Rozdział 6

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

Istniejące podręczniki

H. Margenau, G.M. Murphy: *Matematyka w fizyce i chemii*, rozdział 2, PWN, Warszawa 1962;
W.I Smirnow: *Matematyka wyższa*, tom II, rozdział 1 i 2, PWN, Warszawa 1966;
I. G. Pietrowski: *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa 1967;
Herbert Goering: *Elementarne metody rozwiązywania równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1967;
N. W. Matwiejew: *Metody całkowania równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN, Warszawa 1970.

6.1 Podstawowe pojęcia

W rachunku różniczkowym dowiedzieliśmy się, że przy danej funkcji $y = f(x)$ jej pochodna $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ sama jest funkcją od x, którą znajduje się dzięki odpowiednim regułom. Jeśli na przykład $y = \mathrm{e}^{x^2}$, to

$$\frac{dy}{dx} = 2x\mathrm{e}^{x^2} \quad \text{lub} \quad \frac{dy}{dx} = 2xy.$$

Typowe zadanie rachunku całkowego jes takie: przy znanej funkcji $g(x)$ znaleźć jej funkcję pierwotną. Tym razem mamy inne zadanie: przy danym równaniu, takim jak $dy/dx = 2xy$ znaleźć funkcję $y = f(x)$ spełniającą to równanie. Innymi słowy, mamy rozwiązać równanie różniczkowe.

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie postaci

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{6.1}$$

gdzie F jest znaną funkcją zmiennej niezależnej x, szukanej funkcji $y = f(x)$ i jej pochodnych. Zakładamy przy tym, że $y^{(n)}$ rzeczywiście występuje w tym równaniu, natomiast pozostałe argumenty funkcji F mogą nie występować w sposób jawny. W nazwie występuje przymiotnik „zwyczajne", bo tak nazywa się równanie różniczkowe, w którym szukana funkcja zależy od jednej zmiennej. Gdyby zależała od dwóch lub więcej zmiennych,

to równanie nazywałoby się cząstkowe. Każdą funkcję f określoną wraz z odpowiednimi pochodnymi na pewnej dziedzinie D nazywamy *rozwiązaniem* równania różniczkowego, jeśli zamienia ona równanie (6.1) w tożsamość prawdziwą dla wszystkich $x \in D$.

Przykładem równania różniczkowego rzędu pierwszego jest równanie

$$y' - 2x = 0, \quad \text{czyli} \quad y' = 2x. \tag{6.2}$$

Takie równania umiemy rozwiązywać – wystarczy znaleźć funkcję pierwotną; w takim razie wszystkie rozwiązania równania (6.2) mają postać

$$y = x^2 + C \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie C jest dowolną stałą. Stąd wynika, że równanie (6.2) ma nie jedno, lecz nieskończenie wiele rozwiązań, bo dla każdej wartości C jest osobne rozwiązanie.

Przykładem równania różniczkowego rzędu n jest równanie $y^{(n)} = 0$, które ma rodzinę rozwiązań

$$y = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ \ldots \ + C_{n-1} x + C_n,$$

gdzie $C_1, \ldots, C_n$ są stałymi dowolnymi. Później dowiemy się, że rodzina rozwiązań każdego równania rzędu n zależy od n dowolnych parametrów.

Proces znajdowania rozwiązań nazywamy *całkowaniem równania różniczkowego*. Do równań różniczkowych prowadzi wiele zagadnień nauk przyrodniczych i techniki.

PRZYKŁAD 1. Punkt materialny porusza się po osi X tak, że prędkość jest znaną funkcją czasu $v = f(t)$. Trzeba znaleźć ruch tego punktu, tj. zależność współrzędnej punktu od czasu $x(t)$. W tym przypadku równanie różniczkowe jest pierwszego rzędu i ma postać

$$\frac{dx}{dt} = f(t).$$

Jak wiemy z rachunku całkowego, wszystkie rozwiązania tego równania można zapisać

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + C, \tag{6.3}$$

gdzie górna granica całkowania jest zmienna, granica dolna jest ustalona, a C jest stałą dowolną. Skoro w tym wzorze występuje stała dowolna, to nie otrzymaliśmy jeszcze konkretnego ruchu punktu. Wzór ten obejmuje całą rodzinę ruchów o tej samej prędkości w chwili t. Dopiero dodanie warunku

$$x = x_0 \quad \text{dla} \quad t = t_0 \tag{6.4}$$

wybiera jeden ruch z całej rodziny. Liczbę x_0 nazywamy *wartością początkową funkcji*, a t_0 – *wartością początkową argumentu*. Liczby t_0 i x_0 razem wzięte nazywamy *danymi początkowymi*, a warunek (6.4) *warunkiem początkowym rozwiązania*. Podstawienie $C = x_0$ we wzorze (6.3) zapewnia spełnienie warunku (6.4) i daje szukany ruch

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + x_0.$$

Dla równania różniczkowego (6.1) proces dobierania występujących w rozwiązaniu ogólnym stałych dowolnych do warunków początkowych nazywa się *zagadnieniem początkowym*.

6.2 Równania rzędu pierwszego

Obecnie poznamy metody rozwiązań stosowane w najczęściej występujących przypadkach.

6.2.1 Równania o zmiennych rozdzielonych

Rozważamy równanie różniczkowe postaci

$$N(x,y)\frac{dy}{dx} = M(x,y).$$

Mnożymy je stronami przez dx

$$M(x,y)dx = N(x,y)dy.$$

Zakładamy, że funkcje M, N są iloczynami dwóch czynników, z których jeden zależy od x, a drugi od y:

$$M_1(x)M_2(y)dx = N_1(x)N_2(y)dy.$$

Dzielimy obie strony równania przez M_2N_1

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx = \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy,$$

co można zapisać inaczej

$$f(x)dx = g(y)dy, \tag{6.5}$$

gdzie $f(x) = M_1(x)/N_1(g)$, $g(y) = N_2(y)/M_2(y)$. Takie równanie nazywamy *równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych*. Można je rozwiązać przez obliczenie dwóch całek nieoznaczonych

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy$$

lub z użyciem funkcyj pierwotnych F dla f oraz G dla g:

$$F(x) = G(y) + C \tag{6.6}$$

i otrzymać szukany związek między zmiennymi y i x. W równaniu (6.5) nie jest ważne, która zmienna jest zależna, a która niezależna – obie zmienne x i y występują na jednakowych prawach. Dopiero przez rozwiązanie równania (6.6) wyliczając y czynimy z niej zmienną zależną.

Nie ma potrzeby używania dwóch stałych całkowania, gdyż równość $F(x) + C_1 = G(y) + C_2$ daje $F(x) = G(y) + C_2 - C_1 = G(y) + C$, gdzie C jest zupełnie dowolne. W wielu przykładach, które nastąpią, będziemy zamieniać stałe w sposób dla nas wygodny. Na przykład iloczyn stałych, czy kombinacja liniowa stałych mogą być zastąpione przez jedną stałą.

PRZYKŁAD 1. Wiadomo, że szybkość rozpadu radu jest proporcjonalna do chwilowej ilości radu. Załóżmy, że w chwili początkowej t_0 było R_0 gramów radu. Należy wyznaczyć masę R radu w dowolnej chwili t.

Jeśli współczynnik proporcjonalności wynosi $\lambda > 0$, to dochodzimy do takiego równania różniczkowego

$$\frac{dR}{dt} = -\lambda R. \tag{6.7}$$

Napisaliśmy minus, bo chodzi o ubytek masy radu. Przekształcamy to równanie do postaci z rozdzielonymi zmiennymi

$$\frac{dR}{R} = -\lambda dt.$$

Całkowanie obu stron z osobna daje $\ln R = -\lambda t + C'$, czyli $R = \mathrm{e}^{-\lambda t + C'} = \mathrm{e}^{C'}\mathrm{e}^{-\lambda t}$. Jeśli podstawimy $\mathrm{e}^{C'} = C$, to dostaniemy

$$R(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{6.8}$$

Warunek początkowy prowadzi do równości $C\mathrm{e}^{-\lambda t_0} = R_0$, skąd $C = R_0\mathrm{e}^{\lambda t_0}$. Wstawiamy to do (6.8) otrzymując

$$R(t) = R_0\mathrm{e}^{\lambda t_0}\mathrm{e}^{-\lambda t} = R_0\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}.$$

Otrzymany wzór nazywa się *prawem rozpadu promieniotwórczego.*

PRZYKŁAD 2. Rozwiążmy równanie różniczkowe $\frac{dy}{dx} = -x/y$. Rozdzielamy zmienne: $y\,dy = -x\,dx$, więc

$$\int y\,dy = -\int x\,dx,$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1,$$

lub

$$x^2 + y^2 = c^2, \tag{6.9}$$

gdzie stała $2C_1$ została zastąpiona przez c^2, która ma interpretację kwadratu promienia okręgu, bo znalezione rozwiązanie (6.9) jest równaniem okręgu. Widzimy też na tym przykładzie, że nie zawsze dążymy do napisania funkcji $y(x)$, czasami poprzestajemy na napisaniu równania wiążącego zmienne y i x. Konkretną funkcję wybierzemy dopiero po wykorzystaniu warunku początkowego.

6.2.2 Równania o współczynnikach jednorodnych

Jeśli funkcja dwóch zmiennych f ma własność $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ dla pewnej liczby wymiernej n, to mówimy, że f jest *funkcją jednorodną stopnia* n.

PRZYKŁAD 3. a) Niech $f(x, y) = x - 3\sqrt{xy} + 5y$, wtedy

$$f(tx, ty) = tx - 3\sqrt{(tx)(ty)} + 5ty = tx - 3t\sqrt{xy} + 5ty = t(x - 3\sqrt{xy} + 5y) = tf(x, y).$$

Ta funkcja jest jednorodna stopnia jeden.

b) Niech $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$, wtedy

$$f(tx, ty) = \sqrt{t^3x^3 + t^3y^3} = t^{3/2}\sqrt{x^3 + y^3} = t^{3/2}f(x, y).$$

Ta funkcja jest jednorodna stopnia $3/2$.

c) Niech $f(x, y) = \frac{x}{2y} + 4$, wtedy

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{2ty} + 4 = \frac{x}{2y} + 4 = t^0 f(x, y).$$

Ta funkcja jest jednorodna stopnia zero.

Funkcję jednorodną stopnia n można zapisać w postaci

$$f(x,y) = f\left(x, x\,\frac{y}{x}\right) = x^n f\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad \text{oraz} \quad f(x,y) = y^n f\left(\frac{x}{y}, 1\right), \tag{6.10}$$

gdzie $f(1, y/x)$ i $f(x/y, 1)$ obie są jednorodne stopnia zero.

Jeśli w równaniu różniczkowym postaci

$$M(x,y)dx = N(x,y)dy. \tag{6.11}$$

współczynniki M, N są funkcjami jednorodnymi tego samego stopnia:

$$M(tx,ty) = t^n M(x,y) \quad \text{oraz} \quad N(tx,ty) = t^n N(x,y),$$

to mówimy, że równanie ma *jednorodne współczynniki* albo jest *równaniem jednorodnym*. Równanie takie można sprowadzić do rozdzielonych zmiennych przez jedno z dwóch podstawień $y = ux$ lub $x = vy$, gdzie u, v są nowymi zmiennymi zależnymi. Jeśli wybierzemy $y = ux$, to z pochodnej iloczynu $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$, a stąd $dy = x\,du + u\,dx$. W takim razie równanie różniczkowe (6.11) przyjmuje postać

$$M(x,ux)dx = N(x,ux)(x\,du + u\,dx).$$

Teraz dzięki jednorodności (6.10) możemy napisać

$$x^n M(1,u)dx = x^n N(1,u)(x\,du + u\,dx)$$

lub

$$M(1,u)dx - uN(1,u)dx = xN(1,u)du,$$
$$[M(1,u) - uN(1,u)]dx = xN(1,u)du,$$

co daje

$$\frac{dx}{x} = \frac{N(1,u)du}{M(1,u) - uN(1,u)}.$$

Rozpoznajemy w tym równanie o zmiennych rozdzielonych. Ten wzór nie jest wart zapamiętania, bo to postępowanie należy powtórzyć za każdym razem. To, że podstawienie $x = vy$ też prowadzi do rozdzielenia zmiennych, pozostawiam do samodzielnego sprawdzenia.

PRZYKŁAD 4. Rozwiążemy równanie różniczkowe

$$(x^2 + y^2)dx = (xy - x^2)dy.$$

Obie funkcje-współczynniki przy różniczkach są jednorodne stopnia 2. Podstawiamy $y = ux$:

$$(x^2 + u^2x^2)dx = (ux^2 - x^2)(u\,dx + x\,du),$$

$$x^2(1+u)dx = x^3(u-1)du.$$

Teraz już możemy rozdzielić zmienne:

$$\frac{dx}{x} = \frac{u-1}{u+1}du,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \left(1 - \frac{2}{u+1}\right) du.$$

Całkujemy

$$\ln|x| + \ln|C| = u - 2\ln|u+1|.$$

Wracamy do zmiennej y, czyli podstawiamy $u = y/x$:

$$\ln|Cx| = \frac{y}{x} - 2\ln\left|\frac{y}{x}+1\right|,$$

$$\ln|Cx| = \frac{y}{x} + 2\ln\left|\frac{x}{y+x}\right|,$$

$$Cx = \mathrm{e}^{y/x}\left(\frac{x}{x+y}\right)^2.$$

Rozwiązanie pozostawiamy w postaci *funkcji uwikłanej*, tzn. bez wyraźnego wzoru $y = f(x)$:

$$C(x+y)^2 = x\mathrm{e}^{y/x}.$$

PRZYKŁAD 5. Rozwiążemy równanie

$$(2\sqrt{xy} - y)\,dx = x\,dy.$$

Współczynniki przy różniczkach są jednorodne stopnia jeden. Podstawiamy $y = ux$:

$$\left(2|x|\sqrt{u} - ux\right)dx = x(u\,dx + x\,du).$$

Jeśli założymy $x > 0$, to można uprościć równanie stronami przez x:

$$(2u^{1/2} - 2u)dx = x\,du.$$

Rozdzielamy zmienne:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{2u^{1/2}(1-u^{1/2})}.$$

Prawą stronę całkuje się przez podstawienie $t = u^{1/2}$:

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dt}{t-1},$$

co daje

$$\ln|x| = -\ln|t-1| + \ln|C|,$$

$$\ln|x| + \ln\left|\sqrt{\frac{y}{x}} - 1\right| = \ln|C|,$$

$$x\left(\sqrt{\frac{y}{x}} - 1\right) = C$$

i znowu dostajemy rozwiązanie w postaci uwikłanej:

$$\sqrt{xy} - x = C.$$

Tu może pojawić się pytanie: kiedy stosować podawienie $x = vy$? Chociaż można go użyć do każdego jednorodnego równania różniczkowego, to warto go próbować wtedy, gdy funkcja $M(x,y)$ stojąca przy różniczce dx jest prostsza od $N(x,y)$. W Przykładzie 4 nie ma istotnej różnicy między M i N, więc można użyć obu podstawień $y = ux$ lub $x = vy$. Może się też zdarzyć, że przy jednym z podstawień natrafimy na całki trudne do wyliczenia, wtedy wybranie drugiego może dać prostsze całki.

6.2.3 Równania liniowe

Liniowym równaniem różniczkowym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

czyli równanie, w którym pochodna i funkcja niewiadoma są w pierwszej potędze. Po podzieleniu tego równania stronami przez $a_1(x)$ otrzymujemy równanie

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \tag{6.12}$$

Rozpatrzmy najpierw równanie liniowe nie zawierające wyrazu wolnego $q(x)$, czyli tzw. *równanie liniowe jednorodne*, przy sposobności zamieniamy oznaczenie zmiennej zależnej:

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z = 0.$$

Dostajemy równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dz}{z} = -p(x)dx,$$

które łatwo całkujemy

$$\ln|z| = \ln|C| - \int p(x)dx,$$

otrzymując

$$z(x) = C\,\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}. \tag{6.13}$$

Aby scałkować ogólne równanie liniowe (6.12), zastosujemy tzw. *metodę uzmiennienia stałej*, co oznacza, że wykorzytujemy rozwiązanie (6.13), w którym zamiast stałej C zapisujemy niewiadomą funkcję u:

$$y(x) = u(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}. \tag{6.14}$$

Różniczkujemy to wyrażenie

$$y'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} - p(x)u(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$$

i wstawiamy do równania (6.12):

$$u'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} - p(x)u(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} + p(x)u(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$u'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Oznaczywszy $P(x) = \int p(x)dx$ otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{du}{dx} = q(x)\mathrm{e}^{P(x)}. \tag{6.15}$$

Wyrażenie $\mu(x) = \mathrm{e}^{P(x)} = \mathrm{e}^{\int p(x)dx}$ nazywa się *czynnikiem całkującym* równania liniowego. Równanie (6.73) ma rozwiązanie wyrażone przez całkę nieoznaczoną

$$u(x) = C + \int q(x)\mathrm{e}^{P(x)}dx.$$

Teraz należy to wstawić do wzoru (6.72)

$$y(x) = \left[C + \int q(x)\mathrm{e}^{P(x)}dx\right]\mathrm{e}^{-P(x)}. \tag{6.16}$$

W ten sposób otrzymaliśmy ogólne rozwiązanie równania liniowego (6.12).

PRZYKŁAD 6. Rozwiążemy równanie

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6\mathrm{e}^x.$$

Jest ono liniowe pierwszego rzędu. Dzielimy je przez współczynnik przy pochodnej:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}\,y = x^5\mathrm{e}^x.$$

W tym przypadku $p(x) = -\frac{4}{x}$, skąd $P(x) = -4\ln|x|$. Znajdujemy czynnik całkujący

$$\mathrm{e}^{-4\int dx/x} = e^{-4\ln|x|} = \mathrm{e}^{\ln x^{-4}} = x^{-4}.$$

To możemy wstawić do wzoru (6.74):

$$y(x) = \left(C + \int x^5\mathrm{e}^x x^{-4}dx\right)x^4 = Cx^4 + \left(\int x\mathrm{e}^x dx\right)x^4.$$

Całkowanie przez części daje

$$y(x) = Cx^4 + (x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x)\,x^4 = Cx^4 + x^5\mathrm{e}^x - x^4\mathrm{e}^x.$$

PRZYKŁAD 7. Obwód elektryczny zawierający opór i samoindukcję. Jeśli obwód ma opór R i samoindukcję L, to spadek napięcia RI na oporze jest równy sumie zewnętrznej siły elektromotorycznej E oraz siły elektromotorycznej indukcji $-L(dI/dt)$:

$$RI = E - L\frac{dI}{dt}.$$

W takim razie natężenie prądu przepływającego przez obwód spełnia następujące równanie różniczkowe

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E,$$

Nazywa się ono *równaniem Helmholtza*. [Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) – niemiecki fizyk, fizjolog i filozof, z wykształcenia lekarz; największą jego zasługą było podanie matematycznej interpretacji zasady zachowania energii.] Po przekształceniu równania do postaci

$$\frac{dI}{dt} + \frac{RI}{L} = \frac{E}{L},$$

zauważamy, że $p(t) = \frac{R}{L}$, a funkcja pierwotna tego współczynnika wynosi $P(t) = \frac{R}{L}t$, więc czynnik całkujący ma postać $\mu(t) = \mathrm{e}^{(R/L)t}$. W takim razie zgodnie z wzorem (6.74) ogólne rozwiązanie zapiszemy jako

$$I(t) = \left[C + \int \frac{E}{L}\,\mathrm{e}^{(R/L)t}dt\right]\mathrm{e}^{-(R/L)t} = \left[C + \frac{E}{L}\frac{L}{R}\,\mathrm{e}^{(R/L)t}\right]\mathrm{e}^{-(R/L)t}$$

$$I(t) = C\mathrm{e}^{-(R/L)t} + \frac{E}{R}. \tag{6.17}$$

Teraz jest czas na warunki początkowe. Naturalne jest przyjmowanie, że chwila początkowa jest chwilą zamknięcia obwodu, czyli dla $t = 0$ prąd jeszcze nie płynie tzn. $I = 0$:

$$0 = C + \frac{E}{R}, \quad \text{skąd} \quad C = -\frac{E}{R}.$$

Wstawienie tego do (6.75) daje rozwiązanie szczególne

$$I(t) = \frac{E}{R}\left[1 - \mathrm{e}^{-(R/L)t}\right],$$

które opisuje narastanie prądu. Widzimy, że dla dużych czasów (czyli $t \to \infty$) natężenie prądu dąży do wartości stałej $I_{\max} = \frac{E}{R}$ odpowiadającej prawu Ohma.

To samo rozwiązanie nadaje się do rozważenia innej sytuacji, mianowicie wyłączenia napięcia. Otóż należy przyjąć $E = 0$, co daje rozwiązanie ogólne

$$I(t) = C\mathrm{e}^{-(R/L)t},$$

Teraz warunki początkowe są takie: $I = E/R$ przy $t = 0$, skąd $C = E/R$ i otrzymujemy rozwiązanie szczególne

$$I(t) = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-(R/L)t},$$

które opisuje wykładnicze zanikanie prądu.

Rozważane w tym przykładzie równanie Helmholtza przy stałej sile elektromotorycznej daje się też rozwiązać metodą rozdzielenia zmiennych, patrz zadanie na ćwiczenia. W następnym przykładzie już tak nie jest.

PRZYKŁAD 8. Obwód zawierający opór i samoindukcję z przyłożoną zmienną siłą elektromotoryczną. Załóżmy, że $E(t) = E_0 \sin \omega t$; mamy wtedy

$$RI = E_0 \sin \omega t - L\,\frac{dI}{dt}, \quad \text{czyli} \quad \frac{dI}{dt} + \frac{RI}{L} = \frac{E_0}{L}\sin \omega t.$$

Czynnik całkujący jest ten sam, co w poprzenim przykładzie: $\mu(t) = \mathrm{e}^{(R/L)t}$. W takim razie zgodnie z wzorem (6.74) ogólne rozwiązanie zapiszemy jako

$$I(t) = \left[C + \frac{E_0}{L}\int \mathrm{e}^{(R/L)t}\sin \omega t\, dt\right]\mathrm{e}^{-(R/L)t}. \tag{6.18}$$

Całkę nieoznaczoną $\int \mathrm{e}^{\lambda t}\sin \omega t\, dt$ z podstawieniem $\lambda = R/L$ wyliczymy przez części. Niech $u = \mathrm{e}^{\lambda t}$, $v' = \sin \omega t$, wtedy $u' = \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda t}$, $v = -\omega^{-1}\cos \omega t$:

$$\int \mathrm{e}^{\lambda t}\sin \omega t\, dt = -\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\lambda t}\cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega}\int \mathrm{e}^{\lambda t}\cos \omega t\, dt.$$

Do ostatniej całki też stosujemy całkowanie przez części:

$$\int \mathrm{e}^{\lambda t}\sin \omega t\, dt = -\frac{1}{\omega}\,\mathrm{e}^{\lambda t}\cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega}\left(\frac{1}{\omega}\,\mathrm{e}^{\lambda t}\sin \omega t - \frac{\lambda}{\omega}\int \mathrm{e}^{\lambda t}\sin \omega t\, dt\right)$$

$$= \frac{\lambda}{\omega^2}\,\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\omega t - \frac{1}{\omega}\,\mathrm{e}^{\lambda t}\cos\omega t - \frac{\lambda^2}{\omega^2}\int \mathrm{e}^{\lambda t}\sin\omega t\,dt.$$

Mnożymy równanie stronami przez ω^2 i przenosimy obie całki na jedną stronę:

$$\left(\omega^2+\lambda^2\right)\int \mathrm{e}^{\lambda t}\sin\omega t\,dt = \mathrm{e}^{\lambda t}(\lambda\sin\omega t - \omega\cos\omega t),$$

skąd znajdujemy

$$\int \mathrm{e}^{\lambda t}\sin\omega t\,dt = \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{(\omega^2+\lambda^2)}\,(\lambda\sin\omega t - \omega\cos\omega t).$$

Ten wynik należy wstawić do wzoru (6.18)

$$I(t) = \left[C + \frac{E_0}{L}\frac{\mathrm{e}^{(R/L)t}}{(\omega^2+\lambda^2)}\,(\lambda\sin\omega t - \omega\cos\omega t)\right]\mathrm{e}^{-(R/L)t},$$

$$I(t) = C\mathrm{e}^{-(R/L)t} + \frac{E_0}{L\,(\omega^2+\lambda^2)}\,(\lambda\sin\omega t - \omega\cos\omega t).$$

W ten sposób otrzymaliśmy ogólne rozwiązanie równania Helmholtza dla tego przypadku. Pierwszy wyraz opisuje prądy zanikające wykładniczo. Ponieważ jest w nim obecna stała całkowania, to służy on do spełniania warunków początkowych. Po dostatecznie długim czasie, tzn. długim w stosunku do $\lambda^{-1} = L/R$ (ta wielkość ma wymiar czasu) pozostaje natężenie prądu wyrażone następującą funkcją od czasu

$$\tilde{I}(t) = \frac{E_0}{L\,(\omega^2+\lambda^2)}\,(\lambda\sin\omega t - \omega\cos\omega t).$$

Widać, że jest to funkcja okresowa z częstością taką samą, z jaką zmienia się zewnętrzna siła elektromotoryczna. Tę zależność nazywa się *drganiem wymuszonym*.

6.2.4 Równania sprowadzalne do postaci liniowej

Równanie różniczkowe o postaci

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)y^n \tag{6.19}$$

można sprowadzić do równania liniowego przez podstawienie $y(x) = u(x)^{1/(1-n)}$. Mamy stąd

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\,u^{\frac{1}{1-n}-1}\frac{du}{dx} = \frac{1}{1-n}\,u^{\frac{n}{1-n}}\frac{du}{dx} \quad \text{oraz} \quad y^n = u^{\frac{n}{1-n}}.$$

Wstawiamy to do (6.76)

$$\frac{1}{1-n}\,u^{\frac{n}{1-n}}\frac{du}{dx} + f(x)u(x)^{1/(1-n)} = g(x)u^{n/(1-n)}.$$

Mnożymy to równanie stronami przez $u^{-n/(1-n)}$:

$$\frac{1}{1-n}\,\frac{du}{dx} + f(x)u = g(x),$$

a potem przez $1-n$:

$$\frac{du}{dx} + (1-n)f(x)u = (1-n)g(x).$$

Otrzymaliśmy równanie liniowe, które można rozwiązać opisaną już metodą. Równanie (6.76) nazywane jest *równaniem Bernoullego*. [Jacob Bernoulii (1654-1705) – matematyk szwajcarski; ten sam, którego wspominaliśmy przy nierówności Bernoullego. Wprowadził termin „integral" (całka).]

PRZYKŁAD 9. Rozwiążmy równanie

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2.$$

Mamy w nim $n = 2$. Zalecane podstawienie $y = u^{-1}$ daje równanie liniowe

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -x. \tag{6.20}$$

Współczynnik przy funkcji niewiadomej u ma postać $p(x) = -1/x$, jego całka nieoznaczona $P(x) = -\ln|x| = \ln|x|^{-1}$, więc czynnikiem całkującym, powiedzmy na dziedzinie $\mathbb{R}^+$ jest $e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}$. W takim razie według wzoru (6.74) rozwiązanie równania (6.77) zapiszemy

$$u(x) = \left(C - \int x\frac{1}{x}\,dx\right)x = (C-x)x.$$

wracamy do zmiennej y:

$$y(x) = u(x)^{-1} = \frac{1}{Cx - x^2}$$

i to jest rozwiązanie równania różniczkowego.

6.3 Równania liniowe rzędu drugiego

Liniowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu nazywamy równanie postaci

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x). \tag{6.21}$$

Twierdzenie 1. Jeśli funkcje p, q, r są ciągłe w pewnym przedziale $\langle a, b\rangle$, to istnieje rozwiązanie równania (6.21) w całym przedziale $\langle a, b\rangle$. Przy tym dla dowolnych α, $\beta \in \mathbb{R}$ istnieje tylko jedno rozwiązanie spełniające warunki początkowe

$$y(x_0) = \alpha,\ y'(x_0) = \beta \quad \text{dla} \quad x_0 \in \langle a, b\rangle. \tag{6.22}$$

Dowód – książka Smirnowa, str. 82.

Liniowym jednorodnym równaniem różniczkowym drugiego rzędu nazywamy równanie

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{6.23}$$

Lemat 1 – *zasada superpozycji*. Jeśli y_1 i y_2 są dwoma rozwiązaniami równania (6.23), to ich kombinacja liniowa

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

dla dowolnych stałych C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$ jest też rozwiązaniem.

Dowód. Skoro pochodna sumy jest sumą pochodnych, a stałe można wyciągnąć przed znak pochodnej, to zachodzą równości

$$y'(x) = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x), \qquad y''(x) = C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x).$$

Wstawiamy to do lewej strony wzoru (6.23):

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)$$

$$= C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) + p(x)[C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)] + q(x)[C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)].$$

Grupujemy wyrazy inaczej:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = C_1[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)]$$

$$+C_2[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)] = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Skoro otrzymaliśmy zero, to równanie (6.23) jest spełnione. ■

W szczególności funkcja tożsamościowo równa zero też jest rozwiązaniem. Możemy je nazwać *rozwiązaniem zerowym*. Zbiór o własnościach zapewnionych przez Lemat 1 (kombinacja liniowa elementów ze zbioru też należy do niego) nazywa się w algebrze *przestrzenią liniową* albo *lineałem*. Powiemy zatem, że zbiór rozwiązań jednorodnego liniowego równania różniczkowego drugiego rzędu jest lineałem.

Dwa rozwiązania y_1 i y_2 równania (6.23) nazywamy *liniowo niezależnymi*, jeśli związek

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$$

o stałych współczynnikach α_1, α_2 jest spełniony tylko przy obu stałych równych zero.

Do badania, czy dane dwie funkcje f_1, f_2 są liniowo niezależne, służy tzw. *wyznacznik Wrońskiego*:

$$W(f_1(x), f_2(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}. \tag{6.24}$$

[Józef Maria Hoene-Wroński (1776-1853) – filozof, matematyk, fizyk, prawnik i ekonomista. Uczestnik powstania kościuszkowskiego, od 1800 r. we Francji. Jego jedynym godnym uwagi wkładem do matematyki był wspomniany wyznacznik w literaturze angielskojęzycznej zwany *wronskianem*.]

Lemat 2. Niech funkcje f_1 i f_2 będą różniczkowalne na przedziale $I = \langle a, b\rangle$. Jeśli wyznacznik (6.24) jest niezerowy przynajmniej w jednym punkcie przedziału I, to funkcje f_1, f_2 są liniowo niezależne.

Dowód nie wprost. Załóżmy że $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) \neq 0$ dla pewnego $x_0 \in I$, ale f_1, f_2 są liniowo zależne. Wtedy istnieje niezerowa para liczb α_1, α_2 taka, że

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Jeśli $\alpha_1 \neq 0$, to dostajemy

$$f_1(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} f_2(x),$$

skąd także dla pochodnych zachodzi związek

$$f_1'(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} f_2'(x).$$

Wstawiamy to do wzoru (6.24):

$$W(f_1(x), f_2(x)) = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} f_2(x) & f_2(x) \\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} f_2'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}$$

Stwierdzamy, że pierwsza kolumna jest proporcjonalna do drugiej kolumny, a z teorii wyznaczników wiadomo, że taki wyznacznik jest zerem. Otrzymujemy sprzeczność z założeniem, co kończy dowód nie wprost. ■

PRZYKŁAD 1. Funkcje $f_1(x) = \sin^2 x$ oraz $f_2(x) = 1 - \cos 2x$ są liniowo zależne, bo istnieje tożsamość trygonometryczna $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, skąd dostajemy $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$. Wyliczmy wyznacznik Wrońskiego

$$W(f_1(x), f_2(x)) = \begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 - \cos 2x \\ 2\sin x \cos x & 2\sin 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 - \cos 2x \\ \sin 2x & 2\sin 2x \end{vmatrix}$$

$$= 2\sin^2 x \sin 2x - \sin 2x\,(1 - \cos 2x) = \sin 2x\,(2\sin^2 x - 1 + \cos 2x)$$

$$= \sin 2x\,(2\sin^2 x - 1 + \cos^2 x - \sin^2 x) = \sin 2x\,(\sin^2 x + \cos^2 x - 1) = 0.$$

PRZYKŁAD 2. Wybierzmy $f_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $f_2(x) = \mathrm{e}^{\kappa x}$, gdzie $\lambda \neq \kappa$ i wyliczmy wyznacznik Wrońskiego

$$W(f_1(x), f_2(x)) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\lambda x} & \mathrm{e}^{\kappa x} \\ \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} & \kappa \mathrm{e}^{\kappa x} \end{vmatrix} = \kappa \mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{\kappa x} - \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{\kappa x} = (\kappa - \lambda)\mathrm{e}^{(\lambda+\kappa)x}.$$

Skoro funkcja wykładnicza jest niezerowa dla każdego $x \in \mathbb{R}$, a $\kappa \neq \lambda$, to $W(f_1(x), f_2(x)) \neq 0$ dla każdego x, więc funkcje f_1 i f_2 są liniowo niezależne.

Twierdzenie 2. Jeśli f_1 i f_2 są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{6.25}$$

to przy odpowiednim doborze stałych C_1 i C_2 wzór

$$y(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) \tag{6.26}$$

daje rozwiązanie równania (6.25) spełniające dowolne warunki początkowe.

Dowód – książka Smirnowa, str. 83.

To twierdzenie mówi więc, że wszystkie rozwiązania równania różniczkowego (6.25) można otrzymać przez kombinacje liniowe tylko dwóch liniowo niezależnych rozwiązań tego równania. Ta własność w języku algebry wyrażana jest zdaniem: lineał rozwiązań równania (6.25) *ma wymiar dwa* albo *jest dwuwymiarowy*. To twierdzenie oznacza,

że szukanie rozwiązań jednorodnego równania liniowego (6.25) sprowadza się do znalezienia dwóch liniowo niezależnych rozwiązań f_1 i f_2, aby wzorem (6.26) wyrazić każde inne rozwiązanie. Dlatego para takich rozwiązań f_1, f_2 nazywa się *fundamentalnym układem rozwiązań* równania (6.25).

Lemat 3 – *wzór Abela.* Niech f_1, f_2 będą dwoma rozwiązaniami równania (6.25). Wtedy wyznacznik Wrońskiego można zapisać

$$W(f_1(x), f_2(x)) = W_0\, \mathrm{e}^{-P(x)}, \tag{6.27}$$

gdzie P jest funkcją pierwotną funkcji p, zaś W_0 jest pewną stałą.

[Niels Henrik Abel (1802–1829) – matematyk norweski, udowodnił m.in., że ogólne równanie piątego stopnia nie ma rozwiązań dających się wyrazić przez pierwiastki. Na jego cześć grupy przemienne nazywane są abelowymi.]

Dowód. Liczymy pochodną wyznacznika Wrońskiego $W(f_1, f_2) = f_1 f_2' - f_2 f_1'$:

$$\frac{dW}{dx} = f_1' f_2' + f_1 f_2'' - f_2' f_1' - f_2 f_1'' = f_1 f_2'' - f_2 f_1''.$$

Skoro f_i są rozwiązaniami równania (6.25), to możemy z niego wyliczyć drugie pochodne i wstawić do tego wzoru

$$\frac{dW}{dx} = f_1[-p(x)f_2' - q(x)f_2] - f_2[-p(x)f_1' - q(x)f_1]$$

$$= -p(x)f_1 f_2' - q(x)f_1 f_2 + p(x)f_2 f_1' + q(x)f_2 f_1 = p(x)(f_2 f_1' - f_1 f_2') = -p(x)W.$$

Otrzymujemy równanie różniczkowe pierwszego rzędu o zmiennych rozdzielonych,

$$\frac{dW}{W} = -p\, dx,$$

które ma rozwiązanie $W(x) = W_0\, \mathrm{e}^{-\int p(x)\, dx}$ zgodne z wzorem (6.27). ■

Z wzoru (6.27) wynika, że wyznacznik $W(f_1, f_2)$ albo jest tożsamościowo zerem, gdy stała W_0 jest zerem, albo jest niezerowy, bo funkcja wykładnicza nie zamienia się w zero.

Wyliczmy pochodną ilorazu dwóch rozwiązań:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = \frac{f_2' f_1 - f_2 f_1'}{{f_1}^2} = \frac{W(f_1, f_2)}{{f_1}^2}.$$

Wykorzystujemy wzór (6.27)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = W_0\, \frac{\mathrm{e}^{-P(x)}}{{f_1}^2}$$

i całkujemy otrzymaną równość

$$\frac{f_2}{f_1} = W_0 \int \frac{\mathrm{e}^{-P(x)}}{{f_1}^2}\, dx$$

otrzymując

$$f_2 = W_0\, f_1 \int \mathrm{e}^{-P(x)}\, \frac{dx}{{f_1}^2}\,. \tag{6.28}$$

Dzięki temu możemy stwierdzić, że jeśli mamy jedno rozwiązanie szczególne f_1 równania (6.23), to drugie rozwiązanie f_2 możemy otrzymać ze wzoru (6.28), gdzie W_0 jest stałą, którą możemy przyjąć równą jedności.

PRZYKŁAD 3. Rozważmy równanie różniczkowe

$$x^2y'' - 6xy' + 12y = 0.$$

Sprawdźmy, czy $f_1(x) = x^3$ jest jego rozwiązaniem. Otóż $f_1'(x) = 3x^2$, $f_1''(x) = 6x$; wstawiamy to do lewej strony równania

$$x^2 \cdot 6x - 6x \cdot 3x^2 + 12x^3 = 6x^3 - 18x^3 + 12x^3 = 0.$$

Zgadza się. Teraz zastosujemy przepis (6.28) dla znalezienia innego rozwiązania. Najpierw przepisujemy równanie tak, żeby współczynnik przy y'' był jedynką

$$y'' - \frac{6}{x}\,y' + \frac{12}{x^2}\,y = 0.$$

Mamy równanie w postaci (6.21). Znajdujemy

$$P(x) = -\int \frac{6dx}{x} = -6\ln|x| = -\ln x^6, \quad \mathrm{e}^{-P(x)} = \mathrm{e}^{\ln x^6} = x^6.$$

Podstawiamy to do (6.28)

$$f_2(x) = f_1(x)\int x^6\,\frac{dx}{x^6} = x^3 \cdot x = x^4.$$

Znaleźliśmy drugie rozwiązanie. Jest ono liniowo niezależne od pierwszego, co pozostawiam do samodzielnego sprawdzenia.

Należy zaznaczyć, że znalezienie choćby jednego rozwiązania f_1 w ogólnym przypadku, gdy p i q są dowolnymi funkcjami, nie jest łatwe. Sprawa staje się prostsza, gdy współczynniki przy funkcji i poszczególnych pochodnych są jednomianami o potęgach rosnących wraz z rzędem pochodnej, np.

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0. \tag{6.29}$$

Wtedy można szukać rozwiązania w postaci funkcji potęgowej $y(x) = x^\beta$. Mamy wtedy $y'(x) = \beta x^{\beta-1}$, $y''(x) = \beta(\beta-1)x^{\beta-2}$; wstawiamy to do równania

$$ax^2 \cdot \beta(\beta-1)x^{\beta-2} + bx \cdot \beta x^{\beta-1} + cx^\beta = a\beta(\beta-1)x^\beta + b\beta x^\beta + cx^\beta = [a\beta(\beta-1) + b\beta + c]x^\beta = 0.$$

Skoro ma to zachodzić dla dowolnych x z pewnej dziedziny, to musi być

$$a\beta(\beta-1) + b\beta + c = 0,$$

$$a\beta^2 + (b-a)\beta + c = 0.$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe na niewiadomą β. Jeśli ma ono rozwiązania β_1 β_2, to dają one dwa rozwiązania równania różniczkowego (6.29):

$$f_1(x) = x^{\beta_1}, \quad f_2(x) = x^{\beta_2}.$$

Jeśli $\beta_1 \neq \beta_2$, to te dwa rozwiązania są liniowo niezależne.

Wróćmy do równania niejednorodnego, czyli (6.21)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x). \tag{6.21}$$

Twierdzenie 3. Rozwiązanie ogólne równania (6.21) jest sumą rozwiązania szczególnego tegoż równania i rozwiązania ogólnego odpowiadającego mu równania jednorodnego.

Dowód. Niech u_1 będzie rozwiązaniem szczególnym równania (6.21), tzn.

$$u_1'' + p(x)u_1' + q(x)u_1 = r(x), \tag{6.30}$$

natomiast y rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{6.23}$$

Wprowadzamy sumę $u = y + u_1$ do lewej strony równania (6.21):

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = (y + u_1)'' + p(x)(y + u_1)' + q(x)(y + u_1)$$

$$= [y'' + p(x)y' + q(x)y] + [u_1'' + p(x)u_1' + q(x)u_1] = 0 + r(x) = r(x).$$

Widzimy, że funkcja u rzeczywiście spełnia równanie (6.21). Jeśli y wyrazimy przez dwa rozwiązania fundamentalne równania jednorodnego:

$$u = C_1 f_1 + C_2 f_2 + u_1,$$

to widzimy, że zawiera dwie stałe dowolne, więc jest rozwiązaniem ogólnym. ■

Teraz poznamy sposób znalezienia szczególnego rozwiązania równania (6.21) – jest to *metoda uzmienniania stałych*. Szukamy rozwiązania w postaci (6.26), gdzie zamiast dwóch stałych C_1, C_2 wstawiamy dwie funkcje niewiadome v_1, v_2:

$$u(x) = v_1(x)f_1(x) + v_2(x)f_2(x). \tag{6.31}$$

Mając nie jedną, lecz dwie szukane funkcje, możemy narzucić na nie oprócz równania (6.30) jeszcze jeden warunek

$$v_1'(x)f_1(x) + v_2'(x)f_2(x) = 0. \tag{6.32}$$

Różniczkujemy wzór (6.31)

$$u'(x) = v_1'(x)f_1(x) + v_1(x)f_1'(x) + v_2'(x)f_2(x) + v_2(x)f_2'(x)$$

i korzystamy z (6.32)

$$u'(x) = v_1(x)f_1'(x) + v_2(x)f_2'(x).$$

Liczymy drugą pochodną

$$u''(x) = v_1'(x)f_1'(x) + v_1(x)f_1''(x) + v_2'(x)f_2'(x) + v_2(x)f_2''(x).$$

Wstawiamy otrzymane wyrażenia do lewej strony równania (6.30)

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = [v_1'(x)f_1'(x) + v_1(x)f_1''(x) + v_2'(x)f_2'(x) + v_2(x)f_2''(x)]$$

$$+p(x)[v_1(x)f_1'(x) + v_2(x)f_2'(x)] + q(x)[v_1(x)f_1(x) + v_2(x)f_2(x)].$$

Grupujemy wyrazy inaczej i piszemy prawą stronę równania (6.30)

$$v_1(x)[f_1'' + p(x)f_1' + q(x)f_1] + v_2(x)[f_2'' + p(x)f_2' + q(x)f_2] + v_1'(x)f_1'(x) + v_2'(x)f_2'(x) = r(x).$$

Skoro f_1 i f_2 spełniają równanie jednorodne, to nawiasy prostokątne znikają i zostaje równanie

$$v_1'(x)f_1'(x) + v_2'(x)f_2'(x) = r(x). \tag{6.33}$$

Łącząc to z równaniem (6.32) mamy algebraiczny układ dwóch równań liniowych o dwóch niewiadowmych $v_1'(x)$, $v_2'(x)$. Wyznacznik układu równań (6.32,6.33) jest właśnie wyznacznikiem Wrońskiego. Skoro jest on niezerowy, to układ (6.32,6.33) ma jedyne rozwiązanie (jest to wiedza z algebry) $v_1'(x)$, $v_2'(x)$. Poprzez liczenie całek nieoznaczonych znajdujemy dwie funkcje $v_1(x), v_2(x)$.

PRZYKŁAD 4. Rozwiążemy równanie różniczkowe

$$x^2y'' - 6x\,y' + 12y = ax^5 + bx^4. \tag{6.34}$$

Zauważmy, że odpowiadające mu równanie jednorodne było rozważone w Przykładzie 3. Tam znaleźliśmy rozwiązania fundamentalne $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^4$. Ale gdy chcemy rozwiązać równanie niejednorodne, to najpierw musimy je zapisać w postaci (6.21) lub (6.30), czyli podzielić równanie (6.34) stronami przez x^2

$$y'' - \frac{6}{x}\,y' + \frac{12}{x^2}\,y = ax^3 + bx^2.$$

Według metody uzmienniania stałych powinniśmy rozwiązać układ dwóch algebraicznych równań liniowych (6.32,6.33), które teraz przyjmują postać

$$x^3v_1'(x) + x^4v_2'(x) = 0, \qquad 3x^2v_1'(x) + 4x^3v_2'(x) = ax^3 + bx^2.$$

Z pierwszego równania znajdujemy

$$v_1'(x) = -x\,v_2'(x) \tag{6.35}$$

i wstawiamy do drugiego

$$-3x^2 \cdot x\,v_2'(x) + 4x^3v_2'(x) = ax^3 + bx^2,$$

$$x^3v_2'(x) = ax^3 + bx^2, \qquad v_2'(x) = a + \frac{b}{x}.$$

Podstawienie tego do (6.35) daje

$$v_1'(x) = -ax - b.$$

Całkujemy oba rozwiązania

$$v_1(x) = -\frac{a}{2}\,x^2 - bx, \qquad v_2(x) = ax + b\ln x.$$

Skoro interesuje nas rozwiązanie szczególne, to nie piszemy stałych całkowania. W takim razie rozwiązanie szczególne ma postać

$$u(x) = v_1f_1 + v_2f_2 = \left(-\frac{a}{2}\,x^2 - bx\right)x^3 + (ax + b\ln x)\,x^4$$

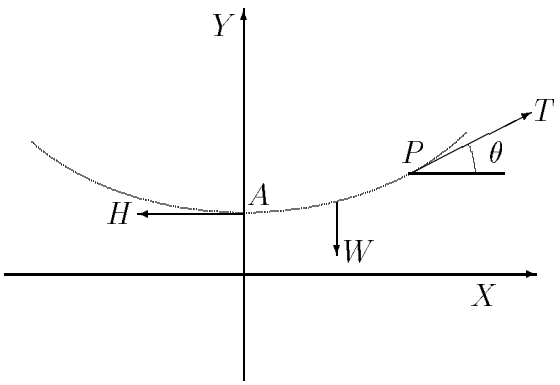
$$= -\frac{a}{2}\,x^5 - bx^4 + ax^5 + bx^4\ln x = \frac{a}{2}\,x^5 - bx^4 + bx^4\ln x.$$

Zapisujemy teraz ogólne rozwiązanie równania (6.34)

$$y(x) = C_1x^3 + C_2x^4 + \frac{a}{2}\,x^5 - bx^4 + bx^4\ln x = C_1x^3 + C_2'x^4 + \frac{a}{2}\,x^5 + bx^4\ln x.$$

Dwa następne przykłady dotyczą równań liniowych drugiego rzędu, ale bez wyrazów proporcjonalych do y' lub y. Wtedy rozwiązania znajduje się przez dwukrotne wyliczenie całek nieoznaczonych.

PRZYKŁAD 5. *Most wiszący.* Weźmy pod uwagę część wiszącego kabla między ustalonym punktem A i zmiennym punktem P (Rys. 6.1). Jest ona utrzymy-



Rysunek 6.1

wana w równowadze działaniem trzech sił: siły napięcia kabla w lewo H przyłożonej w punkcie A, siły napięcia kabla w prawo T przyłożonej w punkcie P oraz ciężaru W części AP lub ciężaru podtrzymywanego przez część AP. Punkt zaczepienia siły W nie musi wypadać w środku odcinka. Z warunku równowagi składowych pionowych i poziomych mamy

$$T\sin\theta = W, \qquad T\cos\theta = H,$$

a po podzieleniu stronami

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{W}{H}.$$

Jeśli linię oddającą kształt kabla uznamy za wykres funkcji $y(x)$, to z geometrycznej interpretacji pochodnej mamy

$$\operatorname{tg}\theta = \left[\frac{dy}{dx}\right]_P,$$

więc mamy równanie różniczkowe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{H},$$

gdzie x oznacza X-ową współrzędną punktu P, zaś W oznacza obciążenie między punktami A i P. Jeśli obciążenie W rośnie wraz z x-em, to rośnie też składowa pionowa siły T. Składowa pozioma nie rośnie, bo jest równoważona stale przez tę samą siłę H przyłożoną w punkcie A. Dlatego przyjmujemy, że H jest wielkością stałą, choć W rośnie wraz z x-em. Wtedy różniczkowanie stronami ostatniej równości daje

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w(x)}{H}, \tag{6.36}$$

gdzie $w = dW/dx$ jest obciążeniem na jednostkę poziomej odległości od punktu najniższego – tę funkcję można łatwiej znaleźć z warunków zagadnienia technicznego. W przypadku mostu wiszącego to obciążenie na jednostkę odległości jest stałe: $w(x) = \text{const}$, więc równanie (6.36) daje się łatwo scałkować w dwóch krokach:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{H}\,x + C_1, \qquad y(x) = \frac{w}{2H}\,x^2 + C_1 x + C_2.$$

Otrzymujemy równanie paraboli, więc mamy odpowiedź: kabel unoszący most wiszący układa się w kształcie fragmentu paraboli.

PRZYKŁAD 6. *Łańcuch zwisający pod własnym ciężarem.* W tym przykładzie także stosuje się równanie (6.36), ale w nie jest tu stałe. W tym przypadku stały jest stosunek dW/ds, czyli ciężar na jednostkę długości łacucha, bo zakładamy, że łańcuch jest na całej swojej długości jednakowy. Wprowadzamy oznaczenie $dW/ds = \lambda$, gdzie λ jest stałą. Wtedy $\frac{dW}{dx} = \frac{dW}{ds}\frac{ds}{dx}$, a skoro $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, skąd

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

to równanie (6.36) zapiszemy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\lambda}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{6.37}$$

Otrzymane równanie nie jest liniowe, ale rozwiążemy je poznając przy okazji nową metodę. Otóż w tym równaniu nie występuje sama funkcja $y(x)$, tylko jej pierwsza i druga pochodna, więc warto uznać pierwszą pochodną jako nową funkcję $u(x) = dy/dx$. Wtedy równanie (6.37) przyjmuje postać

$$\frac{du}{dx} = \frac{\lambda}{H}\sqrt{1 + u^2}.$$

Otrzymujemy równanie pierwszego rzędu o zmiennych rozdzielonych:

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{\lambda}{H}\,dx,$$

które daje się rozwiązać przez całkę nieoznaczoną:

$$\operatorname{ar\,sinh} u = \frac{\lambda}{H}\,x + C_1.$$

Jeśli początek układu współrzędnych wybierzemy w najniższym punkcie łańcucha, to oznacza $y'(0) = u(0) = 0$; stąd $C_1 = 0$ i ostatnią równość można zapisać inaczej

$$u(x) = \sinh\frac{\lambda}{H}x.$$

Wracamy do funkcji y:

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\frac{\lambda}{H}x.$$

To równanie znowu daje się rozwiązać przez całkę nieoznaczoną:

$$y(x) = \frac{H}{\lambda} \cosh \frac{\lambda}{H} x + C_2.$$

Ten sam warunek początkowy, co przedtem daje $C_2 = -\frac{H}{\lambda}$, więc otrzymujemy rozwiązanie

$$y(x) = \frac{H}{\lambda} \left(\cosh \frac{\lambda}{H} x - 1 \right).$$

Wykres tej funkcji znany jest pod nazwą *krzywej łańcuchowej*.

Przy rozwiązywaniu tego przykładu dowiedzieliśmy się, że jeśli w równaniu różniczkowym II rzędu nie występuje sama funkcja, lecz tylko jej dwie pochodne, to można szukać rozwiązania przez rozwiązywanie dwóch równań różniczkowych I rzędu.

6.3.1 Jednorodne równania liniowe o stałych współczynnikach

Na początek udowodnimy pewien wzór z rachunku różniczkowego przydatny w następnych zagadnieniach. Jeśli $\lambda \in \mathbb{R}$, to znamy następujący wzór na pochodną funkcji wykładniczej:

$$\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Wykażemy jego prawdziwość również wtedy, gdy $\lambda \in \mathbb{C}$, a x jest zwykłą zmienną rzeczywistą, tzn.

$$\left[\mathrm{e}^{(a+bi)x}\right]' = (a+bi)\,\mathrm{e}^{(a+bi)x}. \tag{6.38}$$

Korzystamy z definicji funkcji wykładniczej o wykładniku zepolonym:

$$\mathrm{e}^{(a+bi)x} = \mathrm{e}^{a\,x}\,\mathrm{e}^{ibx} = \mathrm{e}^{a\,x}\,(\cos bx + i \sin bx).$$

Różniczkujemy ten iloczyn

$$\left[\mathrm{e}^{(a+bi)x}\right]' = a\,\mathrm{e}^{a\,x}\,(\cos bx + i \sin bx) + b\,\mathrm{e}^{a\,x}\,(-\sin bx + i \cos bx).$$

Przed drugi nawias wyciągamy i i bierzemy pod uwagę to, że $1/i = -i$:

$$\left[\mathrm{e}^{(a+bi)x}\right]' = a\,\mathrm{e}^{a\,x}\,(\cos bx + i \sin bx) + bi\,\mathrm{e}^{a\,x}\,(i \sin bx + \cos bx)$$

$$(a+bi)\,\mathrm{e}^{a\,x}\,(\cos bx + i \sin bx) = (a+bi)\,\mathrm{e}^{(a+bi)x},$$

a to właśnie jest równość (6.38), którą mieliśmy udowodnić. ■

Zajmiemy się teraz rozwiązaniem jednorodnego równania liniowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach:

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{6.39}$$

gdzie p, q są liczbami danymi. Podstawmy do tego równania funkcję postaci

$$y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}, \tag{6.40}$$

gdzie λ jest szukaną liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Wstawienie pierwszej i drugiej pochodnej oraz samej funkcji (6.40) do (6.39) daje

$$\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} + p\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x} + q\,\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0.$$

Skoro funkcja wykładnicza jest niezerowa, to otrzymujemy równanie kwadratowe

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \tag{6.41}$$

które nazywamy *równaniem charakterystycznym* równania (6.39). Jeśli to równanie ma dwa różne rozwiązania $\lambda_1 \neq \lambda_2$, to wzór (6.40) daje dwa liniowo niezależne rozwiązania równania różniczkowego

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \quad \text{oraz} \quad f_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}. \tag{6.42}$$

Lemat 4. Jeśli wielomian (6.41) o współczynnikach rzeczywistych ma rozwiązanie zespolone $\lambda = a + bi$, to ma również rozwiązanie zespolono sprzężone $\lambda^* = a - bi$.

Dowód. Weźmy zespolone sprzężenie równania (6.41):

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)^* = (\lambda^2)^* + (p\lambda)^* + q^* = (\lambda^*)^2 + p^*\lambda^* + q^* = 0.$$

Skoro liczby p, q są rzeczywiste, to $p^* = p$, $q^* = q$ i otrzymujemy

$$(\lambda^*)^2 + p\lambda^* + q = 0.$$

A to oznacza, że liczba λ^* też jest rozwiązaniem równania (6.41). ■

Przypadek, kiedy równanie kwadratowe (6.41) ma dwa jednakowe pierwiastki, wymaga osobnego rozpatrzenia. Zachodzi to wtedy, gdy jego wyróżnik jest zerem: $\Delta = p^2 - 4q = 0$, a wówczas pojedynczy pierwiastek wyraża się wzorem

$$\lambda = -\frac{p}{2}. \tag{6.43}$$

W takim przypadku według wzoru (6.40) potrafimy utworzyć tylko jedno rozwiązanie $f_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{-px/2}$, a drugie rozwiązanie wyliczymy według wzoru (6.28):

$$f_2(x) = f_1(x) \int \mathrm{e}^{-P(x)} \frac{dx}{{f_1}^2} = f_1(x) \int \mathrm{e}^{-px} \frac{dx}{\mathrm{e}^{-px}} = f_1(x) \int dx = x\,\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Zatem w przypadku jednakowych pierwiastków równania kwadratowego (6.41) mamy następujące dwa liniowo niezależne rozwiązania równania (6.39):

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \quad \text{oraz} \quad f_2(x) = x\,\mathrm{e}^{\lambda x}. \tag{6.44}$$

Przekonajmy się przez sprawdzenie, że f_2 jest rzeczywiście rozwiązaniem równania. Pochodne wynoszą

$$f_2'(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} + x\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \quad f_2''(x) = 2\lambda\mathrm{e}^{\lambda x} + x\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Podstawiamy to do równania (6.39):

$$2\lambda\mathrm{e}^{\lambda x} + x\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x} + p\left(\mathrm{e}^{\lambda x} + x\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x}\right) + qx\,\mathrm{e}^{\lambda x} = x\,\mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) + \mathrm{e}^{\lambda x}(2\lambda + p).$$

Pierwszy nawias po prawej stronie jest zerem, ponieważ λ jest pierwiastkiem równania (6.41), drugi nawias jest zerem na mocy (6.43), tak więc rzeczywiście f_2 jest rozwiązaniem równania (6.39).

Przyjmujemy, że współczynniki p i q są liczbami rzeczywistymi. Aliści przy rozwiązaniu równania kwadratowego (6.41) pierwiastki mogą okazać się zespolone. Jeśli równanie (6.41) ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, to wzór (6.42) daje dwa liniowo niezależne rozwiązania rzeczywiste i rozwiązanie ogólne równania przyjmuje postać

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}. \tag{6.45}$$

Jeśli równanie (6.41) ma pierwiastki zespolone, to na mocy Lematu 4 muszą one być do siebie sprzężone, więc wzory (6.42) dają rozwiązania

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{(a+\beta i)x} = \mathrm{e}^{a x}(\cos \beta x + i \sin \beta x),$$

$$f_2(x) = \mathrm{e}^{(a-\beta i)x} = \mathrm{e}^{a x}(\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

Rozwiązanie ogólne takiego równania przyjmuje więc postać

$$f(x) = C_1 \mathrm{e}^{(a+\beta i)x} + C_2 \mathrm{e}^{(a-\beta i)x} = \mathrm{e}^{a x} \left(C_1 \mathrm{e}^{i\beta x} + C_2 \mathrm{e}^{-i\beta x} \right), \tag{6.46}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{a x} \left[C_1 (\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2 (\cos \beta x - i \sin \beta x) \right] \\ &= \mathrm{e}^{a x} \left[C_1 \cos \beta x + C_1 i \sin \beta x + C_2 \cos \beta x - C_2 i \sin \beta x \right] \\ &= \mathrm{e}^{a x} \left[(C_1 + C_2) \cos \beta x + i (C_1 - C_2) \sin \beta x \right] = \mathrm{e}^{a x} [A \cos \beta x + B \sin \beta x]. \end{aligned}$$

Widzimy, że rozwiązanie ogólne jest kombinacją liniową dwóch rozwiązań rzeczywistych

$$\frac{1}{2}(f_1 + f_2) = \mathrm{e}^{a x} \cos \beta x, \quad \frac{1}{2i}(f_1 - f_2) = \mathrm{e}^{a x} \sin \beta x.$$

Te dwa rozwiązania są również liniowo niezależne, więc mogą tworzyć układ fundamentalny. W takim razie stwierdzamy, że w przypadku, gdy równanie (6.41) ma pierwiastki zepolone $\lambda_{1,2} = a \pm \beta i$, rozwiązanie ogólne równania (6.39) przyjmuje postać

$$y(x) = \mathrm{e}^{a x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x). \tag{6.47}$$

W szczególnym przypadku, gdy $C_2 = C_1^*$, stałe $A = C_1 + C_2$ oraz $B = i(C_1 - C_2)$ są rzeczywiste – wtedy rozwiązanie (6.47) jest rzeczywiste.

Wreszcie, jeśli równanie (6.41) ma jedno podwójne rozwiązanie λ, to na mocy (6.44) rozwiązanie ogólne równania różniczkowego przyjmuje postać

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{\lambda x}. \tag{6.48}$$

PRZYKŁAD 7. *Oscylator harmoniczny.* Rozpatrzmy jednowymiarowy ruch ciała o masie $m$pod wpływem siły sprężystej proporcjonalnej do wychylenia

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx,$$

gdzie stała sprężystości jest dodatnia: $k > 0$. Znak minus po prawej stronie oznacza, że siła jest nawracająca, czyli dąży do cofnięcia ciała do położenia równowagi. Wprowadziwszy nowy parametr $\omega^2 = k/m$ zapisujemy to równanie w innej postaci:

$$x'' + \omega^2 x = 0.$$

Otrzymujemy liniowe jednorodne równanie różniczkowe dugiego rzędu postaci (6.39). Wiemy, że powinniśmy teraz rozwiązać równanie charakterystyczne (6.41), które przyjmuje postać

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

Ma ono dwa rozwiązania urojone:

$$\lambda_1 = i\omega, \qquad \lambda_2 = -i\omega.$$

Skoro nie ma w nich części rzeczywistej, to w rozwiązaniu ogólnym (6.47) nie ma czynnika wykładniczego:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \tag{6.49}$$

Rozpatrzmy dwa typy warunków początkowych.

a) Wychylenie bez prędkości początkowej: $x(0) = a,\ x'(0) = 0$. Wstawienie tego do rozwiązania (6.49) daje $C_1 = a,\ C_2 = 0$, więc wtedy rozwiązanie szczególne ma postać

$$x(t) = a \cos \omega t$$

i widzimy, że wychlyenie początkowe jest amlitudą drgań.

b) Pchnięcie z położenia równowagi: $x(0) = 0,\ x'(0) = v_0$. Wstawienie tego do rozwiązania (6.49) daje $C_1 = 0,\ C_2 = v_0/\omega$ i rozwiązanie szczególne

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Zauważamy, że amplituda jest proporcjonalna do prędkości początkowej.

W przypadku obu stałych całkowania różnych od zera ruch (6.49) też da się sprowadzić do drgania harmonicznego, ale z przesuniętą fazą. Trzeba wprowadzić nowy parametr α poprzez wzory

$$\cos \alpha = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \qquad \sin \alpha = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$$

i zapisać rozwiązanie (6.49) inaczej:

$$x(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin \omega t \right)$$

$$= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\cos \alpha \cos \omega t + \sin \alpha \sin \omega t \right) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cos(\omega t - \alpha). \tag{6.50}$$

Tak więc widzimy już zapowiadane drganie harmoniczne z amplitudą $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ i fazą cofniętą o kąt α względem drgania z przypadku a.

PRZYKŁAD 8. *Oscylator hamoniczny z tłumieniem.* Rozpatrzmy teraz ruch ciała pod wpływem dwóch sił: tej samej co przedtem siły sprężystości oraz siły oporu proporcjonalnej do prędkości i ze zwrotem przeciwnym do prędkości:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt},$$

gdzie $b > 0$. Po wprowadzeniu nowego parametru $\kappa = b/2m$ równanie to można zapisać inaczej:

$$x'' + 2\kappa x' + \omega^2 x = 0. \tag{6.51}$$

Nadal mamy liniowe jednorodne równanie różniczkowe dugiego rzędu postaci (6.39). Rozwiązujemy równanie charakterystyczne (6.41), które przyjmuje postać

$$\lambda^2 + 2\kappa\lambda + \omega^2 = 0.$$

Ma ono dwa rozwiązania:

$$\lambda_1 = -\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}, \qquad \lambda_2 = -\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}.$$

Te rozwiązania mogą być rzeczywiste lub zespolone zależnie od znaku wyrażenia pod pierwiastkiem. Jeśli siła oporu jest mała, tzn. jeśli $\kappa < \omega$, to wyrażenie pod znakiem pierwiastka jest ujemne i warto wprowadzić nowy parametr $\tilde{\omega}^2 = \omega^2 - \kappa^2$. Wtedy rozwiązania równania charakterystycznego zapiszemy

$$\lambda_1 = -\kappa + \sqrt{-\tilde{\omega}^2} = -\kappa + i\tilde{\omega}, \quad \lambda_2 = -\kappa - \sqrt{-\tilde{\omega}^2} = -\kappa - i\tilde{\omega}.$$

Stosownie do tego rozwiązanie ogólne (6.47) równania różniczkowego należy zapisać

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\kappa t}(C_1 \cos\tilde{\omega}t + C_2 \sin\tilde{\omega}t). \tag{6.52}$$

Wykonując przekształcenia podobne do tych, które pozwoliły przejść od wzoru (6.49) do (6.50), możemy tę funkcję zapisać jako

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\kappa t}\sqrt{C_1^2 + C_2^2}\cos(\tilde{\omega}t - \alpha)$$

z kątem α określonym tak samo, jak w Przykładzie 7. Widzimy, że jest to drganie harmoniczne z amplitudą $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}\,\mathrm{e}^{-\kappa t}$ malejącą wykładniczo z czasem – stąd jego nazwa: *drganie tłumione*. Widzimy też, że częstość kołowa $\tilde{\omega}$ tych drgań jest mniejsza, niż częstość kołowa ω drgań oscylatora bez tłumienia.

PRZYKŁAD 9. *Rozładowanie kondensatora.* Rozważmy rozładowanie kondensatora o pojemności C przez obwód o oporze R i samoindukcji L. Wychodzimy od przyrównania spadku napięcia RI na oporze do sumy napięcia $U = Q/C$ na okładkach kondensatora i siły elektromotorycznej indukcji $-LdI/dt$:

$$RI = \frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt}.$$

Istnieje jeszcze związek między ładunkiem Q na jednej z okładek kondensatora a natężeniem prądu $I = -dQ/dt$, więc to równanie przepiszemy jako

$$-R\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2}.$$

Otrzymujemy więc jednorodne liniowe równanie różniczkowe II rzędu

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = 0.$$

Widzimy w tym formalne podobieństwo do równania (6.51) oscylatora harmonicznego z tłumieniem z podstawieniami $\kappa = R/2L$, $\omega^2 = 1/LC$. Widzimy, że gdyby nie było oporu elektrycznego, to nie byłoby tłumienia i drgania miałaby stałą amplitudę. W obecności oporu nie za dużego, tzn. dla $\kappa < \omega$ (czyli $R < 2\sqrt{L/C}$) występują drgania tłumione z częstością kołową

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \kappa^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

6.3.2 Niejednorodne równania liniowe o stałych współczynnikach

Zajmijmy się równaniem niejednorodnym postaci

$$y'' + py' + qy = r(x), \tag{6.53}$$

gdzie p, q są jak poprzednio liczbami rzeczywistymi, a r jest daną funkcją zmiennej x. Dla znalezienia rozwiązania ogólnego tego równania wystarczy znaleźć jego rozwiązanie szczególne i dodać do rozwiązania ogólnego odpowiadającego mu równania jednorodnego (6.39). A rozwiązanie szczególne można znaleźć metodą uzmienniania stałych. Przerobimy to na przykładzie równania oscylatora harmonicznego z siłą wymuszającą, tzn.

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = r(t).$$

Odwołujemy się do rozwiązania ogólnego (6.49) równania jednorodnego i szukamy rozwiązania szczególnego równania (6.53) w postaci

$$u(t) = v_1(t)\cos\omega_0 t + v_2(t)\sin\omega_0 t \tag{6.54}$$

z dwiema szukanymi funkcjami v_1, v_2. Równania (6.32,6.33) dają w tym przypadku układ dwóch równań

$$v_1'\cos\omega_0 t + v_2'\sin\omega_0 t = 0,$$
$$-v_1'\sin\omega_0 t + v_2'\cos\omega_0 t = \frac{r(t)}{\omega_0}.$$

Ma on rozwiązania

$$v_1'(t) = -\frac{1}{\omega_0} r(t)\sin\omega_0 t, \quad v_2'(t) = \frac{1}{\omega_0} r(t)\cos\omega_0 t.$$

Funkcje pierwotne można zapisać w postaci całek oznaczonych ze zmienną górną granicą całkowania:

$$v_1(t) = -\frac{1}{\omega_0}\int_{t_0}^{t} r(\tau)\sin\omega_0\tau\, d\tau, \quad v_2(t) = \frac{1}{\omega_0}\int_{t_0}^{t} r(\tau)\cos\omega_0\tau\, d\tau,$$

gdzie t_0 jest pewną liczbą ustaloną. Podstawmy to do wzoru (6.54):

$$u(t) = -\frac{\cos\omega_0 t}{\omega_0}\int_{t_0}^{t} r(\tau)\sin\omega_0\tau\, d\tau + \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\int_{t_0}^{t} r(\tau)\cos\omega_0\tau\, d\tau \tag{6.55}$$

$$= \frac{1}{\omega_0}\int_{t_0}^{t} r(\tau)(\sin\omega_0 t\cos\omega_0\tau - \cos\omega_0 t\sin\omega_0\tau)\,d\tau = \frac{1}{\omega_0}\int_{t_0}^{t} r(\tau)\sin\omega_0(t-\tau)\,d\tau.$$

Trzeba tu zwrócić uwagę na pewną rzecz. Zmienna t występuje w całce w dwojakiej roli. Po pierwsze t jest jest górną granicą całki oznaczonej, a po drugie występuje pod znakiem całki nie jako zmienna całkowania, lecz jako dodatkowy parametr, który przy całkowaniu względem τ uważamy za stały. Możemy się przekonać, że rozwiązanie szczególne (6.55) spełnia zerowe warunki początkowe:

$$u(t_0) = 0, \qquad u'(t_0) = 0.$$

W takim razie rozwiązanie ogólne równania (6.54) przyjmuje postać

$$y(t) = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0}\int_{t_0}^{t} r(\tau)\sin\omega_0(t-\tau)\,d\tau.$$

PRZYKŁAD 7a. *Oscylator harmoniczny z harmoniczną siłą wymuszającą.* Wracamy do jednowymiarowego ruchu ciała pod wpływem siły sprężystej proporcjonalnej do wychylenia, ale tym razem z działającą dodatkowo okresową siłą zewnętrzną:

$$x'' + \omega_0^2 x = g\cos\omega t. \tag{6.56}$$

W tym równaniu występują dwie częstości kołowe: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ odpowiadająca drganiom własnym oscylatora oraz ω, z jaką zmienia się siła zewnętrzna. Tym razem zrezygnujemy z szukania rozwiązania szczególnego w postaci (6.55) i poszukamy go w postaci drgań z częstością siły zewnętrznej:

$$u(t) = A\cos\omega t.$$

Liczymy pochodne tej funkcji

$$u'(t) = -A\omega\sin\omega t, \qquad u''(t) = -A\omega^2\cos\omega t$$

i wstawiamy do równania (6.56):

$$-A\omega^2\cos\omega t + \omega_0^2 A\cos\omega t = g\cos\omega t,$$

$$A\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\omega t = g\cos\omega t.$$

Skoro ma to zachodzić dla wszystkich czasów t, to musi być spełniona równość

$$A\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) = g.$$

Jeśli $\omega \neq \omega_0$, to otrzymujemy

$$A = \frac{g}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Zatem rozwiązanie szczególne ma postać

$$u(t) = \frac{g}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t. \tag{6.57}$$

Teraz możemy zapisać rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (6.56)

$$x(t) = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{g}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t.$$

Widzimy, że jest ono złożeniem dwóch drgań: jednego z częstością ω_0 odpowiadającą samemu oscylatorowi (nazywamy ją *częstością własną*) oraz drugiego z częstością ω siły zewnętrznej, które nazywamy drganiem wymuszonym. Amplituda tego drugiego nie zależy od warunków początkowych i wyraźnie rośnie, gdy częstość siły wymuszającej zbliża się do częstości własnej oscylatora. Odpowiada to zjawisku rezonansu.

PRZYKŁAD 8a. *Oscylator z tłumieniem i harmoniczną siłą wymuszającą.* Rozważamy ruch ciała pod wpływem trzech sił: siły sprężystości, siły oporu oraz okresowej siły zewnętrznej:

$$x'' + 2\kappa x' + \omega_0^2 x = g\cos\omega t. \tag{6.58}$$

Teraz poznamy wybieg często stosowany w fizyce. Zastępujemy wyraz określający siłę przez wyrażenie zespolone

$$g\mathrm{e}^{i\omega t} = g(\cos\omega t + i\sin\omega t),$$

a po znalezieniu rozwiązania weźmiemy jego część rzeczywistą, bo w równaniu (6.58) stoi część rzeczywista tej zespolonej siły. W takim razie rozwiązania szukamy w postaci zespolonej funkcji okresowej o okresie siły zewnętrznej

$$z(t) = Z_0\mathrm{e}^{i\omega t}. \tag{6.59}$$

Wstawiamy pochodne tej funkcji do równania (6.58):

$$-\omega^2 Z_0\mathrm{e}^{i\omega t} + 2\kappa i\omega Z_0\mathrm{e}^{i\omega t} + \omega_0^2 Z_0\mathrm{e}^{i\omega t} = g\mathrm{e}^{i\omega t}.$$

Po uproszczeniu stronami przez funkcję wykładniczą zostaje

$$-\omega^2 Z_0 + 2\kappa i\omega Z_0 + \omega_0^2 Z_0 = g.$$

Stąd wyliczamy stałą Z_0

$$Z_0 = \frac{g}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\kappa\omega}.$$

Mnożymy licznik i mianownik przez sprzężenie mianownika:

$$Z_0 = \frac{g(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\kappa\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}.$$

Wstawiamy to do wzoru (6.59)

$$z(t) = \frac{g(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\kappa\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}(\cos\omega t + i\sin\omega t).$$

Mnożymy oba nawiasy zespolone, aby lepiej zobaczyć część rzeczywistą całości

$$z(t) = \frac{g}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}\left[(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\kappa\omega\sin\omega t - 2i\kappa\omega\cos\omega t + i(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\omega t\right].$$

Teraz już możemy wskazać część rzeczywistą tego rozwiązania:

$$u(t) = \frac{g}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}\left[(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\kappa\omega\sin\omega t\right].$$

I to uznajemy za szczególne rozwiązanie równania różniczkowego (6.58). Jeśli zapiszemy to inaczej

$$u(t) = \frac{g}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}}\left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}}\cos\omega t + \frac{2\kappa\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}}\sin\omega t\right]$$

i wprowadzimy kąt α poprzez wzory

$$\cos\alpha = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{2\kappa\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}},$$

to możemy wprowadzić przesunięcie fazowe

$$u(t) = \frac{g}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}}(\cos\alpha\cos\omega t + \sin\alpha\sin\omega t),$$

$$u(t) = \frac{g}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}}\cos(\omega t - \alpha).$$

Widzimy teraz wyraźnie, że jest to drganie w rytmie siły wymuszającej, ale z pewnym przesunięciem fazowym. Amplituda tych drgań jest zadana przez stałe występujące w równaniu i nie zależy od warunków początkowych. Zuważmy, że dla nieobecnej siły tłumiącej, czyli $\kappa = 0$ to rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania (6.57).

Teraz możemy zapisać ogólne rozwiązanie równania niejednorodnego (6.58) z wykorzystaniem rozwiązania ogólnego (6.52):

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\kappa t}(C_1\cos\tilde{\omega}t + C_2\sin\tilde{\omega}t) + \frac{g}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}}\cos(\omega t - \alpha).$$

Widzimy, że jest ono złożeniem dwóch drgań: jednego z częstością $\tilde{\omega}$ i z zanikającą amplitudą oraz drugiego z częstością siły zewnętrznej, które ma stałą amplitudę. Z powodu czynnika wykładniczego pierwsze drganie bardzo szybko zanika i praktycznie pozostaje tylko drganie wymuszone. Jego amplituda jest dana wzorem

$$A(\omega) = \frac{g}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}}.$$

i wyraźnie zależy od częstości drgań siły wymuszającej. Jak można się przekonać przez wyliczenie pochodnej, jest ona największa dla $\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\kappa^2}$, wtedy wynosi ona

$$A(\omega_r) = \frac{g}{2\kappa\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}}.$$

Jest to zjawisko rezonansu. Proszę zauważyć, że gdyby nie było tłumienia, czyli byłoby $\kappa = 0$, to w przypadku rezonansu byłaby katastrofa – amplituda stałaby się nieskończona dla $\omega = \omega_0$.

6.4 Równania liniowe wyższych rzędów

Równania liniowe rzędów wyższych mają wiele własności rozwiązań rzędu drugiego. Sformułujemy je tutaj nie podając dowodów.

Liniowym jednorodnym równaniem różniczkowym rzędu n nazywamy równanie postaci

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ \ldots\ + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{6.60}$$

Zasada superpozycji. Jeśli y_1, y_2, ... y_k są rozwiązaniami tego równania, to przy dowolnych stałych C_1, C_2, ... C_k kombinacja liniowa

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \ \ldots\ + C_ky_k$$

jest również rozwiązaniem. Dowód tego zdania wygląda tak samo, jak dowód Lematu 1 z poprz. paragrafu. W takim razie zbiór rozwiązań jednorodnego liniowego równania różniczkowego jest lineałem.

Rozwiązania $y_1, y_2, \ldots, y_k$ równania (6.60) nazywamy *liniowo niezależnymi*, jeśli związek

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_k y_k = 0, \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$$

o stałych współczynnikach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ jest spełniony tylko przy wszystkich stałych równych zero.

Do badania, czy dane funkcje $f_1, f_2, \ldots f_k$ są liniowo niezależne, służy *wyznacznik Wrońskiego*:

$$W(f_1(x), f_2(x), \ldots f_k(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_k(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_k'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \ldots & f_k''(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(k-1)}(x) & f_2^{(k-1)}(x) & \ldots & f_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Jeśli $W(f_1(x), f_2(x), \ldots f_k(x)) \neq 0$ przynajmniej w jednym punkcie x, to funkcje $f_1, f_2, \ldots f_k$ są liniowo niezależne.

Jeśli $f_1, f_2, \ldots f_n$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania (6.60), to wzór

$$y = C_1 f_1 + C_2 f_2 + \ldots + C_n f_n$$

z dowolnymi stałymi $C_1, C_2, \ldots C_n$ daje wszystkie rozwiązania tego równania. To oznacza, że lineał rozwiązań równania (6.60) ma wymiar n. Dobierając stałe C_i możemy otrzymać jedno i tylko jedno rozwiązanie spełniające dowolnie zadane warunki początkowe:

$$y(x_0) = \alpha_1, \quad y'(x_0) = \alpha_2, \quad y''(x_0) = \alpha_3, \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x) = \alpha_n.$$

Liniowe niejednorodne równanie różniczkowe rzędu n ma postać

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = r(x). \tag{6.61}$$

Jeśli u_1 jest jakimkolwiek szczególnym rozwiązaniem tego równania, a $f_1, f_2, \ldots f_n$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami odpowiadającego mu równania (6.60), to wzór

$$y = C_1 f_1 + C_2 f_2 + \ldots + C_n f_n + u_1$$

z dowolnymi stałymi $C_1, C_2, \ldots C_n$ daje ogólne rozwiązanie równania (6.61). Poza tym, jeśli znamy liniowo nieazależne rozwiązania $f_1, f_2, \ldots f_n$, to szczególne rozwiązanie równania (6.61) można otrzymać według wzoru

$$u = v_1(x) f_1 + v_2(x) f_2 + \ldots + v_n(x) f_n,$$

gdzie funkcje v_i wyznaczamy z algebraicznego układu równań liniowych

$$v_1'(x) f_1 + v_2'(x) f_2 + \ldots + v_n'(x) f_n = 0,$$

$$\begin{aligned} v_1'(x)f_1' &+ v_2'(x)f_2' + \ .. \ + v_n'(x)f_n' = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_1'(x)f_1^{(n-2)} &+ v_2'(x)f_2^{(n-2)} + \ .. \ + v_n'(x)f_n^{(n-2)} = 0, \\ v_1'(x)f_1^{(n-1)} &+ v_2'(x)f_2^{(n-1)} + \ .. \ + v_n'(x)f_n^{(n-1)} = r(x). \end{aligned}$$

Szczególnym przypadkiem jest równanie liniowe o stałych współczynnikach; najpierw jednorodne

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ .. \ + a_{n-1}y' + a_n y = 0, \tag{6.62}$$

a potem niejednorodne

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ .. \ + a_{n-1}y' + a_n y = r(x).$$

Rozwiązania równania (6.62) szuka się w postaci wykładniczej $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, wtedy otrzymuje się następujące *równanie charakterystyczne* równania (6.62):

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ .. \ + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{6.63}$$

Jeśli to równanie ma n różnych pierwiastków $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...\,\lambda_n$, czyli da się zapisać

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdot\cdot\cdot(\lambda - \lambda_n) = 0,$$

to istnieje n niezależnych liniowo rozwiązań w postaci wykładniczej

$$f_i(x) = \mathrm{e}^{\lambda_i x}, \quad i \in \{1, ..., n\}. \tag{6.64}$$

Jeśli natomiast równanie charakterystyczne ma pierwiastki wielokrotne $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...\lambda_m$, czyli da się zapisać

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\cdot\cdot\cdot(\lambda - \lambda_m)^{k_m} = 0,$$

z krotnościami $k_1,\ k_2\ ...\ k_m$ spełniającymi warunek

$$k_1 + k_2 + \ \ldots \ + k_m = n, \tag{6.65}$$

to oprócz rozwiązań postaci (6.64) istnieją jeszcze rozwiązania postaci

$$f_i(x) = P_{k_i-1}(x)\mathrm{e}^{\lambda_i x}, \quad i \in \{1, ..., m\}. \tag{6.66}$$

gdzie P_{k_i-1} jest wielomianem stopnia $\leq k_i - 1$ o dowolnych wpółczynnikach. Z powodu dowolności współczynników mogą wystąpić różne takie wielomiany, wśród nich mogą być liniowo niezależne w liczbie nie większej niż k_i. Zbiór takich wielomianów jest więc lineałem o wymiarze k_i. Dodając wszystkie rozwiązania (6.66) otrzymujemy ogólne rozwiązanie równania (6.62):

$$y(x) = P_{k_1-1}(x)\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + P_{k_2-1}(x)\mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \ \ldots \ + P_{k_m-1}(x)\mathrm{e}^{\lambda_m x} = \sum_{i=1}^{m} P_{k_i-1}(x)\mathrm{e}^{\lambda_i x}. \tag{6.67}$$

Każdy wielomian P_{k_i-1} o dowolnych współczynnikach zawiera k_i dowolnych stałych, zatem na mocy związku (6.65) rozwiązanie (6.67) zawiera ogółem n dowolnych stałych.

Wśród pierwiastków równania (6.63) o współczynnikach rzeczywistych mogą być również pierwiastki zespolone, ale zawsze w parach $\lambda_i,\ \lambda_i^*$. Odpowiadające im rozwiązania

(6.66) możemy doprowadzić do postaci rzeczywistej przekształcając funkcje wykładnicze w trygonometryczne. Załóżmy, że równanie (6.63) ma parę rozwiązań zespolonych $a \pm i\beta$ o krotności l. Odpowiada im rozwiązanie postaci

$$S_{l-1}(x)\mathrm{e}^{(a+i\beta)x} + T_{l-1}(x)\mathrm{e}^{(a-i\beta)x} = \mathrm{e}^{ax}\left[S_{l-1}(x)\mathrm{e}^{i\beta x} + T_{l-1}(x)\mathrm{e}^{-i\beta x}\right],$$

gdzie S_{l-1}, T_{l-1} są wielomianami stopnia $l-1$ o dowolnych współczynnikach. Podstawiając

$$\mathrm{e}^{\pm i\beta x} = \cos\beta x \pm i\sin\beta x$$

otrzymujemy rozwiązanie postaci

$$\mathrm{e}^{ax}\left[U_{l-1}(x)\cos\beta x + V_{l-1}(x)\sin\beta x\right],$$

gdzie U_{l-1}, V_{l-1} są wielomianami związanymi z S_{l-1} i T_{l-1} wzorami

$$U_{l-1} = S_{l-1} + T_{l-1}, \qquad V_{l-1} = i(S_{l-1} - T_{l-1}).$$

Z tych rozważań wynika następująca reguła.

Aby rozwiązać równanie (6.62), należy zapisać odpowiadające mu równanie charakterystyczne (6.63) i znaleźć jego pierwiastki. Każdemu pierwiastkowi rzeczywistemu λ o krotności k odpowiada rozwiązanie postaci

$$P_{k-1}(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x},$$

gdzie P_{k-1} jest wielomianem stopnia $\leq k-1$ o dowolnych współczynnikach. Każdej parze sprzężonych pierwiastków zespolonych $a \pm i\beta$ o krotności l odpowiada rozwiązanie postaci

$$\mathrm{e}^{ax}\left[U_{l-1}(x)\cos\beta x + V_{l-1}(x)\sin\beta x\right],$$

gdzie U_{l-1}, V_{l-1} są wielomianami stopnia $\leq l-1$ o dowolnych współczynnikach. Dodając wszystkie otrzymane w ten sposób rozwiązania dostajemy ogólne rozwiązanie równania (6.62). W przypadku pierwiastków λ pojedynczych wymienione wielomiany są dowolnymi stałymi.

PRZYKŁAD 1. Rozwiążmy równanie różniczkowe

$$x^{(4)} + 2bx'' + cx = 0. \tag{6.68}$$

Odpowiada mu równanie charakterystyczne

$$\lambda^4 + 2b\lambda^2 + c = 0. \tag{6.69}$$

Powinniśmy rozpoznać w nim równanie dwukwadratowe; rozwiązuje się je przez podstawienie $\lambda^2 = \tau$:

$$\tau^2 + 2b\tau + c = 0.$$

To już jest zwykłe równanie kwadratowe, jego rozwiązania mają postać

$$\tau_1 = -b + \sqrt{b^2 - c}, \quad \tau_2 = -b - \sqrt{b^2 - c}.$$

Jeśli są to różne rozwiązania, to znajdujemy cztery pierwiastki równania (6.69):

$$\lambda_1 = \sqrt{\tau_1} = \sqrt{-b+\sqrt{b^2-c}}, \qquad \lambda_2 = -\sqrt{\tau_1} = -\sqrt{-b+\sqrt{b^2-c}},$$
$$\lambda_3 = \sqrt{\tau_2} = \sqrt{-b-\sqrt{b^2-c}}, \qquad \lambda_4 = -\sqrt{\tau_2} = -\sqrt{-b-\sqrt{b^2-c}}.$$

Nie troszczymy się o to, aby wyrażenia pod znakami pierwiastków były nieujemne, gdyż dopuszczamy rozwiązania zespolone. Nawet zależy nam na zespolonych λ_i, gdyż równanie (6.68) wzięte jest z zagadnień dotyczących drgań, mianowicie tzw. wahadła podwójnego. Jeśli obie stałe b, c są dodatnie oraz $b^2 > c$, to τ_1 i τ_2 są ujemne i wtedy wszystkie pierwiastki λ_j są urojone:

$$\lambda_1 = i\omega_1, \quad \lambda_2 = -i\omega_1, \quad \lambda_3 = i\omega_2, \quad \lambda_4 = -i\omega_2,$$

gdzie

$$\omega_1^2 = -\tau_1 = b - \sqrt{b^2-c}, \quad \omega_2^2 = -\tau_2 = b + \sqrt{b^2-c}.$$

Już wiemy, że dla rozwiązań w postaci funkcyj wykładniczych o urojonych wykładnikach lepiej jest brać funkcje trygonometryczne. W takim razie ogólne rozwiązanie równania (6.68) ma postać

$$x(t) = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t + C\cos\omega_2 t + D\sin\omega_2 t.$$

Możemy ten przykład skonkretyzować przyjmując $b = c = 1$, wtedy jako równanie (6.68) mamy

$$x^{(4)} + 2x'' + x = 0. \tag{6.70}$$

Jego równanie charakterystyczne ma postać

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2 = (\lambda^2 - i^2)^2 = (\lambda - i)^2(\lambda + i)^2 = 0,$$

więc są dwa pierwiastki podwójne: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Przy pierwiastkach wielokrotnych należy pisać wielomiany, więc zgodnie z wzorem (6.67) w wersji wykładników urojonych mamy ogólne rozwiązanie równania (6.70) w postaci

$$x(t) = (A + Bt)\cos t + (C + Dt)\sin t.$$

PRZYKŁAD 2. Zajmijmy się równaniem niejednorodnym

$$x^{(4)} + 2bx'' + cx = g \tag{6.71}$$

ze stałą g. Odpowiadającym mu równaniem jednorodnym jest właśnie (6.68). Jak zawsze w takich przypadkach, potrzebne nam jest szczególne rozwiązanie równania (6.71). Jeśli prawa strona jest stała, to warto szukać tego rozwiązania w postaci funkcji stałej $u(t) = \text{const}$. Wtedy wszystkie pochodne są zerami i z równania (6.71) pozostaje

$$cu = g.$$

Jego rozwiązaniem jest

$$u(t) = \frac{g}{c}.$$

Kto chce, może się przekonać, że metoda uzmieniania stałych daje ten sam wynik, ale będzie to wymagać wielu rachunków. W takim razie dla b i c spełniających warunki $b^2 > c > 0$ rozwiązanie ogólne równania (6.71) ma postać

$$x(t) = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t + C\cos\omega_2 t + D\sin\omega_2 t + \frac{g}{c}.$$

6.5 Ciągi i szeregi funkcyjne

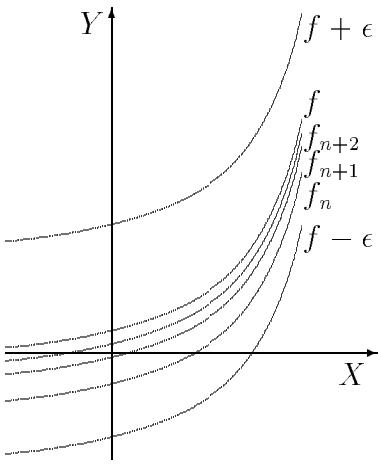
Jeśli $D \subset \mathbb{R}$ i każdej liczbie naturalnej n jest przyporządkowana funkcja $f_n : D \to \mathbb{R}$, to mamy do czynienia z *ciągiem funkcyjnym* albo *ciągiem funkcyj* o tej samej dziedzinie. Jeśli dla każdego $x \in D$ ciąg liczbowy $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... jest zbieżny do granicy $f(x)$, to mówimy, że *ciąg funkcyj* $\{f_n\}$ *jest zbieżny (punktowo) do funkcji* f. Według definicji granicy ciągu liczb oznacza to:

$$\forall x \in D \ \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

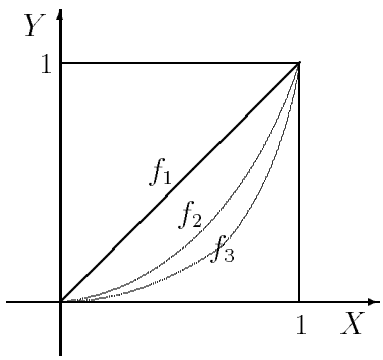
W tym zdaniu liczbę N dobieramy do każdego argumentu x z osobna. To oznacza, że N zależy od x i od ϵ, więc można napisać $N(x, \epsilon)$. Jeśli jednak można wybrać N niezależnie od x, czyli gdy N zależy tylko od ϵ, to mówimy, że ciąg $\{f_n\}$ *jest zbieżny jednostajnie* do f na zbiorze D. A więc pełnym zdaniem: ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ *jest zbieżny jednostajnie* na zbiorze D, jeśli

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ \forall x \in D \ : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

W tym przypadku powinniśmy napisać $N(\epsilon)$. Zbieżność jednostajna oznacza geometrycznie, że jeśli wykres funkcji granicznej $y = f(x)$ otoczymy otoczymy krzywoliniowym pasem wyznaczonym przez dwie krzywe: $y = f(x) + \epsilon$ oraz $y = f(x) - \epsilon$, to dla dostatecznie dużych n wszystkie wykresy $y = f_n(x)$ mieszczą się w tym pasie, patrz Rys. 6.2.



Rysunek 6.2



Rysunek 6.3

PRZYKŁAD 1. Niech $f_n : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Z naszej znajomości ciągów wiemy, że dla $x < 1$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad \text{lecz} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$

(patrz Rys. 6.3), więc ten ciąg funkcyjny nie może być zbieżny jednostajnie do funkcji stałej zero na dziedzinie $\langle 0, 1)$, bo każda funkcja f_n w pobliżu jedynki musi dążyć do 1, więc nie może być tam blisko zera.

Aliści, gdy zmniejszymy dziedzinę do $D = \langle 0, \frac{1}{2}\rangle$, wtedy ten ciąg jest już zbieżny jednostajnie do zera. Dobierzmy bowiem do danego $\epsilon > 0$ liczbę N

w taki sposób, aby $1/2^N < \epsilon$. Wtedy z nierówności $x \leq \frac{1}{2}$ mamy $x^n \leq (1/2)^n$, a dla $n > N$ mamy

$$x^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^N = \frac{1}{2^N} < \epsilon,$$

co można zapisać

$$\forall n > N \ \forall x \in D: \ |f_n(x)| = f_n(x) < \epsilon.$$

Znaczy to, że zbieżność w tym przedziale jest jednostajna.

Twierdzenie 1. Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyj ciągłych jest ciągła.

Dowód. Niech ciąg $\{f_n\}$ funkcyj o tej samej dziedzinie D będzie jednostajnie zbieżny do funkcji f też o dziedzinie D. To znaczy, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq N$ i $x \in D$ zachodzi

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{6.72}$$

W szczególności możemy napisać

$$|f_n(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{6.73}$$

dla dowolnego $a \in D$. Ciągłość funkcji f_n w punkcie a zapewnia istnienie takiego $\delta > 0$, że z nierówności $|x - a| < \delta$ wynika

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{6.74}$$

Teraz korzystamy w nierówności trójkąta

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |[f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - f_n(a)] + [f_n(a) - f(a)]| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \end{aligned}$$

i z nierówności (6.72)–(6.74)

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Dodając wspomniane przedtem kwantyfikatory otrzymujemy definicję Cauchy'ego ciągłości funkcji w dowolnym punkcie a. ■

W Przykładzie 1 widzieliśmy, że na przedziale $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$ ciąg funkcyjny $\{x^n\}$ jest zbieżny jednostajnie i funkcja graniczna $f(x) = 0$ jest ciągła, natomiast na przedziale $\langle 0, 1\rangle$ ciąg nie jest zbieżny jednostajnie, a funkcja graniczna

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad x < 1, \\ 1 & \text{gdy} \quad x = 1 \end{cases}$$

jest nieciągła.

Odpowiednikiem warunku Cauchy'ego zbieżności ciągu liczbowego jest warunek zawarty w następnym twierdzeniu.

Twierdzenie 2. Ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie w.t.w. gdy

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \ \forall n > N : |f_n(x) - f_N(x)| < \epsilon. \tag{6.75}$$

Dowód $\Rightarrow$. Załóżmy, że ciąg jest zbieżny jednostajnie do funkcji f. Dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ istnieje więc takie $r \in \mathbb{N}$, że dla $n \geq r$ zachodzi

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{oraz} \quad |f_r(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$|f_n(x) - f_r(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_r(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

a to jest nierówność (6.75).

Dowód $\Leftarrow$. Zakładamy, że ciąg $\{f_n\}$ spełnia warunek (6.75). Wtedy przy ustalonym $x \in D$ ciąg wartości funkcyj $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ \ldots$ spełnia warunek Cauchy'ego. A to oznacza, że dla każdego $x \in D$ istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Mamy w ten sposób zadaną funkcję $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Należy pokazać, że występująca tu zbieżność jest jednostajna. Wybierzmy $\epsilon' > 0$. Z założenia (6.75) istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że dla $m, n > N$ zachodzą nierówności

$$|f_n(x) - f_N(x)| < \frac{\epsilon'}{2}, \quad |f_m(x) - f_N(x)| < \frac{\epsilon'}{2}.$$

Znowu wykorzystujemy nierówność trójkąta

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon'}{2} + \frac{\epsilon'}{2}.$$

Przechodzimy do granicy $m \to \infty$

$$\lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon'$$

i korzytamy z ciągłości funkcji moduł:

$$\left| \lim_{m\to\infty} [f_n(x) - f_m(x)] \right| \leq \epsilon',$$

$$|f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)| \leq \epsilon',$$

co znaczy, że

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon'$$

Do danego ϵ zawsze możemy wybrać $\epsilon' < \epsilon$, więc możemy napisać

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

a to z poprzedzającymi kwantyfikatorami oznacza zbieżność jednostajną. ■

Niech będzie dany ciąg funkcyj $f_1, f_2, f_3, \ \ldots$ o tej samej dziedzinie. *Szereg funkcyjny* $\sum\limits_n f_n(x)$ nazywamy *zbieżnym jednostajnie*, jeśli ciąg sum częściowych $S_n(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie. Jeśli funkcje f_i są ciągłe, to ciągłe są również sumy częściowe s_n. W takim razie dwa poprzednie twierdzenia pozwalają nam sformułować bez dowodu dwa następne.

Twierdzenie 3. Suma jednostajnie zbieżnego szeregu funkcyj ciągłych jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie 4. Szereg funkcyjny $\sum_n f_n$ jest zbieżny jednostajnie w.t.w. gdy

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in D \ \forall n > N : |f_{N+1}(x) + f_{N+2}(x) + \ \ldots \ f_n(x)| < \epsilon. \tag{6.76}$$

Z ostatniego twierdzenia wynika następne.

Twierdzenie 5. Jeśli szereg liczbowy $\sum_n u_n$ jest zbieżny oraz jeśli dla każdego $x \in D$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest nierówność $|f_n(x)| \leq u_n$, to szereg funkcyjny $\sum_n f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie.

Dowód. Skoro szereg $\sum_n u_n$ jest zbieżny, to dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $n > N$ zachodzi $u_{N+1} + u_{N+2} + \ \ldots \ + u_n < \epsilon$. Na mocy nierówności trójkąta i założenia mamy więc

$$|f_{N+1}(x) + f_{N+2}(x) + \ \ldots \ + f_n(x)| \leq |f_{N+1}(x)| + |f_{N+2}(x)| + \ \ldots \ + |f_n(x)|$$

$$\leq u_{N+1} + u_{N+2} + \ \ldots \ + u_n < \epsilon.$$

Warunek (6.76) jest spełniony, więc Twierdzenie 4 zapewnia zbieżność jednostajną szeregu funkcyjnego. Nierówność z modułami oznacza zarazem zbieżność bezwzględną. ■

Szereg funkcyjny postaci

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ \ldots \ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{6.77}$$

nazywa się *szeregiem potęgowym*. Występujący po prawej stronie symbol $a_n x^n$ nie ma sensu dla $n = 0$ i $x = 0$. W tym wypadku trzeba go zastąpić przez a_0.

POTRÓJNY PRZYKŁAD 2. Szereg potęgowy

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ \ldots$$

jest zbieżny bezwzględnie dla każdego $x \in \mathbb{R}$, co można sprawdzić przez kryterium d'Alemberta. Jak wiemy z Przykładu 6 w § 4.3 o wzorze Mclaurina, ten szereg jest zbieżny do funkcji e^x. W każdym przedziale $\langle -a, a \rangle$ jest to zbieżność jednostajna, bo wtedy $\frac{x^n}{n!} \leq \frac{a^n}{n!}$, a szereg $\sum_n \frac{a^n}{n!}$ jest zbieżny dla każdego $a \in \mathbb{R}$.

Szereg

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ \ldots \tag{6.78}$$

to *szereg geometryczny*; jest on zbieżny dla $|x| < 1$ do wartości $1/(1-x)$; dla innych x jest on rozbieżny. Zbieżność na przedziale $(-1, 1)$ nie jest jednostajna.

Do trzeciego szeregu

$$1 + 1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ \ldots \tag{6.79}$$

stosujemy kryterium d'Alemberta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} = \lim_{n\to\infty}(n+1)x = \infty,$$

gdy $x > 0$. Skoro jest to liczba większa od 1, to jest on szeregiem rozbieżnym. Dla $x < 0$ jest to szereg naprzemienny, ale moduły jego wyrazów nie dążą do zera, więc taki szereg nie jest zbieżny. Podsumowując: dla wszystkich $x \neq 0$ szereg (6.79) jest rozbieżny, dla $x = 0$ w ogóle nie ma szeregu.

Promieniem zbieżności szeregu potęgowego nazywamy kres górny zbioru bezwzględnych wartości x-ów, dla których ten szereg jest zbieżny. W szczególności, jeśli ten zbiór jest nieograniczony, to promieniem zbieżności jest nieskończoność. Każdy szereg potęgowy jest zbieżny dla $x = 0$, bo jego wszystkie wyrazy poza zerowym są wtedy zerami, więc sumy częściowe są równe a_0 i suma szeregu też wynosi a_0. W takim razie zbiór $|x|$-ów, dla których szereg jest zbieżny, musi zawierać zero i wspomniany kres górny jest co najmniej zerem. A w sprzyjających przypadkach może być dodatni. W podanych trzech przykładach promienie zbieżności wynoszą odpowiednio ∞, 1 i 0.

Niech r oznacza promień zbieżności szeregu potęgowego. Przedział $(-r, r)$ nazywamy *przedziałem zbieżności* danego szeregu. Dla $r = \infty$ przedział zbieżności pokrywa sie z $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 6. W każdym przedziale domkniętym zawartym w przedziale zbieżności szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie.

Dowód. Wystarczy przeprowadzić dowód dla przedziału symetrycznego $\langle -c, c\rangle$ dla $c < r$, bo każdy inny przedział domknięty zawarty w $(-r, r)$ jest zawarty w jakimś przedziale symetrycznym. Z definicji r jest kresem górnym zbioru modułów punktów zbieżności szeregu $S(x)$, więc istnieje punkt $b \in (c, r)$ taki, że szereg $S(b)$ lub $S(-b)$ jest zbieżny. Ze zbieżności szeregu $S(\pm b)$ wynika, że jego wyrazy $a_n b^n$ dążą do zera, więc tworzą ciąg ograniczony, tzn. dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $|a_n b^n| < M$. Stąd dla $|x| \leq c$ mamy

$$|a_n x^n| = |a_n b^n| \left|\frac{x}{b}\right|^n \leq M \left(\frac{c}{b}\right)^n.$$

Szereg $\sum (c/b)^n$ jest szeregiem geometrycznym o ilorazie mniejszym od 1, więc jest zbieżny, więc dzięki Twierdzeniu 5 szereg $S(x)$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w przedziale $\langle -c, c\rangle$. ■

Z tego twierdzenia wnioskujemy, że wewnątrz przedziału zbieżności szereg jest zbieżny, a na zewnątrz rozbieżny – to ostatnie wynika z definicji promienia zbieżności. Natomiast na końcach przedziału zbieżności może być różnie: szereg (6.78) jest rozbieżny w punktach 1 i -1, mianowicie $S(1) = \infty$ $S(-1) = 1 - 1 + 1 - 1 +$ ... nie ma granicy właściwej ani niewłaściwej; a szereg

$$S(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ \ldots$$

przedstawiający $\ln(1 + x)$ jest zbieżny dla $x = 1$ (jest to wtedy szereg anharmoniczny omówiony w Przykładzie 4 z poprzedniego paragrafu), a jest rozbieżny dla $x = -1$ (wtedy jest to szereg harmoniczny z minusem, więc jest rozbieżny do $-\infty$).

Twierdzenie 7. Szereg potęgowy jest funkcją ciągłą wewnątrz przedziału zbieżności.

Dowód. Wewnątrz przedziału zbieżności oznacza w przedziale otwartym $(-r, r)$. Dla każdego $x \in (-r, r)$ można dobrać przedział domknięty P o środku x zawarty wewnątrz

przedziału zbieżności. Na mocy Tw. 6 szereg jest zbieżny jednostajnie w P. Jednomiany $a_n x^n$ są funkcjami ciągłymi, więc dzięki Tw. 3 szereg potęgowy jest funkcją ciągłą. ■

Kryteria zbieżności d'Alemberta i Cauchy'ego pozwalają niekiedy na łatwe obliczenie promienia zbieżności, mianowicie:

Twierdzenie 8. Jeśli

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g,$$

to promień zbieżności szeregu potęgowego (6.77) wynosi $r = 1/g$. Przy tym, jeśli $g = 0$, to $r = \infty$; jeśli zaś $g = \infty$, to $r = 0$.

Dowód. Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (6.77) z modułami:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|g. \tag{6.80}$$

Jeśli $|x| < 1/g$, to ta granica jest mniejsza od 1, więc na mocy kryterium d'Alemberta szereg potęgowy (6.77) jest zbieżny. Stąd r jako kres górny modułów $|x|$ spełnia warunek $r \geq 1/g$. Pokażemy nie wprost, że nie może być $r > 1/g$. Przypuśćmy, że dla $|x| \in \left(\frac{1}{g}, r\right)$ szereg (6.77) jest bezwzględnie zbieżny, ale wtedy granica (6.80) jest większa od 1, a kryterium d'Alemberta mówi, że szereg jest rozbieżny – sprzeczność. W takim razie zostaje $r = 1/g$.

Jeśli $g = 0$, to wzór (6.80) mówi, że szereg jest zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, co oznacza $r = \infty$, Jeśli $g = \infty$, to wzór (6.80) mówi, że szereg jest zbieżny tyko dla $x = 0$, co oznacza $r = 0$. ■

Twierdzenie 9. Jeśli

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = g,$$

to promień zbieżności szeregu potęgowego (6.77) wynosi $r = 1/g$.

Dowód. Stosujemy kryterium Cauchy'ego do szeregu (6.77) z modułami:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^n|a_n|} = |x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = |x|g.$$

Jeśli $|x| < 1/g$, to ta granica jest mniejsza od 1, więc na mocy kryterium Cauchy'ego szereg potęgowy (6.77) jest zbieżny. Stąd r jako kres górny modułów $|x|$ spełnia warunek $r \geq 1/g$. Identycznie jak przedtem pokazuje się nie wprost, że nie może być $r > 1/g$. W takim razie zostaje $r = 1/g$. ■

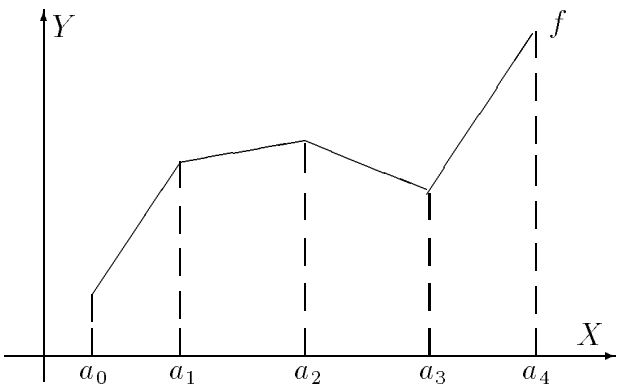
Funkcję $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ nazywamy *przedziałami liniową*, jeśli przedział $\langle a, b\rangle$ można podzielić na skończenie wiele mniejszych przedziałow tak, aby f była liniowa w każdym z tych przedziałów z osobna. Innymi słowy, istnieje taki układ $n + 1$ punktów

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ \ldots\ < a_{n-1} < a_n, \quad \text{gdzie} \quad a_0 = a,\ a_n = b$$

oraz takie dwa układy liczb $\{c_1, c_2,\ \ldots,\ c_n\} \subset \mathbb{R}$ i $\{d_1, d_2,\ \ldots,\ d_n\} \subset \mathbb{R}$, że

$$f(x) = c_k x + d_k \quad \text{dla} \quad x \in \langle a_{k-1}, a_k\rangle.$$

Na przykład funkcja $f(x) = |x|$ jest na dziedzinie $\langle -1, 1\rangle$ przedziałami liniowa, bowiem $f(x) = -x$ w przedziale $\langle -1, 0\rangle$ oraz $f(x) = x$ w przedziale $\langle 0, 1\rangle$. Wykresem funkcji ciągłej przedziałami liniowej jest linia łamana, patrz Rys. 6.4. Musi to być funkcja ciągła, bo wartość na granicy małych przedziałów musi należeć do dwóch sąsiadujących prostych, gdyż małe przedziały wybraliśmy domknięte. I na odwrót, jeśli wykresem funkcji jest linia łamana, to funkcja ta jest przedziałami liniowa.

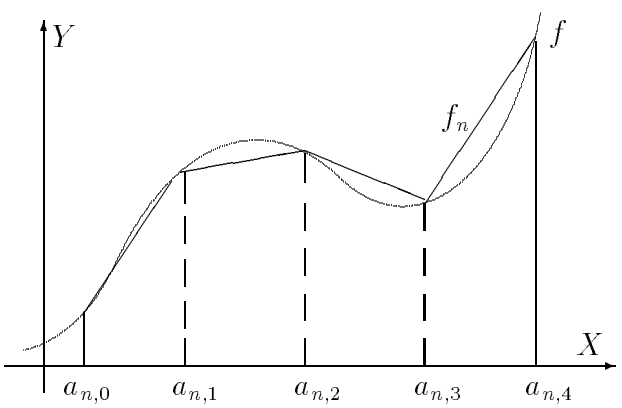


Rysunek 6.4

Często mamy do czynienia z przybliżaniem krzywych przez linie łamane, co czyniliśmy np. przy obliczaniu długości łuku krzywej.

Twierdzenie 10. Każda funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyj przedziałami liniowych.

Dowód. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ rozważamy podział przedziału $\langle a, b\rangle$ na n przedziałów jednakowej długości: $\langle a, a_{n,1}\rangle$, $\langle a_{n,1}, a_{n,2}\rangle$, ..., $\langle a_{n,n-1}, b\rangle$, mamy więc ogólnie $a_{n,k} = a + k\frac{b-a}{n}$. Wykreślamy linię łamaną przez punkty $[a, f(a)]$, $[a_{n,1}, f(a_{n,1})]$, ..., $[a_{n,n-1}, f(a_{n,n-1})]$, $[b, f(b)]$. Ta łamana jest wykresem pewnej funkcji przedziałami liniowej f_n, zob. Rys. 6.5. W takim razie dla n-go podziału dziedziny mamy n-tą funkcję f_n przedziałami liniową Udowodnimy, że ciąg funkcyj $\{f_n\}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji f.



Rysunek 6.5

Ze względu na ciągłość funkcji f w przedziale $\langle a, b\rangle$ dla danego $\epsilon > 0$ można dobrać takie $\delta > 0$, że

$$|x - x'| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{6.81}$$

Wybierzmy liczbę naturalną $m > (b-a)/\delta$, niech $n > m$ oraz $x \in \langle a_{n,k-1}, a_{n,k}\rangle$. Długość tego przedziału wynosi $(b-a)/n$, więc jest mniejsza od δ, przeto dzięki (6.81)

$$|f(a_{n,k-1}) - f(a_{n,k})| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{oraz} \quad |f(x) - f(a_{n,k})| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{6.82}$$

Przypuśćmy, że $f(a_{n,k-1}) \leq f(a_{n,k})$ (dla przeciwnego zwrotu nierówności rozumowanie jest podobne); wtedy w przedziale $\langle a_{n,k-1}, a_{n,k}\rangle$ funkcja f_n jako linowa jest niemalejąca, zatem

$$f_n(a_{n,k-1}) \leq f_n(x) \leq f_n(a_{n,k}).$$

Ale w myśl definicji funkcji f_n na końcach małego przedziału mamy $f_n(a_{n,k-1}) = f(a_{n,k-1})$ oraz $f_n(a_{n,k}) = f(a_{n,k})$, więc

$$f(a_{n,k-1}) \leq f_n(x) \leq f(a_{n,k}).$$

Od wszystkich stron tych nierówności możemy odjąć $f(a_{n,k})$:

$$f(a_{n,k-1}) - f(a_{n,k}) \leq f_n(x) - f(a_{n,k}) \leq 0.$$

Mnożymy wszystko przez -1:

$$0 \leq f(a_{n,k}) - f_n(x) \leq f(a_{n,k}) - f(a_{n,k-1}).$$

Wiedząc o tym, co jest od czego większe, możemy to napisać z modułami

$$0 \leq |f_n(x) - f(a_{n,k})| \leq |f(a_{n,k=1}) - f(a_{n,k})|.$$

To w połączeniu z lewą nierównością (6.82) daje

$$|f_n(x) - f(a_{n,k})| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Stąd dzięki nierówności trójkąta

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f(a_{n,k})| + |f(x) - f(a_{n,k})| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Wykazalismy, że dla $n > m$ i dla wszystkich $x \in \langle a, b\rangle$ zachodzi nierówność

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

co oznacza jednostajną zbieżność. ■

Twierdzenie 11. Dla szeregu potęgowego pochodna sumy jest sumą pochodnych, tzn.

$$\frac{d}{dx}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\right) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots$$

dla każdego x wewnątrz przedziału zbieżności szeregu różniczkowanego. Oba szeregi mają ten sam promień zbieżności.

D o w ó d w książce Kuratowskiego na str. 125 i 126.

PRZYKŁAD 3. Wiemy z jednego z Przykładów 2, że

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

dla $|x| < 1$. Z ostatniego twierdzenia otrzymujemy

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

W ten sposób poznajemy granicę nowego szeregu.

Lemat. Jeśli funkcje $f_n : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ są ciągłe, jednostajnie zbieżne do funkcji f i mają funkcje pierwotne, to funkcja f również ma funkcję pierwotną.

Dowód jest w książce Kuratowskiego na str. 152.

Twierdzenie 12. Każda funkcja ciągła w przedziale domkniętym ma funkcję pierwotną.

Dowód. Najpierw udowodnimy, że funkcja przedziałami linowa ma funkcję pierwotną. W myśl definicji funkcji przedziałami liniowej istnieje taki układ $n+1$ punktów

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ \ldots\ < a_{n-1} < a_n, \quad \text{gdzie} \quad a_0 = a,\ a_n = b$$

oraz takie dwa układy liczb $\{c_1, c_2,\ \ldots,\ c_n\} \subset \mathbb{R}$ i $\{d_1, d_2,\ \ldots,\ d_n\} \subset \mathbb{R}$, że

$$f(x) = c_k x + d_k \quad \text{dla} \quad x \in \langle a_{k-1}, a_k\rangle. \tag{6.83}$$

W każdym przedziale z osobna znajdujemy funkcje pierwotne

$$F_k(x) = \frac{1}{2}c_k x^2 + d_k x + e_k \quad \text{dla} \quad x \in \langle a_{k-1}, a_k\rangle.$$

Te wzory nie dają funkcji pierwotnej w całym przedziale $\langle a, b\rangle$, bo nie ma jeszcze zapewnionej ciągłości. Dlatego narzucamy warunki ciągłości w punktach a_k wspólnych dla dwóch przedziałów: $F_k(a_k) = F_{k+1}(a_k)$, czyli

$$\frac{1}{2}c_k a_k^2 + d_k a_k + e_k = \frac{1}{2}c_{k+1} a_k^2 + d_{k+1} a_k + e_{k+1},$$

co daje związek rekurencyjny między stałymi całkowania

$$e_{k+1} = \frac{1}{2}c_k a_k^2 + d_k a_k + e_k - \frac{1}{2}c_{k+1} a_k^2 - d_{k+1} a_k.$$

Widzimy, że tylko stała e_1 jest dowolna, pozostałe muszą być wyznaczone za pomocą tego wzoru rekurencyjnego. Teraz zespół funkcyj $F_1,\ F_2,\ \ldots F_n$ o różnych dziedzinach wyznacza wspólnie jedną funkcję ciągłą, której pochodna jest równa funkcji f danej wzorem (6.83), czyli przedziałami liniowej.

Na mocy Tw. 10 każda fukcja ciągła f w przedziale domkniętym jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu $\{f_n\}$ funkcyj przedziałami liniowych. Przed chwilą pokazaliśmy, że funkcje f_n mają funkcje pierwotne, więc na mocy przytoczonego Lematu funkcja f też posiada funkcję pierwotną. ■

Z tego twierdzenia wynika od razu, że każda funkcja f ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ posiada całkę oznaczoną $\int_a^b f(x)dx$, co określa się zwrotem *funkcja f jest całkowalna w przedziale* $\langle a, b\rangle$

Ciągi i szeregi funkcyjne mogą wystąpić również w rachunku całkowym.

Twierdzenie 13. Jeśli ciąg funkcyj ciągłych $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f w przedziale $\langle a, b\rangle$, to całka granicy jest równa granicy całek:

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx, \quad \text{czyli} \quad \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Dowód. Na mocy Twierdzenia 1 funkcja f jako granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyj ciągłych jest ciągła. Do pary funkcyj f i f_n stosujemy twierdzenie o tym, że całka różnicy jest różnicą całek [wzór (5.28)]:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b [f(x) - f_n(x)]dx.$$

Z powodu jednostajnej zbieżności ciągu $\{f_n\}$ do funkcji f dla danego $\epsilon > 0$ istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n > k$ mamy

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}. \tag{6.84}$$

Twierdzenie 4 w § 5.3 mówi, że spełniona jest nierówność $\left|\int_a^b g(x)dx\right| \leq \int_a^b |g(x)|dx$, o ile $a < b$. Dlatego możemy napisać

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| = \left|\int_a^b [f(x) - f_n(x)]dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx.$$

Dzięki (6.84) i Twierdzeniu 3 z § 5.3 mamy

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}dx = \epsilon.$$

Zatem

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| \leq \epsilon,$$

a to wraz ze wspomnianymi wcześniej kwantyfikatorami oznacza, że spełniona jest zbieżność, o której mówi się w tezie twierdzenia. ■

Udowodnione twierdzenie mówi, że możemy ze znakiem $\lim_{n\to\infty}$ wejść pod znak całki oznaczonej wtedy, gdy ciąg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie.

Twierdzenie 14. Jeśli funkcje $f_n : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ są ciągłe i szereg funkcyjny $\sum_n f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f, to całka szeregu jest równa szeregowi całek:

$$\int_a^b \left[\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Dowód. Wystarczy zastosować poprzednie twierdzenie do ciągu sum częściowych. ■

6.6 Metoda szeregów potęgowych

Wykorzystane podręczniki

H. Margenau i G.M. Murphy: *Matematyka w fizyce i chemii*, rozdział 2C,D, PWN, Warszawa 1962;
W.I. Smirnow: *Matematyka wyższa*, tom II, § 4, PWN, Warszawa 1966.

Będziemy zajmować się jednorodnym równaniem liniowym drugiego rzędu:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{6.85}$$

Równania takie omawialiśmy w § 6.3, ale jedynie poprzez ogólną teorię, a rozwiązania podaliśmy tylko w szczególnych przykładach. Tym razem będziemy zakładać, że współczynniki p i q są przedstawione w postaci szeregów potęgowych:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l \tag{6.86}$$

a rozwiązania będziemy szukać również w postaci szeregu potęgowego:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{6.87}$$

Na mocy Twierdzenia 11 w § 6.5 szereg potęgowy można różniczkować wyraz po wyrazie. Stąd

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n c_n x^{n-2}.$$

Wstawienie funkcji (6.87) i jej pochodnych do równania (6.85) daje

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0. \tag{6.88}$$

Współczynniki a_k i b_l są znane, bo funkcje p i q są znane. Naszym zadaniem jest znalezienie współczynników c_n. Zapiszmy jawnie kilka pierwszych wyrazów każdego szeregu w (6.88):

$$2c_2 + 3 \cdot 2\, c_3 x + 4 \cdot 3\, c_4 x^2 + \ldots + \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\right)\left(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots\right)$$
$$+ \left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\right)\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\right) = 0. \tag{6.89}$$

Mnożymy nawiasy, grupujemy wyrazy podobne i przyrównujemy do zera współczynniki przy jednakowych potęgach x – w ten sposób otrzymujemy układ równań na współczynniki c_j:

$$\begin{array}{l|l}
x^0 & 2\,c_2 + a_0 c_1 + b_0 c_0 = 0, \\
x^1 & 3 \cdot 2\, c_3 + 2a_0 c_2 + a_1 c_1 + b_0 c_1 + b_1 c_0 = 0, \\
x^2 & 4 \cdot 3\, c_4 + 3a_0 c_3 + 2a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = 0, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^n & (n+2)(n+1) c_{n+2} + Q_n(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}) = 0, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \tag{6.90}$$

przy czym przez Q_n oznaczyliśmy wielomian jednorodny stopnia pierwszego swoich argumentów.

Każde następne z napisanych równań (6.90) zawiera o jeden szukany wpółczynnik c_n więcej od poprzedniego. Współczynniki c_0 i c_1 pozostają dowolne i odgrywają rolę stałych dowolnych, które mają być dwie dla równania drugiego rzędu. Pierwsze z równań (6.88) pozwala znaleźć c_2 drugie c_3 itd., a ogólnie z $(n+1)$-go równania możemy wyznaczyć c_{n+2} znając poprzednie współczynniki.

Wygodnie jest postąpić następująco. Wyznaczmy opisanym sposobem dwa rozwiązania y_1 i y_2, przy czym w pierwszym rozwiązaniu przyjmujemy $c_0 = 1$ i $c_1 = 0$, a w drugim $c_0 = 0$ i $c_1 = 1$, co według wzoru (6.87) jest równoważne następującym warunkom początkowym:

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

Dowolne rozwiązanie równania (6.88) jest kombinacją liniową tych dwóch rozwiązań, a jeśli warunki początkowe mają postać $y(0) = A$ oraz $y'(0) = B$, to

$$y(x) = A\,y_1(x) + B\,y_2(x).$$

Drogą formalnych obliczeń możemy stopniowo wzynaczyć współczynniki szeregu potęgowego (6.87), lecz pozostaje kwestią otwartą, czy otrzymany w ten sposób szereg potęgowy jest zbieżny i czy będzie dawać rozwiązanie równania. Mówi o tym następujące

Twierdzenie 1. Jeśli szeregi (6.86) są zbieżne dla $|x| < R$, to otrzymany opisanym sposobem szereg potęgowy (6.87) jest zbieżny dla $|x| < R$ i jest rozwiązaniem równania (6.88). Jeśli p i q są wielomianami, to znaleziony szereg potęgowy jest zbieżny przy dowolnych $x \in \mathbb{R}$.

Dowodu nie będzie.

PRZYKŁAD 1. Rozpatrzmy równanie

$$y'' - xy = 0.$$

Tym razem wzory (6.86) są bardzo proste, bo $p(x) = 0$, $q(x) = -x$. Wzór (6.89) ma postać

$$(2c_2 + 3\cdot 2\,c_3 x + 4\cdot 3\,c_4 x^2 + \ldots) - x(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots) = 0.$$

Zapisujemy warunki (6.90):

$$\begin{array}{c|l} x^0 & 2\,c_2 = 0, \\ x^1 & 3\cdot 2\,c_3 - c_0 = 0, \\ x^2 & 4\cdot 3\,c_4 - c_1 = 0, \\ x^3 & 5\cdot 4\,c_5 - c_2 = 0, \\ \ldots & \ldots\ldots \\ x^n & (n+2)(n+1)c_{n+2} - c_{n-1} = 0. \end{array}$$

Przyjmujemy $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, wtedy dostajemy

$$c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{1}{2\cdot 3}, \quad c_4 = c_5 = 0, \quad c_6 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}, \quad c_7 = c_8 = 0,$$

$$c_9 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}, \quad c_{10} = c_{11} = 0, \quad \ldots \quad .$$

Widać, że różne od zera są tylko współczynniki o wskaźniku podzielnym przez 3, więc możemy napisać

$$c_{3k+1} = c_{3k+2} = 0 \quad \text{oraz} \quad c_{3k} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3k-2)}{(3k)!}.$$

Znalezione rozwiązanie ma zatem postać

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3k-2)}{(3k)!}\, x^{3k}.$$

Zastosujmy kryterium d'Alemberta dla sprawdzenia, kiedy ten szereg jest zbieżny:

$$\frac{4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3k-2)\cdot (3k+1)}{(3k+3)!}\,x^{3k+3} : \frac{4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3k-2)}{(3k)!}\,x^{3k} = \frac{1}{(3k+2)(3k+3)}\,x^3.$$

Granicą tego wyrażenia przy $k\to\infty$ jest zero dla każdego $x\in\mathbb{R}$, więc ten szereg jest zbieżny dla wszystkich x – to oznacza, że jego promień zbieżności jest nieskończony.

Dla utworzenia drugiego rozwiązania przyjmujemy $c_0=0,\ c_1=1$. Podobnie jak przedtem znajdujemy

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3k-1)}{(3k)!}\,x^{3k+1}$$

i podobnie pokazuje się nieskończony promień zbieżności.

Poznaną metodę zastosujemy do *równania Legendre'a*:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0, \tag{6.91}$$

gdzie $l=0,1,2,3,\ldots$ [Adrien Marie Legendre (1752–1833) – matematyk francuski, też zaczął karierę od Szkoły Wojskowej. Zajmował się mechaniką nieba, pomiarami geodezyjnymi i analizą matematyczną.]

Szukamy rozwiązania w postaci

$$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots \tag{6.92}$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
y'(x) &= c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \ldots \\
-2xy'(x) &= -2c_1x - 2\cdot 2c_2x^2 - 2\cdot 3c_3x^3 - \ldots \\
y''(x) &= 1\cdot 2c_2 + 2\cdot 3c_3x + 3\cdot 4c_4x^2 + 4\cdot 5c_5x^3 + \ldots \\
-x^2y''(x) &= -2c_2x^2 - 3\cdot 2c_3x^3 - 4\cdot 3c_4x^4 - \ldots
\end{aligned}$$

Wstawiamy to do równania (6.91) i przyrównujemy do zera współczynniki przy jednakowych potęgach x:

$$\begin{array}{c|l}
x^0 & l(l+1)c_0 + 2\cdot 1c_2 = 0, \\
x^1 & l(l+1)c_1 - 2\cdot 1c_1 + 2\cdot 3c_3 = 0, \\
x^2 & l(l+1)c_2 - 2\cdot 2c_2 + 3\cdot 4c_4 - 1\cdot 2c_2 = 0, \\
x^3 & l(l+1)c_3 - 2\cdot 3c_3 + 4\cdot 5c_5 - 2\cdot 3c_3 = 0, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^n & l(l+1)c_n - 2nc_n + (n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n = 0
\end{array}$$

Z pierwszych dwóch równań mamy

$$c_2 = -\frac{l(l+1)}{2}\,c_0, \qquad c_3 = \frac{2-l(l+1)}{6}\,c_1.$$

Pozostałe warunki zawierają się w ogólnej postaci

$$[l(l+1) - 2n - (n-1)n]c_n + (n+1)(n+2)c_{n+2} = 0,$$

z której wyliczamy

$$c_{n+2} = \frac{n(n-1)+2n-l(l+1)}{(n+2)(n+1)}\,c_n = \frac{n(n+1)-l(l+1)}{(n+2)(n+1)}\,c_n. \tag{6.93}$$

Widać, że mamy tylko związki między współczynnikami o tej samej parzystości wskaźnika, więc możemy rozważać osobno rozwiązania dla $c_0 \neq 0$ i $c_1 = 0$ lub $c_0 = 0$ i $c_1 \neq 0$. W ten sposób dostajemy dwa liniowo niezależne rozwiązania: jedno o potęgach parzystych, drugie o nieparzystych.

Niektóre rozwiązania mogą być wielomianami. Jeśli l jest liczbą nieparzystą, to wśród rosnących n znajdzie się liczba nieparzysta $n_{max} = l$, dla której licznik po rawej stronie (6.93) się zeruje, więc $c_{l+2} = 0$ i wszystkie następne c_n są zerami. To oznacza, że szereg się urywa i staje się wielomianem stopnia l. W takim razie dla nieparzystego l rozwiązanie o potęgach nieparzystych jest wielomianem, a o potęgach parzystych jest szeregiem. Dla l parzystego jest na odwrót. Ów wielomian z odpowiednim czynnikiem będzie nazywany *wielomianem Legendre'a*, a oznacza się go $P_l(x)$.

Dla rozwiązania będącego szeregiem można wykorzystać związek rekurencyjny (6.93) do zbadania zbieżności szeregu. Zastosujmy kryterium d'Alemberta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+2}x^{n+2}}{c_n x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)-l(l+1)}{(n+2)(n+1)}\,x^2 = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{l(l+1)}{n^2}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} = x^2.$$

Ta granica ma moduł mniejszy od 1 dla $|x| < 1$, zatem szereg jest zbieżny dla $|x| < 1$.

Zapiszmy kilka pierwszych wielomianów Legendre'a. Dla $l = 0$ mamy wielomian parzysty, co oznacza $c_1 = 0$. Równanie stojące przy x^0 ma postać $0 \cdot c_0 + 2c_2 = 0$, stąd $c_2 = 0$ i wszystkie dalsze $c_n = 0$. Zatem

$$P_0(x) = c_0.$$

Dla $l = 1$ bierzemy $c_0 = 0$, a równanie przy x^1 ma postać $2c_1 - 2c_1 + 6c_3 = 0$, stąd $c_3 = 0$ oraz

$$P_1(x) = c_1 x.$$

Dla $l = 2$ równanie przy x^0 ma postać $6c_0 + 2c_2 = 0$, więc $c_2 = -3c_0$ oraz

$$P_2(x) = c_0(1 - 3x^2).$$

Dla $l = 3$ równanie przy x^1 ma postać $12c_1 - 2c_1 + 6c_3 = 0$, stąd $c_3 = -(5/3)c_1$. Z równania przy x^3 wynika $c_5 = 0$, więc

$$P_3(x) = c_1\left(x - \frac{5}{3}x^3\right).$$

Twierdzenie 2. Wielomiany zdefiniowane przez tzw. *wzór Rodriguesa*:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\,\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l \tag{6.94}$$

spełniają równanie Legendre'a.

[Benjamin Olinde Rodrigues (1794–1851) – francuski matematyk i ekonomista.]

Dowód. Rozważmy tożsamość

$$\left(x^2-1\right)\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)^l = 2lx\left(x^2-1\right)^l.$$

Zróżniczkujmy obie strony $l+1$ razy. Przy pomocy wzoru Leibniza dla pochodnych wyższych rzędów (Lemat 2 w § 4.3; uwaga, oznaczenie d zastępuje d/dx):

$$d^l(uv) = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} d^k u\, d^{l-k} v = u\, d^l v + l\, du\, d^{l-1} v + \frac{l(l-1)}{2!}\, d^2 u\, d^{l-2} v + \ldots$$

$$+ \frac{l!}{k!(l-k)!}\, d^k u\, d^{l-k} v + \ldots + v\, d^l u \qquad (6.95)$$

dostajemy dla lewej strony

$$d^{l+1}\left[\left(x^2-1\right) d\left(x^2-1\right)^l\right]$$

$$= \left(x^2-1\right) d^{l+2}\left(x^2-1\right)^l + 2(l+1)x\, d^{l+1}\left(x^2-1\right)^l + l(l+1)\, d^l\left(x^2-1\right)^l,$$

a dla prawej strony

$$d^{l+1}\left[2lx\left(x^2-1\right)^l\right] = 2lx\, d^{l+1}\left(x^2-1\right)^l + 2l(l+1)\, d^l\left(x^2-1\right)^l.$$

Różnica tych dwóch wyrażeń musi znikać, zatem

$$\left(x^2-1\right)\, d^{l+2}\left(x^2-1\right)^l + 2x\, d^{l+1}\left(x^2-1\right)^l - l(l+1)\, d^l\left(x^2-1\right)^l = 0.$$

Na mocy wzoru Rodriguesa możemy to zapisać

$$\left(x^2-1\right) P_l'' + 2xP_l' - l(l+1)P_l = 0.$$

A to jest równanie Legendre'a (6.91) pomnożone przez –1. ■

Wyrażenia dane wzorem (6.94) noszą nazwę *wielomianów Legendre'a.*

Zajmiemy się teraz następnym równaniem różniczkowym drugiego rzędu

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] u = 0. \qquad (6.96)$$

dla $m \in \mathbb{N}$, $m \le l$, znanym jako *stowarzyszone równanie Legendre'a.*

Twierdzenie 3. Jeśli y jest rozwiązaniem równania Legendre'a, to

$$u(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m y}{dx^m}$$

jest rozwiązaniem stowarzyszonego równania Legendre'a.

Dowód. Oznaczmy $w = d^m y/dx^m = d^m y$; wówczas

$$u = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} w, \quad u' = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} w' - mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} w,$$

$$u'' = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} w'' - 2mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} w' - m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} w + mx^2(m-2)(1-x^2)^{\frac{m}{2}-2} w,$$

czyli

$$u = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} d^m y, \quad u' = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} d^{m+1} y - mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} d^m y,$$

$$u'' = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} d^{m+2} y - 2mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} d^{m+1} y - m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} d^m y$$

$$+mx^2(m-2)(1-x^2)^{\frac{m}{2}-2}d^m y.$$

Wstawiamy to do (6.96) otrzymując

$$(1-x^2)^{\frac{m}{2}+1}d^{m+2}y - 2mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}}d^{m+1}y - m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}d^m y + m(m-2)x^2(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}d^m y$$

$$-2x(1-x^2)^{\frac{m}{2}}d^{m+1}y + 2mx^2(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}d^m y + l(l+1)(1-x^2)^{\frac{m}{2}}d^m y - m^2(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}d^m y$$

$$= (1-x^2)^{\frac{m}{2}+1}d^{m+2}y - 2(m+1)x(1-x^2)^{\frac{m}{2}}d^{m+1}y + l(l+1)(1-x^2)^{\frac{m}{2}}d^m y$$

$$-m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}d^m y + m^2x^2(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}d^m y - m^2(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}d^m y$$

$$= (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left\{(1-x^2)d^{m+2}y - 2(m+1)xd^{m+1}y + [l(l+1)-m(m+1)]d^m y\right\}. \quad (6.97)$$

Na podstawie wzoru Leibniza (6.95) dostajemy

$$d^m[(1-x^2)y''] = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}d^k(1-x^2)d^{m-k+2}y = (1-x^2)d^{m+2}y - 2mxd^{m+1}y - m(m-1)d^m y$$

oraz

$$d^m(-2xy') = -2xd^{m+1}y - 2md^m y,$$

skąd

$$d^m[(1-x^2)y'' - 2xy'] = (1-x^2)d^{m+2}y - 2(m+1)xd^{m+1}y - m(m+1)d^m y.$$

Rozpoznajemy w tym pewne wyrazy wzoru (6.97), więc możemy go zapisać

$$(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left\{d^m[(1-x^2)y'' - 2xy'] + l(l+1)d^m y\right\}$$

$$= (1-x^2)^{\frac{m}{2}}d^m[(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y].$$

Z założenia y spełnia równanie Legendre'a, więc to wyrażenie jest zerem, a to oznacza, że funkcja u spełnia równanie (6.96). ■

W ten sposób pokazaliśmy, że funkcje

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l \quad (6.98)$$

są rozwiązaniami stowarzyszonego równania Legendre'a (6.96). Nazywają się one *stowarzyszonymi funkcjami Legendre'a*. Są one wielomianami tylko dla m parzystych.

Przystępujemy do rozważenia *równania Hermite'a*:

$$y'' - 2xy' + 2ly = 0, \quad (6.99)$$

gdzie $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. [Charles Hermite (1822–1901) – matematyk francuski, zajmował się analizą, algebrą i teorią liczb.] Jak zwykle, szukamy rozwiązania w postaci szeregu potęgowego

$$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$$

$$-2xy'(x) = -2c_1x - 2\cdot 2\,c_2x^2 - 2\cdot 3\,c_3x^3 - \ldots$$

$$y''(x) = 2\cdot 1\,c_2 + 3\cdot 2\,c_3x + 4\cdot 3\,c_4x^2 + 5\cdot 4\,c_5x^3 + \ldots$$

Po wstawieniu do równania (6.99) przyrównujemy do zera współczynniki:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & 2lc_0 + 2\cdot 1\, c_2 = 0 \\ x^1 & 2lc_1 - 2\cdot 1\, c_1 + 3\cdot 2\, c_3 = 0 \\ x^2 & 2lc_2 - 2\cdot 2\, c_2 + 4\cdot 3\, c_4 = 0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n & 2lc_n - 2nc_n + (n+2)(n+1)c_{n+2} = 0 \end{array} .$$

Z tych warunków otrzymujemy związki między współczynnikami o tej samej parzystości

$$c_{n+2} = \frac{2(n-l)}{(n+2)(n+1)}\, c_n. \tag{6.100}$$

Możemy więc rozważać dwa rozwiązania liniowo niezależne: o potęgach parzystych lub nieparzystych.

Jeśli l Jest liczbą nieparzystą, to wśród rosnących n znajdzie się liczba nieparzysta $n_{max} = l$, a wtedy $c_{l+2} = 0$ i wszystkie następne c_n będą zerami. W takim razie dla nieparzystego l rozwiązanie o potęgach nieparzystych jest wielomianem stopnia l, a o potęgach parzystych jest szeregiem. Dla l parzystego jest na odwrót. Dla rozwiązania będącego szeregiem można wykorzystać związek (6.100) do zbadania zbieżności szeregu za pomocą kryterium d'Alemberta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+2}x^{n+2}}{c_n x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n-l)}{(n+2)(n+1)} x^2 = 2x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{(1+\frac{2}{n})(1+\frac{1}{n})} = 0.$$

Szereg jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 4. Wielomiany określone wzorem

$$y_l(x) = \mathrm{e}^{x^2} \frac{d^l}{dx^l} \mathrm{e}^{-x^2} \tag{6.101}$$

spełniają równanie Hermite'a.

Dowód. Liczymy

$$y_l'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2} d^l \mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{x^2} d^{l+1} \mathrm{e}^{-x^2},$$

$$y_l''(x) = (2+4x^2)\mathrm{e}^{x^2} d^l \mathrm{e}^{-x^2} + 4x\mathrm{e}^{x^2} d^{l+1} \mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{x^2} d^{l+2} \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Wstawiamy to do lewej strony wzoru (6.99):

$$\begin{aligned} &(2+4x^2)\mathrm{e}^{x^2} d^l \mathrm{e}^{-x^2} + 4x\mathrm{e}^{x^2} d^{l+1} \mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{x^2} d^{l+2} \mathrm{e}^{-x^2} - 4x^2 \mathrm{e}^{x^2} d^l \mathrm{e}^{-x^2} - 2x\mathrm{e}^{x^2} d^{l+1} \mathrm{e}^{-x^2} + 2l\mathrm{e}^{x^2} d^l \mathrm{e}^{-x^2} \\ &= 2(l+1)\mathrm{e}^{x^2} d^l \mathrm{e}^{-x^2} + 2x\mathrm{e}^{x^2} d^{l+1} \mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{x^2} d^{l+2} \mathrm{e}^{-x^2} \\ &= \mathrm{e}^{x^2} \left\{ 2(l+1) d^l \mathrm{e}^{-x^2} + 2x d^{l+1} \mathrm{e}^{-x^2} + d^{l+2} \mathrm{e}^{-x^2} \right\} \\ &= \mathrm{e}^{x^2} \left\{ 2(l+1) d^l \mathrm{e}^{-x^2} + 2x d^{l+1} \mathrm{e}^{-x^2} + d^{l+1} \left(-2x\mathrm{e}^{-x^2} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{6.102}$$

Do ostatniego wyrazu stosujemy wzór Leibniza (6.95):

$$d^{l+1} \left(-2x\mathrm{e}^{-x^2} \right) = -2x d^{l+1} \mathrm{e}^{-x^2} - 2(l+1) d^l \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Po wstawieniu tego do (6.102) otrzymujemy zero w nawiasie klamrowym, więc wielomian (6.101) spełnia równanie Hermite'a. ■

Wyrażenia

$$H_l(x) = (-1)^l \, \mathrm{e}^{x^2} \frac{d^l}{dx^l} \mathrm{e}^{-x^2}$$

nazywają się *wielomianami Hermite'a*. Wzór ten również nosi nazwę *wzoru Rodriguesa*. Wielomiany Hermite'a spełniają tożsamości

$$H_l'(x) = 2lH_{l-1}(x), \quad l > 0$$

$$H_{l+1}(x) - 2xH_l(x) + 2lH_{l-1}(x) = 0, \quad l > 0,$$

z których piewszą będziemy dowodzić na ćwiczeniach.

Funkcje poznane w tym paragrafie należą do tzw. *funkcyj specjalnych*.