n,k}.$$

Ten zapis wyjaśnia też, dlaczego pod znakiem całki występuje symbol „dx" – jest to pozostałość symbolu $\Delta x_{n,k}$, przez wieki nazywana „wielkością nieskończenie małą". Dziś jest to tylko symbol, nie mówimy o nim, czy jest mały czy duży. Jego sensem jest po prostu wzór (5.31).

Skoro sumy $\sum\limits_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k})(a_{n,k} - a_{n,k-1})$ stojące po prawej stronie wzoru (5.31) dążą do pola powierzchni obszaru między wykresem a przedziałem $\langle a, b\rangle$ i jednocześnie dążą do całki oznaczonej stojącej po lewej stronie wzoru (5.31), to całka oznaczona jest właśnie owym polem powierzchni między wykresem a przedziałem całkowania, patrz Rys. 5.2. To jest właśnie zapowiadana *interpretacja geometryczna całki oznaczonej.*



Rysunek 5.2

PRZYKŁAD 5. Wyliczmy pole powierzchni pod funkcją opisującą *półokrąg* $f:\ \langle -r, r\rangle \to \mathbb{R},\ \ f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, patrz Rys. 5.3. Temu polu odpowiada całka oznaczona $\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx$. Całkę nieoznaczoną podobnej postaci wyliczyliśmy w Przykładzie 10 z poprzedniego paragrafu. Naszą całkę można sprowadzić do tamtej całki zapisując

$$\int\sqrt{r^2-x^2}dx=\int r\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}dx=r^2\int\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}d\left(\frac{x}{r}\right)=r^2\int\sqrt{1-y^2}dy,$$

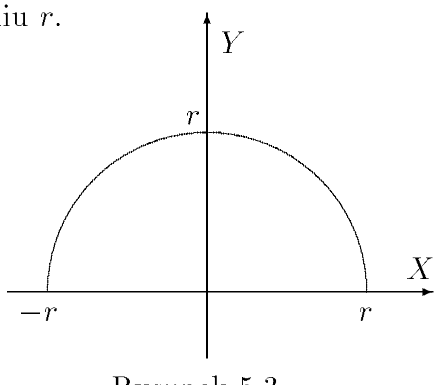
gdzie $y=\frac{x}{r}$. Na podstawie Przykładu 10 z § 5.2 to się równa

$$\frac{r^2}{2}\left(\arcsin y+y\sqrt{1-y^2}+C'\right)=\frac{1}{2}\left[r^2\arcsin(x/r)+x\sqrt{r^2-x^2}\right]+C.$$

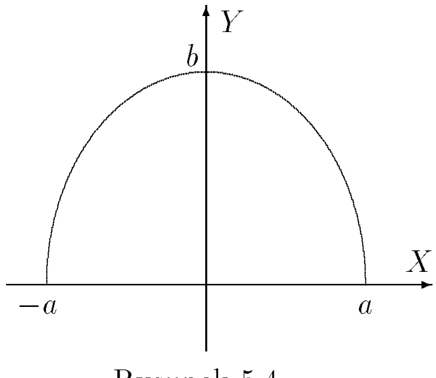
W takim razie nasza całka oznaczona wynosi

$$\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx=\frac{1}{2}\left[r^2\arcsin(x/r)+x\sqrt{r^2-x^2}\right]_{x=-r}^{x=r}$$
$$=\frac{r^2}{2}[\arcsin 1-\arcsin(-1)]=\frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\pi r^2.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób znany z geometrii wzór na pole półkola o promieniu r.



Rysunek 5.3



Rysunek 5.4

PRZYKŁAD 6. Pole elipsy wyliczymy jako podwojenie pola powierzchni pod wykresem półelipsy. Równanie *elipsy* o półosiach leżących na osiach układu współrzędnych i środku w środku układu współrzędnych ma postać

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Stąd dostajemy wzór na funkcję odpowiadającą górnej połowie elipsy: $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, patrz Rys. 5.4. W takim razie pole powierzchni między osią X a wykresem tej funkcji wynosi

$$P = b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx.$$

Przez podstawienie $t = x/a$, $dt = dx/a$, $dx = a\,dt$ zamieniamy tę całkę na inną

$$P = ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt,$$

a tę już możemy wyliczyć na podstawie tego samego wzoru, co przedtem:

$$P = ab\,\frac{1}{2}\left[\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{ab}{2}[\arcsin 1 - \arcsin(-1)]$$

$$= \frac{ab}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\pi ab.$$

Stąd pole elipsy wynosi πab. W szczególnym przypadku $a = b = r$ otrzymujemy pole koła, więc uznajemy to za prawidłowe uogólnienie.

Jeśli funkcja f spełnia nierówność $f(x) \le 0$ oraz $a < b$, to w analogii do Lematu 3 zachodzi $\int_a^b f(x)dx \le 0$, a to oznacza, że oś X jest wtedy nad wykresem, a pole powierzchni między wykresem funkcji a osią X liczone jest z minusem. Jeśli część funkcji f ma wartości dodatnie, a część ujemne, to tam, gdzie funkcja jest dodatnia, pole powierzchni daje wkład dodatni, a tam gdzie funkcja jest ujemna, pole powierzchni daje wkład ujemny. Może więc się zdarzyć, że oba wkłady się zniosą i całka oznaczona okaże się równa zero.

PRZYKŁAD 7. Wyliczmy całkę oznaczoną funkcji sinus po przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$:

$$\int_0^{2\pi}\sin x\; dx = -\cos x\big|_0^{2\pi} = -1-(-1) = 0.$$

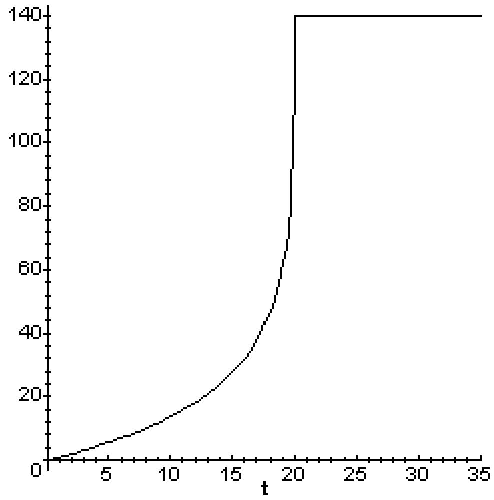
Rzeczywiście, wkład dodatni zniósł się z wkładem ujemnym i wypadkowe pole powierzchni między wykresem a osią X wynosi zero.

PRZYKŁAD FIZYCZNY. Wiemy już, że prędkość jest pochodną położenia względem czasu. W takim razie położenie x jako funkcja czasu jest funkcją pierwotną prędkości v: $x(t) = \int v(t)\,dt$. W szkole średniej rozważa się tylko dwa typy funkcyj $t \mapsto v(t)$, mianowicie $v(t) = \text{const}$ (ruch jednostajny) oraz $v(t) = v_0 + at$ (ruch jednostajnie zmienny).

Rozważmy daleko od Ziemi ruch rakiety, której silnik wyrzuca spaliny z prędkością w względem rakiety. Niech tempo s wyrzucania spalin (czyli ubytek masy dzielony przez czas tego ubytku) będzie stałe, wtedy masa rakiety zmienia się zgodnie z wzorem $m(t) = M - st$, gdzie M jest masą początkową rakiety. Oczywiście podany wzór nie jest prawdziwy dla wszystkich czasów, gdyż dla $t > \frac{M}{s}$ masa rakiety stałaby się ujemna. Obowiązuje on więc tylko dla czasów $0 \le t \le \frac{m_p}{s}$, gdzie m_p jest jest całkowitą masą spalin, jakie mogą powstać z paliwa zgromadzonego w rakiecie. Przy tym musi być $m_p < M$. Z zasady zachowania pędu otrzymuje się taki wzór na prędkość rakiety w funkcji czasu:

$$v(t) = w\ln\frac{M}{M-st} \quad \text{dla} \quad t \le \frac{m_p}{s}.$$

Widzimy, że prędkość początkowa wynosi zero. Wykres tej funkcji ukazaliśmy na Rys. 5.5 dla pewnego wyboru stałych M, w i s. Widać z niego, że $m_p/s = 20$ umownych jednostek, a dla $t > 20$ przyjęto prędkość stałą, co jest naturalne po wyczerpaniu paliwa.



Rysunek 5.5

Z podanego wzoru $v(t)$ można obliczyć położenie rakiety w funkcji czasu:

$$x(t) = \int v(t)dt = w \int \ln \frac{M}{M - st} dt.$$

Dla wyliczenia całki nieoznaczonej najpierw zamieniamy zmienną:

$$\frac{M - st}{M} = y, \qquad dy = -\frac{s}{M} dt, \qquad dt = -\frac{M}{s} dy,$$

$$x(t) = -\frac{wM}{s} \int \ln \frac{1}{y} dy = \frac{wM}{s} \int \ln y \; dy,$$

a potem całkujemy przez części: $u(y) = \ln y$, $v'(y) = 1$, skąd $u'(y) = \frac{1}{y}$, $v(y) = y$:

$$\int \ln y \; dy = y \ln y - \int \frac{y}{y} dy = y \ln y - y + C.$$

Otrzymujemy więc następującą funkcję położenia od czasu

$$x(t) = \frac{wM}{s} \left(\frac{M - st}{M} \ln \frac{M - st}{M} - \frac{M - st}{M} \right) + C = \frac{w(M - st)}{s} \left(\ln \frac{M - st}{M} - 1 \right) + C.$$

Jej wykres jest na Rys. 5.6. Widać na nim, że od chwili $t = 20$ nachylenie krzywej jest stałe, co oznacza ruch jednostajny. Możemy teraz wyliczyć drogę, jaką rakieta przebywa od chwili startu do wyczerpania paliwa:

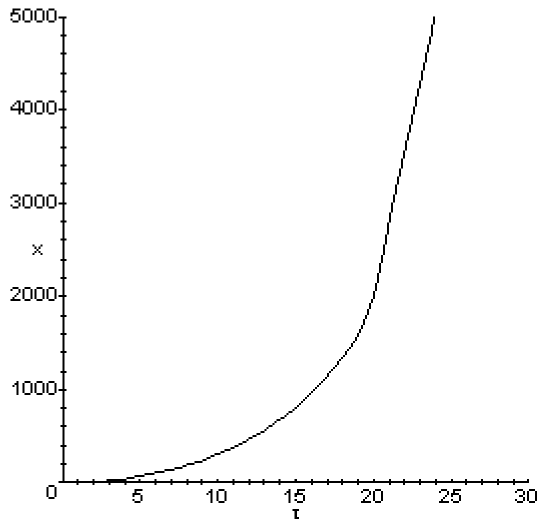
$$S = \int_0^{m_p/s} v(t)dt = \left[\frac{w(M - st)}{s} \left(\ln \frac{M - st}{M} - 1 \right) \right]_0^{m_p/s}$$

$$= \frac{w(M - m_p)}{s} \left(\ln \frac{M - m_p}{M} - 1 \right) - \frac{wM}{s}(-1)$$

$$= \frac{w(M-m_p)}{s}\ln\frac{M-m_p}{M} - \frac{w(M-m_p)}{s} + \frac{wM}{s} = \frac{w(M-m_p)}{s}\ln\frac{M-m_p}{M} + \frac{wm_p}{s}.$$

Oznaczywszy masę końcową rakiety $M_k = M - m_p$, piszemy

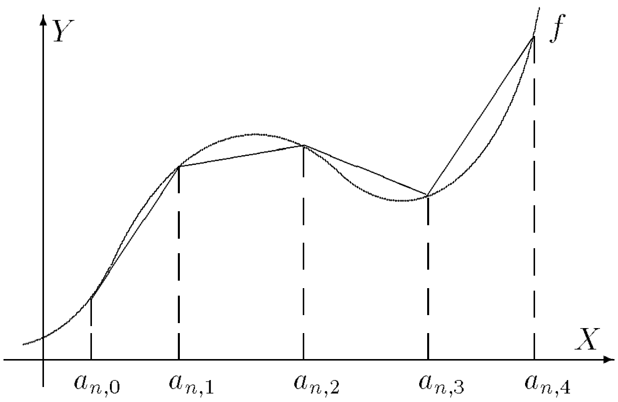
$$S = \frac{wM_k}{s}\ln\frac{M_k}{M} + \frac{wm_p}{s}.$$



Rysunek 5.6

5.3.1 Długość łuku

Niech będzie dana funkcja $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Rozważmy linię krzywą zadaną przez wykres tej funkcji nad przedziałem $\langle a, b\rangle$. Łuk tej krzywej można przybliżać przez linię łamaną wpisaną w ten łuk, patrz Rys. 5.7.



Rysunek 5.7

Twierdzenie 7. Niech będzie dana funkcja $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ o ciągłej pochodnej. Całka

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx \tag{5.32}$$

jest długością łuku krzywej złożonej z punktów (x,y) spełniających warunki

$$x \in \langle a,b\rangle, \qquad y = f(x).$$

Dowód. Utwórzmy ciąg podziałów przedziału $\langle a,b\rangle$ o średnicach s_n dążących do zera oraz ciąg linii łamanych powstających przez łączenie odcinkami kolejno punktów $(a_{n,0}, f(a_{n,0})), \ldots, (a_{n,k}, f(a_{n,k})), \ldots, (a_{n,l_n}, f(a_{n,l_n}))$, przy czym $a_{n,0} = a$, $a_{n,l_n} = b$. Długość L_n n-tej linii łamanej jest sumą długości poszczególnych odcinków, z jakich ona się składa, czyli

$$L_n = \sum_{k=1}^{l_n} \sqrt{(a_{n,k} - a_{n,k-1})^2 + [f(a_{n,k}) - f(a_{n,k-1})]^2}.$$

Wykorzystując twierdzenie o wartości pośredniej możemy napisać

$$f(a_{n,k}) - f(a_{n,k-1}) = f'(x_{n,k})(a_{n,k} - a_{n,k-1}) \quad \text{dla pewnego} \quad x_{n,k} \in \langle a_{n,k-1}, a_{n,k}\rangle,$$

wobec tego

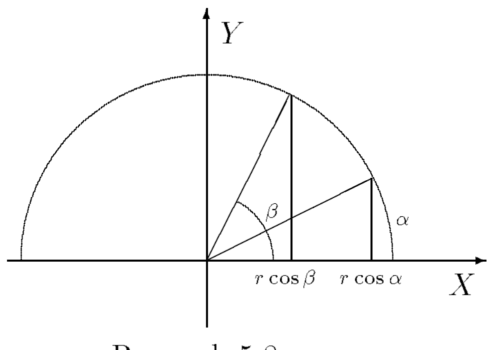
$$L_n = \sum_{k=1}^{l_n} \sqrt{1 + [f'(x_{n,k})]^2}\,(a_{n,k} - a_{n,k-1}). \tag{5.33}$$

Jeśli przez L oznaczymy długość łuku wykresu nad przedziałem $\langle a,b\rangle$, to mamy $L = \lim_{n\to\infty} L_n$. Z drugiej strony, na mocy Twierdzenia 6 sumy po prawej stronie wzoru (**??**) dążą do całki z funkcji $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ (aby skorzystać z tego twierdzenia, potrzebna jest ciągłość pochodnej f'), więc zachodzi równość

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \ \blacksquare$$

PRZYKŁAD 8. Zastosujemy to twierdzenie do wyliczenia długości łuku okręgu. Niech $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ będzie funkcją opisującą półokrąg; rozważamy łuk tego półokręgu od kąta α do kąta β, czyli fragment wykresu dla zmiennej x z przedziału $\langle r\cos\beta, r\cos\alpha\rangle$, patrz Rys. 5.8. Obliczymy całkę (**??**). Mamy

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$



Rysunek 5.8

skąd

$$\sqrt{1+(f')^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

W takim razie całka (??) ma postać

$$L = r\int_{r\cos\beta}^{r\cos\alpha} \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \int_{r\cos\beta}^{r\cos\alpha} \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}}.$$

podstawiamy $y = x/r,\ dy = dx/r,\ dx = r\,dy$, wtedy

$$L = r\int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Ta całka występuje w Tabeli 2 jako $\arcsin y$, ale z Tabeli 1 można zauważyć, że funkcją pierwotną dla $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ jest również $-\arccos y$, zatem

$$L = -r\arccos y\Big|_{\cos\beta}^{\cos\alpha} = -r[\arccos(\cos\alpha) - \arccos(\cos\beta)] = r(\beta-\alpha).$$

Otrzymujemy wynik zgodny z geometrią, która mówi, że długość łuku równa jest promieniowi okręgu pomnożonemu przez kąt odpowiadający temu łukowi.

5.3.2 Objętość bryły obrotowej

Niech będzie dana funkcja ciągła $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, która jest nieujemna: $f(x) \geq 0$. Oznaczmy przez P obszar złożony z punktów (x,y) spełniających warunki $x \in \langle a,b\rangle$, $y \in \langle 0, f(x)\rangle$ – jest on zilustrowany na Rys. 5.2. Obracając obszar P dokoła osi X otrzymujemy bryłę obrotową. Szukamy objętości W tej bryły.

Rozważamy ciąg podziałów przedziału $\langle a,b\rangle$ z oznaczeniami z Twierdzenia 6, o średnicach s_n dążących do zera. Przez obracanie prostokąta o podstawie $\langle a_{n,k-1}, a_{n,k}\rangle$ i wysokości $f(x_{n,k})$ wokół osi X powstaje walec o polu podstawy $\pi f(x_{n,k})^2$ i wysokości $(a_{n,k} - a_{n,k-1})$, a zatem o objętości

$$\pi f(x_{n,k})^2(a_{n,k} - a_{n,k-1}),$$

patrz Rys. 5.9. (Ten rysunek trzeba porównać z Rys. 5.1, bo prostokąty z tamtego rysunku stają się tutaj walcami.) Postępując w ten sposób dla każdego k przy ustalonym n zastępujemy rozważaną przez nas bryłę obrotową przez bryłę złożoną z l_n walców. Jej objętość W_n jest sumą objętości poszczególnych walców:

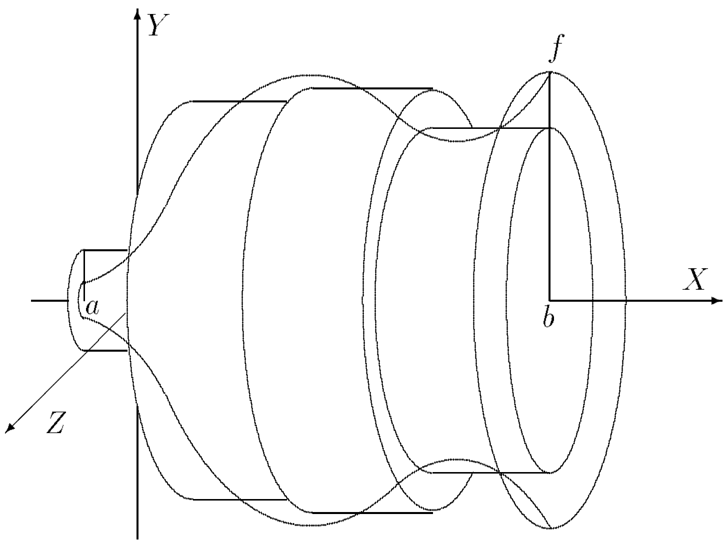
$$W_n = \pi\sum_{k=1}^{l_n} f(x_n)^2(a_{n,k} - a_{n,k-1}).$$

Na mocy Twierdzenia 6 otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} W_n = \pi\int_a^b f(x)^2 dx.$$

W takim razie objętość bryły obrotowej otrzymanej przez obracanie obszaru P wokół osi X wynosi

$$W = \pi\int_a^b f(x)^2 dx. \tag{5.34}$$



Rysunek 5.9

5.3.3 Pole powierzchni obrotowej

Niech będzie dana nieujemna funkcja $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, która ma ciągłą pochodną. Rozważamy powierzchnię otrzymaną przez obracanie wykresu $y = f(x)$ wokół osi X. Jest to powierzchnia boczna omawianej poprzednio bryły. Szukamy pola B tej powierzchni.

Rozważamy ciąg podziałów przedziału $\langle a, b\rangle$ z oznaczeniami z Twierdzenia 5, o średnicach s_n dążących do zera. Przez obracanie odcinka łączącego punkty $(a_{n,k-1}, f(a_{n,k-1}))$ oraz $(a_{n,k}, f(a_{n,k}))$ powstaje powierzchnia boczna stożka ściętego, zob. Rys. 5.10, który powstał przez obracanie Rys. 5.7. Z geometrii wiadomo, że pole powierzchni bocznej ściętego stożka o tworzącej l, a promieniach podstaw r_1 i r_2 wynosi $\pi(r_1 + r_2)l$. Dla naszego stożka ściętego trzeba podstawić

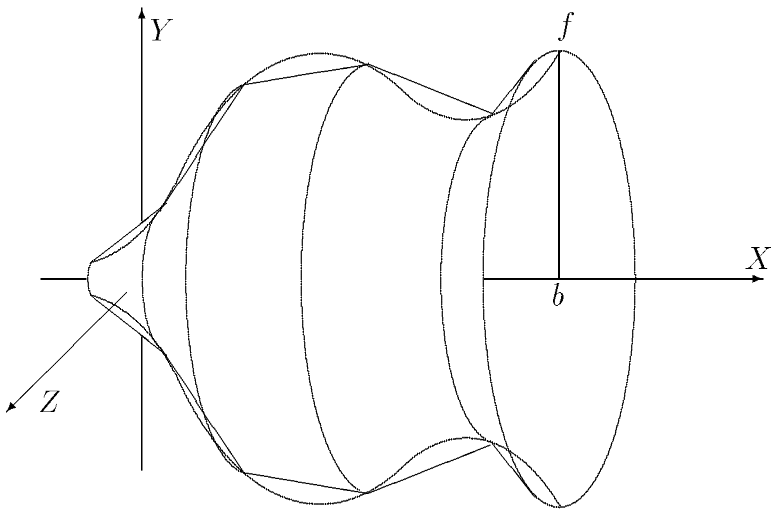
$$r_1 = f(a_{n,k-1}), \qquad r_2 = f(a_{n,k})$$

oraz

$$l = \sqrt{(a_{n,k} - a_{n,k-1})^2 - [f(a_{n,k}) - f(a_{n,k-1})]^2} = \sqrt{1 + [f'(x_{n,k})]^2}\ (a_{n,k} - a_{n,k-1})$$

z $x_{n,k} \in \langle a_{n,k-1}, a_{n,k}\rangle$, więc powierzchnia boczna k-tego stożka ściętego wynosi

$$\pi[f(a_{n,k-1}) + f(a_{n,k})]\sqrt{1 + [f'(x_{n,k})]^2}\ (a_{n,k} - a_{n,k-1}),$$



Rysunek 5.10

a pole powierzchni przybliżających naszą powierzchnię obrotową wynosi

$$B_n = \pi \sum_{k=1}^{l_n} [f(a_{n,k-1}) + f(a_{n,k})]\sqrt{1 + [f'(x_{n,k})]^2}\ (a_{n,k} - a_{n,k-1}).$$

To jeszcze nie jest wyrażenie, które można porównać z wzorem (5.31) w Twierdzeniu 6. Gdyby w nawiasie prostokątnym była funkcja od $x_{n,k}$, to moglibyśmy zastosować wzór (5.31). W tym celu trzeba zauważyć, że oba składniki w nawiasie prostokątnym dążą do $f(x_{n,k})$, więc można go zastąpić przez $2f(x_{n,k})$ zapisać wyrażenie

$$C_n = 2\pi \sum_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k})\sqrt{1 + [f'(x_{n,k})]^2}\ (a_{n,k} - a_{n,k-1})$$

i udowodnić, że $\lim_{n\to\infty}(B_n - C_n) = 0$. Otóż

$$B_n - C_n = \pi \sum_{k=1}^{l_n} [f(a_{n,k-1}) - f(x_{n,k}) + f(a_{n,k}) - f(x_{n,k})]\sqrt{1 + [f'(x_{n,k})]^2}\ (a_{n,k} - a_{n,k-1}).$$

Założylismy, że średnice podziałów dążą do zera, więc dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieją dostatecznie duże n takie, że jeśli punkty x i x' należą do tego samego przedziału n-go podziału, to $|f(x) - f(x')| < \epsilon$, więc

$$|f(a_{n,k-1}) - f(x_{n,k})| < \epsilon \quad \text{oraz} \quad |f(a_{n,k}) - f(x_{n,k})| < \epsilon.$$

Oznaczywszy przez M kres górny funkcji $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ w przedziale $\langle a, b\rangle$, otrzymujemy stąd

$$|B_n - C_n| < \pi \sum_{k=1}^{l_n} 2\epsilon M(a_{n,k} - a_{n,k-1}) = 2\pi\epsilon M(b - a), \quad \text{czyli} \quad |B_n - C_n| < \epsilon'$$

dla $\epsilon' = 2\pi\epsilon M(b - a)$, które też można przyjąć dowolnie małe. To oznacza, że

$$\lim_{n\to\infty}(B_n - C_n) = 0.$$

Po porównaniu wyrażenia C_n z wzorem (5.31) dochodzimy do wniosku, że

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} C_n = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx.$$

W takim razie pole powierzchni obrotowej otrzymanej przez obracanie krzywej $y = f(x)$ wokół osi X wynosi

$$B = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx. \tag{5.35}$$

PRZYKŁAD 9. S t o ż e k . Niech $f : \langle 0, h\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = cx$. W tym wypadku obszar P jest trójkątem. Przy jego obracaniu postaje stożek o wierzchołku w początku układu, o wysokości h i promieniu podstawy $r = ch$. Według wzoru (**??**) objętość tego stożka wynosi

$$W = \pi \int_0^h c^2x^2 dx = \frac{1}{3}\pi c^2 x^3|_0^h = \frac{1}{3}\pi c^2 h^3 = \frac{1}{3}\pi (ch)^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Wzór (**??**) pozwala nam wyliczyć pole powierzchni bocznej stożka:

$$B = 2\pi \int_0^h cx\sqrt{1+c^2}dx = 2\pi c\sqrt{1+c^2}\int_0^h x\, dx = \pi c\sqrt{1+c^2}\; x^2|_0^h$$

$$= \pi ch^2\sqrt{1+c^2} = \pi ch\sqrt{h^2+(ch)^2}.$$

wprowadzamy tworzącą stożka $l = \sqrt{h^2+(ch)^2} = \sqrt{h^2+r^2}$, wtedy

$$B = \pi r l.$$

PRZYKŁAD 10. K u l a i s f e r a . Weźmy funkcję opisującą *półokrąg* $f : \langle -r, r\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Obszar P między wykresem tej funkcji a osią X jest półkolem. Obracając półkole wokół osi X otrzymujemy kulę o promieniu r. Jej objętość liczymy z wzoru (**??**):

$$W = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2)dx = \pi \int_{-r}^r r^2 dx - \pi \int_{-r}^r x^2 dx = \pi r^2 x|_{-r}^r - \frac{1}{3}\pi x^3|_{-r}^r$$

$$= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Otrzymaliśmy wzór znany z geometrii.

Obracając sam wykres funkcji otrzymujemy powierzchnię kuli, czyli sferę. Przed wyliczeniem pola powierzchni według wzoru (**??**) musimy znaleźć pochodną funkcji f:

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

i pierwiastek występujący w (**??**):

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Teraz stosujemy wzór (**??**)

$$B = 2\pi \int_{-r}^{r} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx$$

$$= 2\pi r\ x|_{-r}^{r} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2.$$

To też jest wzór znany z geometrii.

5.4 Całki niewłaściwe

Niech będzie dana funkcja ciągła $f : \langle a, \infty) \to \mathbb{R}$. Wtedy dla każdego $y \in \langle a, \infty)$ istnieje całka

$$\int_a^y f(x)dx = F(y),$$

gdyż jest to całka oznaczona po przedziale domkniętym $\langle a, y\rangle$. Jest to jedna z możliwych funkcyj pierwotnych funkcji f. Nie jest to ogólna funkcja pierwotna, bo nie ma stałej dowolnej, za to spełnia warunek $F(a) = 0$. Jeśli istnieje granica

$$\lim_{y\to\infty} F(y), \quad \text{gdzie} \quad F(y) = \int_a^y f(x)dx,$$

to granicę tę oznaczamy symbolem $\int_a^\infty f(x)dx$ i nazywamy *całką niewłaściwą funkcji f od a do* ∞. Zapisujemy więc

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{y\to\infty} \int_a^y f(x)dx.$$

Jeśli ta granica istnieje wśród liczb rzeczywistych, to mówimy, że całka niewłaściwa jest *zbieżna.*

Jeśli natomiast

$$\lim_{y\to\infty} \int_a^y f(x)dx = \infty \ (\text{albo}\ -\infty),$$

to piszemy

$$\int_a^\infty f(x)dx = \infty \ (\text{albo}\ -\infty)$$

i mówimy, że całka jest *rozbieżna do plus* (albo *minus*) *nieskończoności.*

PRZYKŁAD 1. Niech $s > 1$. Liczymy całkę niewłaściwą

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}\left[\frac{1}{x^{s-1}}\right]_1^\infty = \frac{1}{1-s}\left(\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y^{s-1}} - 1\right) = \frac{1}{1-s}(0-1) = \frac{1}{s-1}.$$

Całka ta jest więc zbieżna. Natomiast dla $s = 1$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \ln x|_1^\infty = \infty - 0 = \infty,$$

czyli otrzymujemy całkę rozbieżną. Dla $s < 1$ całka także jest rozbieżna, gdyż

$$\int_1^\infty x^{-s}dx = \frac{1}{1-s}\lim_{y\to\infty}(y^{1-s}-1) = \frac{1}{1-s}(\infty - 1) = \infty.$$

Analogicznie określamy *całkę niewłaściwą od $-\infty$ do a*:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{y\to-\infty} \int_{y}^{a} f(x)dx$$

oraz *całkę niewłaściwą od $-\infty$ do ∞*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{z\to-\infty} \int_{z}^{a} f(x)\,dx + \lim_{y\to\infty} \int_{a}^{y} f(x)\,dx.$$

Niech będzie dana funkcja ciągła $f : \langle a, b) \to \mathbb{R}$ na przedziale bez prawego końca. Dla każdego $y \in \langle a, b)$ istnieje więc całka oznaczona $\int_a^y f(x)dx$. Jeśli istnieje granica

$$\lim_{y\to b-} F(y), \quad \text{gdzie} \quad F(y) = \int_{a}^{y} f(x)dx$$

to oznaczamy ją symbolem $\int_a^b f(x)dx$ takim samym, jak dla całki oznaczonej, ale nazywamy *całką niewłaściwą w górnej granicy całkowania*. Zapisujemy więc

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y\to b-} \int_a^y f(x)dx. \tag{5.36}$$

Jeśli ta granica istnieje wśród liczb rzeczywistych, to mówimy, że całka niewłaściwa jest *zbieżna*.

Oznaczenie (**??**) niczym się nie różni od normalnej całki oznaczonej. Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$, to jej funkcja pierwotna jest też ciągła na tym samym przedziale, a wtedy

$$\lim_{y\to b-} F(y) = F(b)$$

i dla całki niewłaściwej otrzymujemy

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{y\to b-} F(y) = F(b) = F(b) - F(a),$$

czyli to samo, co dla całki oznaczonej. Nie jest więc nadużyciem używanie tego samego symbolu dla całki oznaczonej i dla całki niewłaściwej w górnej granicy całkowania.

Jeśli funkcja $f : (a, b\rangle \to \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale bez lewego końca, to analogicznie określamy *całkę niewłaściwą w dolnej granicy całkowania*:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{y\to a+} \int_{y}^{b} f(x)dx.$$

PRZYKŁAD 2. Niech $s < 1$. Liczymy całkę niewłaściwą w dolnej granicy całkowania

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} x^{1-s}|_0^1 = \frac{1}{1-s}(1 - \lim_{y\to 0+} y^{1-s}) = \frac{1}{1-s}(1-0) = \frac{1}{1-s}.$$

Całka ta jest zbieżna. Natomiast dla $s = 1$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x|_0^1 = 0 - (-\infty) = \infty,$$

czyli otrzymujemy całkę rozbieżną. Dla $s > 1$ całka także jest rozbieżna, gdyż

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^{s-1}} = \infty$$

i otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} x^{1-s}|_0^1 = \frac{1}{1-s}(1 - \lim_{y \to 0+} y^{1-s}) = \frac{1}{1-s}(1 - \lim_{y \to 0+} \frac{1}{y^{s-1}})$$

$$= \frac{1}{1-s}(1 - \infty) = \frac{1}{s-1}(\infty - 1) = \infty.$$

PRZYKŁAD 3. Liczymy całkę niewłaściwą w górnej granicy całkowania $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\, dx$. W tym celu wykorzystujemy całkę nieoznaczoną z Przykładu 5 w § 5.1:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\, dx = -\ln(\cos x)|_0^{\pi/2} = -(-\infty - 0) = \infty.$$

Stwierdzamy, że ta całka jest rozbieżna.

Jeśli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale otwartym i jeśli dla dowolnego $c \in (a, b)$ są zbieżne całki niewłaściwe na przedziałach $(a, c\rangle$ oraz $\langle c, b)$, to określamy *całkę niewłaściwą w obu granicach całkowania* jako

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{z \to a+} \int_a^c f(x)\, dx + \lim_{y \to b-} \int_c^b f(x)\, dx.$$

Można pokazać, że ta suma nie zależy od wyboru punktu c.

PRZYKŁAD 4. Gdybyśmy – podobnie jak w Przykładzie 8 z poprzedniego paragrafu – chcieli wyliczyć długość półokręgu o promieniu r, to powinniśmy wyliczyć całkę

$$\int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx.$$

Funkcja podcałkowa nie jest określona na końcach przedziału całkowania, bo mianownik znika w tych punktach. Zatem dziedziną tej funkcji jest przedział otwarty $(-r, r)$ i napisana całka jest niewłaściwa w obu granicach całkowania. Jednak funkcja pierwotna $F(x) = -r \arccos(x/r)$ jest ciągła w przedziale domkniętym, $\langle -r, r\rangle$ więc jej granice na końcach przedziału są równe wartościom funkcji w tych punktach i możemy napisać

$$L = \int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = F(r) - F(-r) = -r[\arccos 1 - \arccos(-1)]$$

$$= -r(0 - \pi) = \pi r,$$

co jest połową znanego wzoru na długość okręgu o promieniu r.

PRZYKŁAD 5. Jest to przykład nietypowy, bo tylko badamy zbieżność całki niewłaściwej $\int_a^\infty \frac{sinx}{x} dx$ dla $a > 0$, a nie liczymy jej wartości. Oznaczmy

$$F(y) = \int_a^y \frac{sinx}{x} dx \quad \text{dla} \quad y > a.$$

Przy podstawieniu $u(x) = 1/x$, $v'(x) = \sin x$, czyli $u'(x) = -1/x^2$, $v(x) = -\cos x$ całkowanie przez części daje

$$F(y') - F(y) = \int_y^{y'} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\cos y}{y} - \frac{\cos y'}{y'} - \int_y^{y'} \frac{\cos x}{x^2} dx. \tag{5.37}$$

Przy tym dla $y' > y$ dzięki Twierdzeniom 4 i 3 z § 5.3

$$\left| \int_y^{y'} \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \le \int_y^{y'} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y'} < \frac{1}{y}.$$

Dla modułu równości (**??**) dzięki nierówności trójkąta możemy napisać

$$|F(y') - F(y)| \le \left|\frac{\cos y}{y}\right| + \left|\frac{\cos y'}{y'}\right| + \frac{1}{y} \le \frac{1}{y} + \frac{1}{y'} + \frac{1}{y} < \frac{3}{y}$$

dla $y' > y > a$. Ponieważ $\lim_{y\to\infty}(3/y) = 0$, to funkcja F spełnia definicję Cauchy'ego istnienia granicy w nieskończoności $\lim_{y\to\infty} F(y)$, więc rozważana całka niewłaściwa jest zbieżna.