Rozdział 8

CAŁKI W WIELU WYMIARACH

8.1 Całki podwójne

Rozważmy prostokąt $P = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \subset \mathbb{R}^2$ i jego podział na mniejsze prostokąty zadany przez punkty

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k = b; \quad c = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_k = d.$$

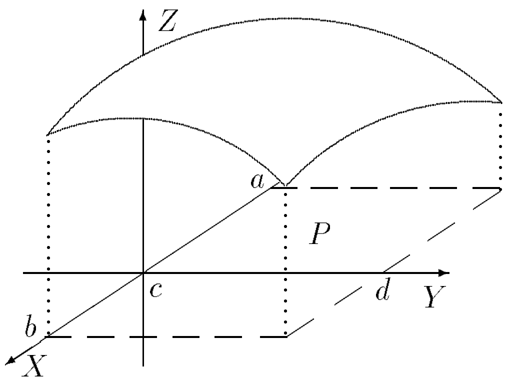
Owe mniejsze prostokąty zapiszemy

$$P_{jl} = \langle a_{j-1}, a_j\rangle \times \langle c_{l-1}, c_l\rangle.$$

Oznaczmy

$$\Delta x_j = a_j - a_{j-1}, \quad \Delta y_l = c_l - c_{l-1} \quad \text{dla wszech} \quad j, l \in \{1, 2, ..., k\}.$$

Przypomnijmy pojęcie z Rozdziału 5: średnicą podziału przedziału $\langle a, b\rangle$ nazywamy $\max_j \Delta x_j$, podobnie średnicą podziału przedziału $\langle c, d\rangle$ nazywamy $\max_l \Delta y_l$. Umówmy się, że oba podziały mają tę samą średnicę s_k.



Rysunek 8.1

Rozważmy ciągłą i ograniczoną funkcję $f : P \to \mathbb{R}$. Jej wykresem jest powierzchnia leżąca nad prostokątem P, zob. Rys. 8.1. Ta powierzchnia, prostokąt P, cztery płaszczyzny $x = a$, $x = b$, $y = c$ i $y = d$ tworzą brzeg obszaru Ω w przestrzeni. Teraz zajmiemy się wyliczeniem objętości tego obszaru. Niech $\mathbf{r}_{jl}$ będzie dowolnym punktem P_{jl}. Określamy

$$V_k = \sum_{j,l=1}^{k} f(\mathbf{r}_{jl})\Delta x_j \, \Delta y_l. \tag{8.1}$$

Sumuje się tutaj iloczyny pola powierzchni małych prostokątów P_{jl} pomnożone przez wartości funkcji w dowolnych ich punktach, czyli sumuje się objętości graniastosłupów o wysokości $f(\mathbf{r}_{jl})$. Granica tej sumy przy średnicy podziałów dążącej do zera jest więc objętością obszaru między dziedziną a wykresem funkcji. Jeśli $\lim_{k\to\infty} s_k = 0$ i jeśli ciąg $\{V_k\}$ jest zbieżny do granicy V przy $k \to \infty$, a granica $V = \lim_{k\to\infty} V_k$ nie zależy od wyboru punktów $\mathbf{r}_{jl}$, to mówimy, że funkcja f jest *całkowalna* w figurze P i piszemy

$$\lim_{k\to\infty} V_k = \int_P \int f(x,y)dx\,dy = \int_P f(x,y)ds. \tag{8.2}$$

Znalezioną objętość V nazywamy *całką podwójną* funkcji f nad figurą P. Ściśle biorąc V jest sumą algebraiczną dwóch wyrażeń: dodatniego dla tej części dziedziny, gdzie funkcja ma wartość dodatnią, oraz ujemnego, gdzie funkcja jest ujemna. Całka podwójna (8.2) jest odpowiednikiem całki oznaczonej dla funkcyj jednej zmiennej. Dla dwóch zmiennych nie znamy odpowiednika całki nieoznaczonej.

Podzbiór lineału $\mathbb{R}^n$ nazywamy *spójnym*, jeśli dowolne jego dwa punkty można połączyć krzywą ciągłą w całości zawartą w tym podzbiorze. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$; funkcję $f : A \to \mathbb{R}$ nazywamy *kawałkami ciągłą*, jeśli jej dziedzinę A można podzielić na skończenie wiele rozłącznych podzbiorów spójnych A_i, (tzn. $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$) takich, że funkcja f jest ciągła na każdym podzbiorze A_i.

Twierdzenie 1. Funkcja kawałkami ciągła na prostokącie P jest całkowalna.

Dowód dla funkcji ciągłej można znaleźć w książce: J.D. Marsden, A.J. Tromba *Vector Calculus*, Freeman and Co., New York 1988.

Lemat 1. Całka podwójna ma własności:

a) addytywność: $$\int_P [f(x,y) + g(xy)]ds = \int_P f(x,y)ds + \int_P g(x,y)ds;$$

b) jednorodność: $$\int_P cf(x,y)ds = c\int_P f(x,y)ds \quad \text{dla} \quad c \in \mathbb{R};$$

c) monotoniczność: jeśli $f(x,y) \leq g(x,y)$, to $$\int_P f(x,y)ds \leq \int_P g(x,y)ds;$$

d) addytywność dziedzin: jeśli P_i są takie, że $P = \bigcup_{i=1}^m P_i$ oraz $P_i \cap P_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to

$$\int_P f(x,y)\,ds = \sum_{i=1}^m \int_{P_i} f(x,y)\,ds.$$

Dowód. Własności a) i b) wynikają z odpowiednich własności sumy (8.1) oraz własności granic:

$$\lim_{k\to\infty}(T_k + S_k) = \lim_{k\to\infty} T_k + \lim_{k\to\infty} S_k, \qquad \lim_{k\to\infty}(cV_k) = c\lim_{k\to\infty} V_k.$$

Dla udowodnienia monotoniczności zauważmy, że jeśli $f(x,y) \geq 0$, to sumy (8.1) spełniają warunek $V_k \geq 0$ i ich granica (8.2) też jest nieujemna. Jeśli $f(x,y) \leq g(x,y)$, to $g(x,y) - f(x,y) \geq 0$, więc po wykorzystaniu a) i b) mamy

$$\int_P g(x,y)ds - \int_P f(x,y) = \int_P [g(x,y) - f(x,y)]ds \geq 0,$$

a teraz wystaczy jedną z całek przenieść na drugą stronę.

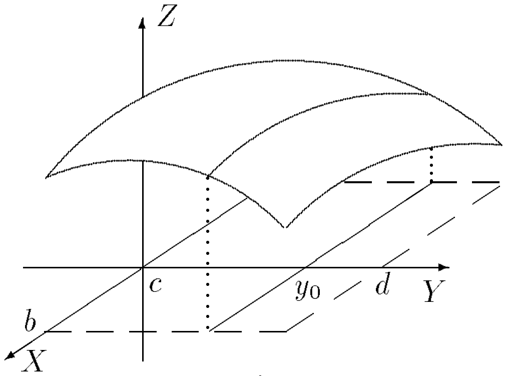
Dowód własności d) jest bardziej techniczny i polega na dobraniu podprzedziałów $\langle a_{j-1}, a_j \rangle$, $\langle b_{l-1}, b_l \rangle$ tak, żeby pasowały do prostokątów P_j w każdym podziale. ■

Teraz poznamy *zasadę Cavalierego* dla obliczania całek podwójnych. [Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647) – matematyk włoski, uczeń Galileusza. Jego badania o polach powierzchni i objętościach położyły podwaliny pod rachunek całkowy.] Rozważmy bryłę pod wykresem $z = f(x, y)$ nad prostokątem P, gdy funkcja f jest ciągła i dodatnia. Wtedy można rozważać dwa typy powierzchni: jedne otrzymane przez przekroje bryły płaszczyznami $y = y_0$ prostopadłymi do osi Y oraz inne określone przez przekroje płaszczynami $x = x_0$ prostopadłymi do osi X. Przekrój pierwszego typu jest obszarem płaskim pod wykresem funkcji $z = f(x, y_0)$, zob. Rys. 8.2. Po ustaleniu $y = y_0$ mamy funkcję jednej zmiennej $x \mapsto f(x, y_0)$, która jest ciągła na przedziale $\langle a, b \rangle$. Wobec tego pole powierzchni tego przekroju zależne od y_0 jest równe całce oznaczonej $A(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)dx$. Otrzymujemy funkcję, która każdemu $y_0 \in \langle c, d \rangle$ przypisuje pole powierzchni przekroju przechodzącego przez y_0. Mnożąc takie pole powierzchni przez grubość Δy pewnej warstwy otrzymujemy objętość $A(y_0)\Delta y$ takiej warstwy. Sumowanie tych objętości przybliża objętość całej bryły. A granica tych sum przy grubości warstw dążącej do zera jest całką $\int_c^d A(y)dy$ i zarazem objętością całej bryły:

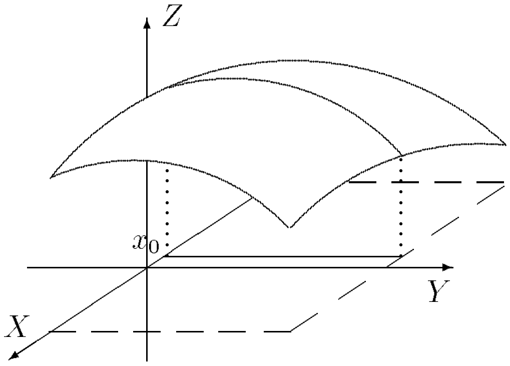
$$V = \int\limits_c^d A(y)dy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x, y)dx \right] dy.$$

Ostatnie wyrażenie w tym wzorze jest znane pod nazwą *całki iterowanej* z łacińskiego *iterare* = powtarzać. O ile w definicji (8.2) całki podwójnej widzieliśmy objętość jako sumę objętości graniastosłupów o polach podstaw $\Delta x\, \Delta y$, to teraz patrzymy na objętość jako na sumę plasterków o grubościach Δy. Skoro to jest ta sama objętość tej samej bryły, to możemy napisać

$$\int\limits_P f(x, y)\, ds = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x, y)dx \right] dy. \tag{8.3}$$



Rysunek 8.2



Rysunek 8.3

Jeśli zamienimy rolami x z y i wybierzemy przekroje dugiego typu, czyli przekroje płaszczyznami prostopadłymi do osi X (Rys. 8.3), to otrzymamy

$$\int\limits_P f(x, y)\, ds = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x, y)dy \right] dx. \tag{8.4}$$

Całka iterowana jest jedyną metodą, jaką umiemy wyliczać całki podwójne.

PRZYKŁAD 1. Niech $f(x,y) = x^2 + y$ oraz $P = \langle -1, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. Wyliczymy całkę $\int\int_P (x^2+y)dxdy$. Najpierw skorzystamy z równania (8.3):

$$\int_P (x^2+y)\,ds = \int_0^1 \left[\int_{-1}^1 (x^2+y)\,dx\right] dy.$$

W całce w nawiasie kwadratowym traktujemy y jako parametr stały:

$$\int_{-1}^1 (x^2+y)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + yx\right]_{x=-1}^1 = \frac{2}{3} + 2y.$$

Teraz całkujemy tę funkcję względem y w granicach od 0 do 1:

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{3} + 2y\right) dy = \left[\frac{2}{3}y + y^2\right]_0^1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

Natomiast według wzoru (8.4), czyli

$$\int_P (x^2+y)\,ds = \int_{-1}^1 \left[\int_0^1 (x^2+y)\,dy\right] dx.$$

należy zacząć od wyliczenia całki względem y:

$$\int_0^1 (x^2+y)\,dy = \left[x^2y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^1 = x^2 + \frac{1}{2}.$$

Całka tej funkcji względem x daje

$$\int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x\right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

Przekonujemy się, że wynik jest ten sam, co przedtem.

Powinniśmy określić całkę podwójną dla obszarów ogólniejszych niż prostokąty. W tym celu zdefiniujemy trzy typy podzbiorów płaszczyzny, a potem rozszerzymy na nie pojęcie całki podwójnej.

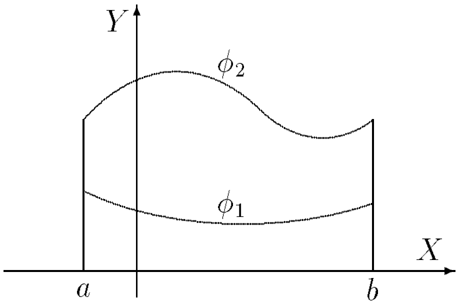
Niech będą dane dwie ciągłe funkcje jednej zmiennej o wartościach rzeczywistych: $\phi_1, \phi_2 : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ takie, że $\phi_1(x) \le \phi_2(x)$ dla wszystkich $x \in \langle a, b\rangle$. Niech D będzie zbiorem punktów leżących między wykresami tych funkcyj:

$$D = \{(x,y) : x \in \langle a, b\rangle, \quad y \in \langle \phi_1(x), \phi_2(x)\rangle\}.$$

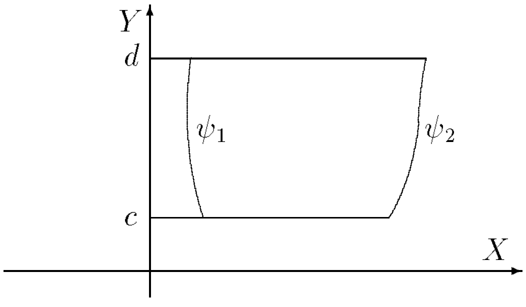
Nazywamy go *obszarem typu I*, zob. Rys. 8.4. Podobnie niech będą dane inne dwie funkcje ciągłe: $\psi_1, \psi_2 : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$ takie, że $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ dla wszystkich $y \in \langle c, d\rangle$. Niech D będzie zbiorem punktów leżących między wykresami tych funkcyj:

$$D = \{(x,y) : y \in \langle c, d\rangle, \quad x \in \langle \psi_1(y), \psi_2(y)\rangle\}.$$

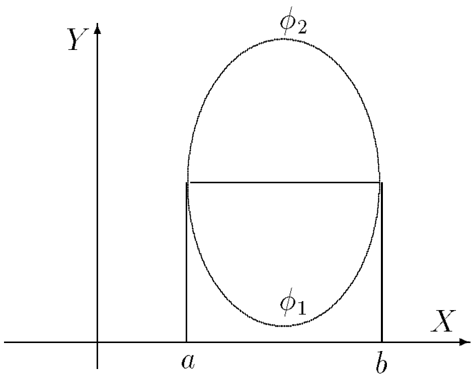
To będzie *obszar typu II* (Rys. 8.5). Wreszcie obszar typu III jest jednocześnie obszarem typu I i II, na przykład elipsa jest takim obszarem. Na Rys. 8.6 pokazujemy podział elipsy na dwa wykresy nad osią X, a na Rys. 8.7 na dwa wykresy na prawo od osi Y. Wykresy funkcyj ϕ_1 i ϕ_2 mają dwa punkty wspólne. Podobnie jest z wykresami funkcyj ψ_1 i ψ_2. Obszary wszystkich trzech typów nazywają się łącznie *obszarami elementarnymi*.



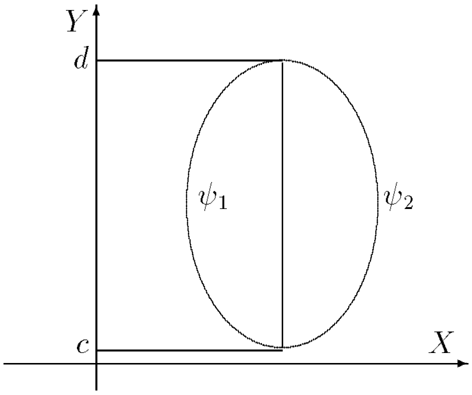
Rysunek 8.4



Rysunek 8.5



Rysunek 8.6



Rysunek 8.7

Teraz określamy *całkę iterowaną po obszarze elementarnym* $D \subset \mathbb{R}^2$. Niech $f : D \to \mathbb{R}$. Jeśli D jest typu I, to

$$\int_D f(x,y)ds = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx, \tag{8.5}$$

a jeśli D jest typu II, to

$$\int_D f(x,y)ds = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right] dy. \tag{8.6}$$

Zauważmy ciekawą rzecz. Jeśli $f(x,y) = 1$, to dla D typu I

$$\int_D f(x,y)ds = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \right] dx = \int_a^b [\phi_2(x) - \phi_1(x)]\, dx,$$

a to, jak wiemy z interperacji całki oznaczonej, jest polem powierzchni $|D|$ obszaru D. Podobnie dla D typu II

$$\int_D f(x,y)ds = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \right] dy = \int_c^d [\psi_2(y) - \psi_1(y)]\, dy = |D|.$$

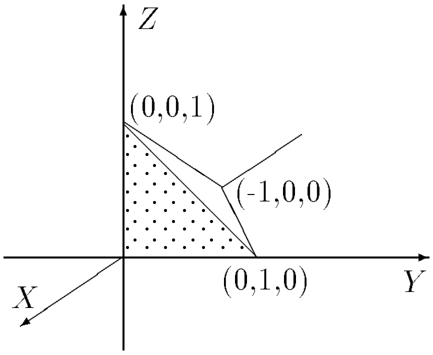
W ten sposób wykazaliśmy, że całka z funkcji stałej równej 1 jest polem powierzchni obszaru całkowania:

$$\int_D ds = |D|.$$

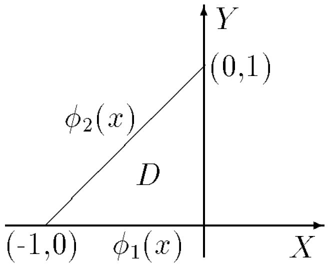
PRZYKŁAD 2. Znajdziemy objętość ostrosłupa ograniczonego płaszczynami $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$ oraz $x - y = z - 1$. Ostatnia płaszczyzna przecina osie współrzędnych w punktach $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, zob. Rys. 8.8. Ostrosłup ma podstawę tójkątną D, jej punkty (x, y) spełniają warunki $-1 \leq x \leq 0$ oraz $0 \leq y \leq x + 1$, zatem D jest obszarem typu I z funkcjami $\phi_1(x) = 0$, $\phi_2(x) = x + 1$, zob. Rys. 8.9. Dla dowolnego punktu $(x, y) \in D$ wysokość powierzchni nad płaszczyzną (X, Y) wynosi $z = 1 + x - y$, zatem szukana objętość jest dana przez całkę $\int_D (1 + x - y) ds$. Wykorzystując wzór (8.5) liczymy

$$\int_D (1 + x - y) ds = \int_{-1}^{0} \left[\int_0^{x+1} (1 + x - y) dy \right] dx = \int_{-1}^{0} \left[(1 + x)y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{x+1} dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \left[\frac{(x + 1)^2}{2} \right] dx = \left[\frac{(x + 1)^3}{6} \right]_{-1}^{0} = \frac{1}{6}.$$



Rysunek 8.8



Rysunek 8.9

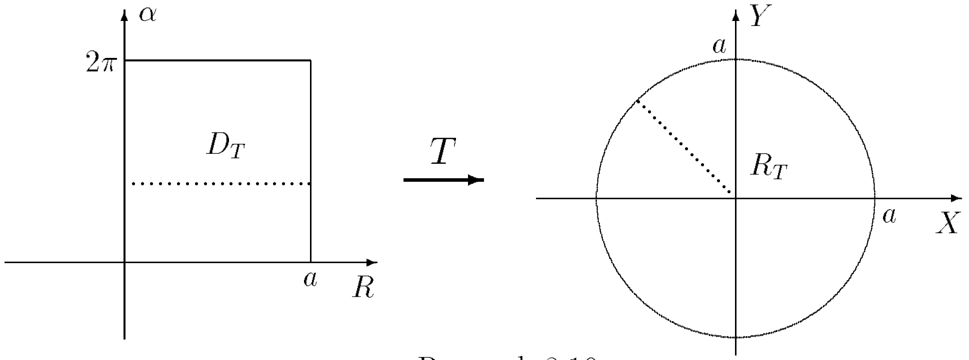
Warto zastanowić się nad tym, co odwzorowania z $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$ robią z podzbiorami płaszczyzny. Niech $D_T \subset \mathbb{R}^2$; niech $T : D_T \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją klasy C^1. Rozważmy obraz tego odwzorowania:

$$R_T = \{(x, y) = T(u, v) : (u, v) \in D_T\}.$$

Dla zrozumienia kształtu funkcji T warto zobaczyć, w co ona zamienia dziedzinę D_T.

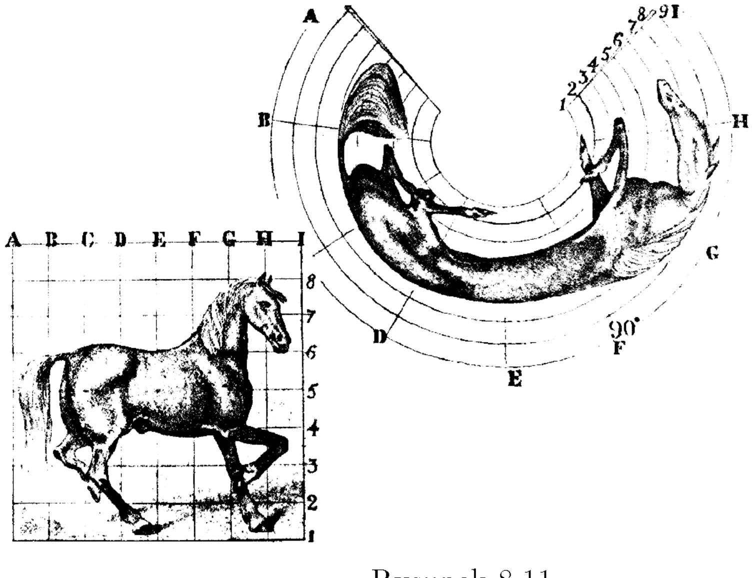
PRZYKŁAD 3. Niech $D_T = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$, czyli D_T jest prostokątem, i niech $T(r, \alpha) = (r \cos \alpha,\ r \sin \alpha)$. Widzimy, że odwzorowanie T jest przejściem od współrzędnych biegunowych do kartezjańskich. Jaki jest obraz tego odwzorowania? Mamy $(x, y) = (r \cos \alpha,\ r \sin \alpha)$. Skoro $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha = r^2 \leq a^2$, to zbiór punktów (x, y) z obrazu odwzorowania T spełnia warunek $x^2 + y^2 \leq a^2$, zatem R_T jest zawarte w kole domkniętym o promieniu a. Poza tym każdy punkt z koła o promieniu a można zapisać $(x, y) = (r \cos \alpha,\ r \sin \alpha)$

dla $0 \leq r \leq a$ i $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. W takim razie R_T pokrywa się z kołem o promieniu a. Oba zbiory D_T i R_T ukazane są na Rys. 8.10. Dla ułatwienia umieszczono rząd kropek na dziedzinie i ich obrazy w odwzorowaniu.



Rysunek 8.10

Następny Rys. 8.11 jest reprodukcją dzieła sztuki, które również ilustruje to samo odwzorowanie. Widać na nim, w co się zmienia obraz rumaka zamieszczony na dziedzinie. Jest na nim pewna różnica. Otóż tutaj zmienna kątowa jest odłożona na poziomym boku prostokąta, a promień na boku pionowym.



Rysunek 8.11

Niech będą dane dwa obszary D_T i R_T typu I lub II, odwzorowanie T na D_T klasy C^1 o obrazie R_T, tzn. $T(D_T) = R_T$, oraz całkowalna funkcja $f : R_T \to \mathbb{R}$. Chcemy wyrazić całkę podwójną $= \int_{R_T} f(x, y) ds$ jako całkę po D_T funkcji złożonej $f \circ T$. Załóżmy, że obszar D_T jest elementarny ze współrzędnymi oznaczonymi (u, v) oraz że obszar R_T jest elementarny ze współrzędnymi oznaczonymi (x, y). Odwzorowanie T jest zadane przez dwie funkcje-współrzędne:

$$T(u, v) = (x(u, v),\ y(u, v)) \quad \text{dla} \quad (u, v) \in D_T.$$

Wyznacznikiem Jacobiego albo *jakobianem* odwzorowania T nazywamywyznacznik pochodnej macierzowej i oznaczamy go $\partial(x,y)/\partial(u,v)$:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det DT(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{8.7}$$

[Karl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) – matematyk niemiecki, główne badania prowadził w teorii funkcyj i algebrze liniowej. Zasłużył się też dla mechaniki, gdzie opracował teorię całkowania równań różniczkowych dynamiki.]

PRZYKŁAD 3a. Weźmy przekształcenie współrzędnych biegunowych w kartezjańskie:

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha$$

i wyliczmy jego jakobian

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\alpha)} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{vmatrix} = r(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = r.$$

Twierdzenie 2 *o zamianie zmiennych.* Niech D_T, $R_T \subset \mathbb{R}^2$ będą obszarami elementarnymi i niech $T : D_T \to R_T$ będzie funkcją klasy C^1 wzajemnie jednoznaczną i nakładającą. Wtedy dla dowolnej funkcji całkowalnej $f : R_T \to \mathbb{R}$ zachodzi

$$\int_{R_T}\int f(x,y)\,dx\,dy = \int_{D_T}\int f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv. \tag{8.8}$$

Dowód można znaleźć w książce: J.D. Marsden, A.J. Tromba *Vector Calculus*, Freeman and Co., New York 1988 w § 6.3. W tym twierdzeniu mówimy o zamianie zmiennych (x,y) na zmienne (u,v), czyli przeciwnie do odwzorowania T, dlatego musi ono być wzajemnie jednoznaczne.

PRZYKŁAD 3b. Zastosujmy to twierdzenie do zamiany zmiennych kartezjańskich na biegunowe. Już wiemy, że jakobian przekształcenia wynosi r, więc wzór (8.8) daje

$$\int_{R_T}\int f(x,y)\,dx\,dy = \int_{D_T}\int f(r\cos\alpha,\, r\sin\alpha)\, r dr\, d\alpha. \tag{8.9}$$

Zastosujmy to do funkcji stałej $f(x,y) = 1$. Wtedy całka z lewej strony daje pole powierzchni zbioru R_T:

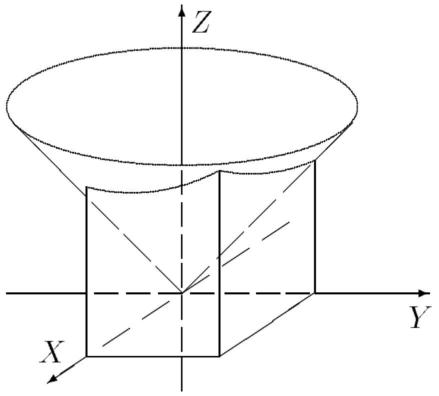
$$\int\int_{R_T} dx\,dy = \int\int_{D_T} r\,dr\,d\alpha.$$

O ile po lewej stronie „sumujemy” pola elementarnych prostokątów o bokach dx i dy, to po prawej pola innych prostokątów o bokach dr i $rd\alpha$. Wiadomo teraz, po co potrzebny jest czynnik r z jakobianu: sam kąt $d\alpha$ nie jest miarą długości, dopiero iloczyn $r\,d\alpha$ jest długością łuku okręgu. Ta zamiana zmiennych jest szczególnie korzystna, gdy obszarem całkowania jest koło o środku w początku układu, bo wtedy, jak pokazuje Rys. 8.10, przeciwobrazem koła jest prostokąt i całkowanie w zmiennych biegunowych jest łatwiejsze. Jeśli więc w szczególności R_T jest kołem o promieniu a, to dostajemy

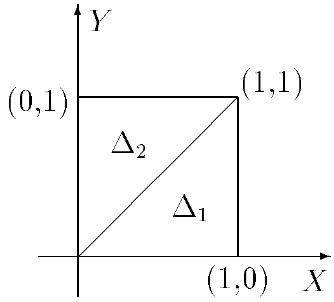
$$\int\int_{R_T} dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left[\int_o^a r\,dr\right]d\alpha = \int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2}\,d\alpha = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}d\alpha = \frac{a^2}{2}2\pi = \pi a^2.$$

Otrzymaliśmy znany wzór na pole powierzchni koła o promieniu a.

PRZYKŁAD 4. Wyliczmy całkę $\int_P \sqrt{x^2+y^2}ds$, gdzie $P = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$. Ta całka jest objętością trójwymiarowego obszaru o postawie kwadratowej i pionowych ścianach sięgających do stożka $z = \sqrt{x^2+y^2}$, zob. Rys. 8.12. Tak zapisana ta całka jest trudna do wyliczenia. Skoro funkcja podcałkowa jest prostą funkcją odległości r od początku układu na płaszczyźnie, to spróbujemy przejścia do współrzędnych biegunowych. To uprości funkcję podcałkową, ale nie obszar całkowania. Jednak to uproszczenie wystarczy do obliczenia całki.



Rysunek 8.12



Rysunek 8.13

Prostą $x = 1$ we współrzędnych biegunowych zapiszemy $r\cos\alpha = 1$, skąd $r = 1/\cos\alpha = \sec\alpha$. Podobnie prostej $y = 1$ we współrzędnych biegunowych odpowiada równanie $r = 1/\sin\alpha = \operatorname{cosec}\alpha$. W takim razie w odwzorowaniu $T(r,\alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ kwadrat P podzielony na dwa trójkąty $P = \Delta_1 \cup \Delta_2$ (zob. Rys. 8.13) jest obrazem obszaru $D = D_1 \cup D_2$, gdzie dla D_1 mamy $\alpha \in \langle 0, \pi/4\rangle$ oraz $r \in \langle 0, \sec\alpha\rangle$, zaś dla D_2 mamy $\alpha \in \langle \pi/4, \pi/2\rangle$ i $r \in \langle 0, \operatorname{cosec}\alpha\rangle$. Odwzorowanie T przekształca D_1 na trójkąt Δ_1, a D_2 na trójkąt Δ_2. Z symetrii funkcji $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ widzimy, że

$$\int_P \sqrt{x^2+y^2}ds = 2\int_{\Delta_1}\sqrt{x^2+y^2}ds.$$

Stosując wzór (8.9) otrzymujemy

$$\int\int_{\Delta_1}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int\int_{D_1}\sqrt{r^2}\,r dr\,d\alpha = \int\int_{D_1} r^2 dr\,d\alpha.$$

Teraz stosujemy całkę iterowaną

$$\int\limits_{D_1}\int r^2 dr\, d\alpha = \int\limits_0^{\pi/4}\left[\int\limits_0^{\sec\alpha} r^2 dr\right] d\alpha = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/4} \sec^3\alpha\, d\alpha.$$

Zamiast żmudnie liczyć całkę nieoznaczoną można zajrzeć to tablic. Jednym z takich wydawnictw jest: I.M. Ryżyk, I.S. Gradsztejn: *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów.* PWN, Warszawa 1964. Podaję gotowy wynik:

$$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{d\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\pi/4}{\cos^2\pi/4} + \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1/\sqrt{2}}{1/2} + \ln\operatorname{tg}(3\pi/8)\right] = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right],$$

gdzie wyliczono również tangens podanego kąta. W takim razie

$$\int\limits_{D_1}\int r^2 dr\, d\alpha = \frac{1}{6}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right],$$

więc całka, od której zaczęliśmy, wynosi

$$\int\limits_P \sqrt{x^2+y^2}\,ds = \frac{1}{3}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right].$$

PRZYKŁAD 5. Całka niewłaściwa $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx$ jest trudna do wyliczenia, gdyż nie jest znana funkcja pierwotna dla funkcji Gaussa e^{-x^2}. Zastosujemy pewien chwyt z wykorzystaniem całki podwójnej. Otóż zajmiemy się kwadratem całki I, ale w drugim czynniku użyjemy innej zmiennej calkowania:

$$I^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2} dy.$$

Taki iloczyn dwóch całek zamienia się na całkę podwójną z iloczynem funkcyj podcałkowych:

$$I^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{e}^{-y^2} dx\, dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2-y^2} dx\, dy.$$

Po przejściu do współrzędnych biegunowych otrzymujemy całkę

$$I^2 = \int\limits_0^{\infty}\left[\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-r^2} r\, d\alpha\right] dr = 2\pi\int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r\, dr.$$

Ze względu na obecność czynnika r przy funkcji wykładniczej można łatwo wykonać całkowanie względem r poprzez zamianę zmiennych $u = r^2$, $du = 2r\,dr$, $r\,dr = \frac{1}{2}du$:

$$\int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}\,du = -\frac{1}{2}e^{-u}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}.$$

W ten sposób otrzymujemy $I^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$, a stąd

$$I = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

8.2 Całki potrójne

Rozważmy prostopadłościan $P = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \langle e, h\rangle \subset \mathbb{R}^3$ i jego podział na mniejsze prostopadłościany zadany przez punkty

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b; \quad c = c_0 < c_1 < \ldots < c_k = d; \quad e_0 < e_1 < \ldots < e_k = h.$$

Owe mniejsze prostopadłościany zapiszemy

$$P_{jlm} = \langle a_{j-1}, a_j\rangle \times \langle c_{l-1}, c_l\rangle \times \langle e_{m-1}, e_m\rangle.$$

Oznaczmy

$$\Delta x_j = a_j - a_{j-1}, \quad \Delta y_l = c_l - c_{l-1}, \quad \Delta z_m = e_m - e_{m-1} \quad \text{dla wszech } j, l, m \in \{1, 2, ..., k\}.$$

W ten sposób każda z trzech prostopadłych krawędzi prostopadłościanu ma swój podział i każdy ten podział ma swoją średnicę $\max_j \Delta x_j$, $\max_l \Delta y_l$, $\max_m \Delta z_m$. Umówmy się, że owe trzy podziały mają tę samą średnicę s_k.

Rozważmy ciągłą i ograniczoną funkcję $f : P \to \mathbb{R}$. Niech $\mathbf{r}_{jlm}$ będzie dowolnym punktem P_{jlm}. Określamy sumę

$$W_k = \sum_{j,l,m=1}^{k} f(\mathbf{r}_{jlm})\Delta x_j\, \Delta y_l \Delta z_m. \tag{8.10}$$

Sumuje się tutaj iloczyny objętości małych prostopadłościanów P_{jlm} pomnożone przez wartości funkcji w wybranych ich punktach. Jeśli to komuś pomoże, można to określić jako czterowymiarowe objętości (*czterojętości*) czterowymiarowych „graniastosłupów” o wysokości wystającej w czwarty wymiar. Ściśle biorąc W jest sumą algebraiczną dwóch wyrażeń: dodatniego dla tej części dziedziny, gdzie funkcja ma wartość dodatnią, oraz ujemnego, gdzie funkcja jest ujemna. Jeśli $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = 0$ i jeśli ciąg $\{W_k\}$ jest zbieżny do granicy W przy $k \to \infty$, a granica $W = \lim\limits_{k\to\infty} W_k$ nie zależy od wyboru punktów $\mathbf{r}_{jlm}$, to mówimy, że funkcja f jest *całkowalna* w obszarze P i piszemy

$$\lim_{k\to\infty} W_k = \iiint_P f(x, y, z)dx\,dy\,dz = \int_P f(x, y, z)dv. \tag{8.11}$$

Znalezioną liczbę W nazywamy *całką potrójną* funkcji f nad obszarem P.

Twierdzenie 1. Funkcja kawałkami ciągła na prostopadłościanie P jest całkowalna.

Podobnie jak dla dwóch wymiarów, całka potrójna jest addytywna, jednorodna, monotoniczna i spełnia addytywność dziedzin.

Przy całkach potrójnych też spełniona jest zasada Cavalierego, która pozwala wyliczać całki potrójne poprzez *całkę iterowaną*:

$$\int_P f(x,y,z)dv = \int_a^b \left\{ \int_c^d \left[\int_e^h f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx. \tag{8.12}$$

Można napisać sześć wersji tego wzoru zmieniając kolejność całkowania, bo jest sześć permutacyj trzech elementów.

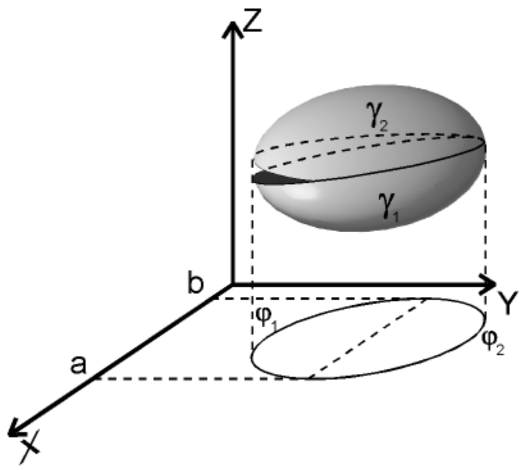
Teraz powinniśmy określić całkę potrójną dla obszarów ogólniejszych niż prostopadłościany. Jak w przypadku dwóch zmiennych ograniczymy naszą uwagę do obszarów szczególnego rodzaju. Niech będą dane dwie funkcje jednej zmiennej $\phi_1, \phi_2 : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ takie, że $\phi_1 \le \phi_2$, obszar $D \subset \mathbb{R}^2$ oraz dwie funkcje dwóch zmiennych $\gamma_1, \gamma_2 : D \to \mathbb{R}$ takie, że $\gamma_1(x,y) \le \gamma_2(x,y)$, a równość $\gamma_1(x,y) = \gamma_2(x,y)$ może się zdarzyć tylko na brzegu zbioru D, tzn. $\gamma_1(x,y) = \gamma_2(x,y) \Rightarrow (x,y) \in \partial D$. Ten ostatni warunek oznacza, że wykresy funkcyj γ_1, γ_2 mogą się przeciąć tylko nad brzegiem zbioru D, zob. Rys. 8.14. Mówimy, że obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *jest typu I*, jeśli można go zapisać jako

$$\Omega = \{(x,y,z) : x \in \langle a,b\rangle, \quad y \in \langle \phi_1(x), \phi_2(x)\,\rangle, \quad z \in \langle \gamma_1(x,y), \gamma_2(x,y)\,\rangle\} \tag{8.13}$$

(w tym przypadku $D = \{(x,y) : x \in \langle a,b\rangle, y \in \langle\phi_1(x), \phi_2(x)\rangle\}$ jest dwuwymiarowym obszarem typu I) lub

$$\Omega = \{(x,y,z) : y \in \langle a,b\rangle, \quad x \in \langle \phi_1(y), \phi_2(y)\,\rangle, \quad z \in \langle \gamma_1(x,y), \gamma_2(x,y)\,\rangle\}. \tag{8.14}$$

(W tym przypadku $D = \{(x,y) : y \in \langle a,b\rangle, x \in \langle\phi_1(y), \phi_2(y)\rangle\}$ jest dwuwymiarowym obszarem typu II). Mówimy, że Ω *jest typu II*, jeśli można go zapisać w postaci (8.13) lub (8.14) ze współrzędnymi x i z zamienionymi rolami, a *jest typu III*, jeśli można go zapisać w postaci (8.13) lub (8.14) ze współrzędnymi y i z zamienionymi rolami. Obszar *jest typu IV*, jeśli jest jednocześnie obszarem trzech wymienionych typów. Takim obszarem jest np. elipsoida. Obszar któregokolwiek z wymienionych typów nazywa się *elementarnym*.



Rysunek 8.14

Teraz określamy *całkę potrójną* po obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ typu I. Niech $f : \Omega \to \mathbb{R}$; wtedy

$$\int\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left[\int\limits_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dy \right\} dx, \tag{8.15}$$

jeśli Ω jest określone przez (8.13) lub w przeciwnym razie

$$\int\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = \int\limits_c^d \left\{ \int\limits_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} \left[\int\limits_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dx \right\} dy. \tag{8.16}$$

PRZYKŁAD 1. Niech obszar Ω będzie ograniczony przez płaszczyzny $x = 0,\ y = 0,\ z = 2$ i powierzchnię $z = x^2 + y^2$ dla $x \geq 0,\ y \geq 0$. Wyliczymy całkę $\int\limits_{\Omega} x\,dv$. Wyrazimy ten zbiór jako obszar typu I:

$$\gamma_1(x,y) = x^2+y^2,\ \ \gamma_2(x,y) = 2,\ \ \phi_1(x) = 0,\ \ \phi_2(x) = \sqrt{2-x^2},\ \ a = 0,\ \ b = \sqrt{2}.$$

Według wzoru (8.15)

$$\int\limits_{\Omega} x\,dv = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left[\int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} \left(\int\limits_{x^2+y^2}^{2} x\,dz \right) dy \right] dx = \int\limits_o^{\sqrt{2}} \left[\int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2-x^2-y^2)\,dy \right] dx$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{2}} x \left[(2-x^2)^{3/2} - \frac{(2-x^2)^{3/2}}{3} \right] dx = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{2x}{3}(2-x^2)^{3/2} dx$$

$$= -\left[\frac{2}{15}(2-x^2)^{5/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2}{15} \cdot 2^{5/2} = \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

Istnieje też wzór na zamianę zmiennych dla całek potrójnych. Przedtem jednak trzeba zdefiniować jakobian w trzech wymiarach. Niech będą dane dwa obszary elementarne D_T ze współrzędnymi (u,v,w) i R_T ze współrzędnymi (x,y,z) oraz odwzorowanie T klasy C^1 na D_T i o obrazieR_T, tzn. $T(D_T) = R_T$. Jest ono zadane przez trzy funkcje-współrzędne:

$$T(u,v,w) = (x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,,v,w)) \quad \text{dla} \quad (u,v,w) \in D_T.$$

Wyznacznikiem Jacobiego lub *jakobianem* odwzorowania T nazywamy

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det DT(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}. \tag{8.17}$$

PRZYKŁAD 2. Zamiana współrzędnych kartezjańskich na kuliste. Rysujemy wektor wodzący $\mathbf{r}$ na tle osi X, Y, Z kartezjańskiego układu współrzędnych, patrz Rys. 8.15. Rzutowanie końca wektora $\mathbf{r}$ równolegle do płaszczyzny (X,Y) na oś Z daje współrzędną z.

Rzutowanie wektora $\mathbf{r}$ na płaszczyznę (X, Y) daje wektor o długości ρ. Jeśli wprowadzimy kąt θ między wektorem wodzącym a osią Z, to możemy zapisać

$$z = r\cos\theta, \qquad \rho = r\sin\theta,$$

gdzie $r = ||\mathbf{r}||$. Teraz rzutujemy wektor o długości ρ na osie X i Y otrzymując pozostałe współrzędne kartezjańskie x i y. Jeśli wprowadzimy kąt ϕ między osią X a rzutem wektora $\mathbf{r}$ na płaszczyznę (X, Y), to możemy napisać

$$x = \rho\cos\phi, \qquad y = \rho\sin\phi.$$

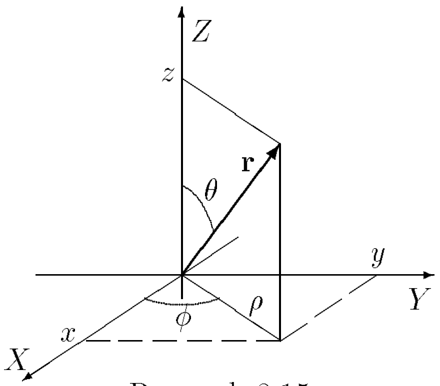
Łącząc to z poprzednimi wzorami możemy napisać

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi, \\ y &= r\sin\theta\sin\phi, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Trzy współrzędne r, θ, ϕ nazywają się *kulistymi* lub *sferycznymi*. Mają one następujący zakres zmienności:

$$r \in \langle 0, \infty), \quad \theta \in \langle 0, \pi\rangle, \quad \phi \in \langle 0, 2\pi).$$

Wzór (8.18) stanowi przejście od współrzędnych kulistych do kartezjańskich.



Rysunek 8.15

Wyliczmy jakobian przejścia (8.18)

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}.$$

Rozwijamy ten wyznacznik względem trzeciego wiersza:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,\theta,\phi)} = \cos\theta\,(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix}$$

$$-r\sin\theta\,(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta \left(r^2 \cos\theta \sin\theta \cos^2\phi + r^2 \sin\theta \cos\theta \sin^2\phi \right) + r \sin\theta \left(r \sin^2\theta \cos^2\phi + r \sin^2\theta \sin\phi \right)$$
$$= r^2 \cos^2\theta \sin\theta (\cos^2\phi + \sin^2\phi) + r^2 \sin^2\theta (\cos^\phi + \sin^2\phi)$$
$$= r^2 \cos^2\theta \sin\theta + r^2 \sin^3\theta = r^2 \sin\theta.$$

W takim razie jakobian przejścia od współrzędnych kulistych do kartezjańskich wynosi

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = r^2 \sin\theta \tag{8.19}$$

Zwróćmy uwagę na pewną osobliwość: na początku tego przykładu mówiliśmy o zamianie współrzędnych kartezjańskich na kuliste, a tymczasem odwzorowanie (8.18) jest od współrzędnych kulistych do kartezjańskich. Może to się wydać niekonsekwencją, ale taka jest terminologia.

Twierdzenie 2 *o zamianie zmiennych.* Niech D_T, $R_T \subset \mathbb{R}^3$ będą obszarami elementarnymi i niech $T : D_T \to R_T$ będzie funkcją klasy C^1 wzajemnie jednoznaczną i nakładającą. Wtedy dla dowolnej funkcji całkowalnej $f : R_T \to \mathbb{R}$ zachodzi

$$\int\int_{R_T}\int f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \int\int_{D_T}\int f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\, dv\, dw. \tag{8.20}$$

Dowód można znaleźć w książce: J.D. Marsden, A.J. Tromba *Vector Calculus*, Freeman and Co., New York 1988 w § 6.3.

PRZYKŁAD 3. Wyliczamy całkę $\int_K (x^2+y^2+z^2)\, z^2 dv$, gdzie K jest kulą o środku w początku układu i promieniu a. Taki obszar całkowania sugeruje przejście do współrzędnych kulistych, gdyż dla odwzorowania T danego wzorami (8.18) i dla $R_T = K$ obszar D_T jest prostopadłościanem $D_T = \langle 0,a\rangle \times \langle 0,\pi\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$, co jest bardzo korzystne dla całki potrójnej. Najpierw wyrażamy funkcję podcałkową przez współrzędne kuliste:

$$f(x(r,\theta,\phi), y(r,\theta,\phi), z(r,\theta,\phi)) = \left(r^2 \sin^2\theta \cos^2\phi + r^2 \sin^2\theta \sin^2\phi + +r^2 \cos^2\theta \right) r^2 \cos^2\theta$$
$$= r^2 \left[\sin^2\theta \left(\cos^2\phi + \sin^2\phi \right) + \cos^2\theta \right] r^2 \cos^2\theta = r^2 r^2 \cos^2\theta = r^4 \cos^2\theta.$$

Teraz wykorzystujemy wzór (8.20)

$$\int_K f(x,y,z)\, dv = \int_{R_T} (x^2+y^2+z^2)\, z^2 dv = \int\int_{D_T}\int r^4 \cos^2\theta\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$
$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^a r^6 \cos^2\theta \sin\theta\, dr \right] d\theta \right\} d\phi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{a^7}{7} \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta \right] d\phi.$$

Przy zamianie zmiennej $u = \cos\theta$, $du = -\sin\theta\, d\theta$ całka nieoznaczona względem θ wynosi

$$\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = -\int u^2 du = \frac{u^3}{3} = -\frac{1}{3}\cos^3\theta.$$

Wstawiamy to do poprzedniego wzoru

$$\int_K f\, dv = -\frac{a^7}{7\cdot 3} \int_0^{2\pi} \left[\cos^3\theta \right]_0^{\pi} d\phi = \frac{2a^7}{21} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4\pi a^7}{21}.$$

8.3 Całki krzywoliniowe i powierzchniowe

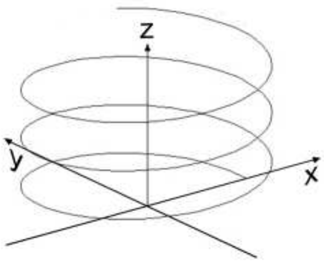
Niech $U \subset \mathbb{R}^3$, $f : U \to \mathbb{R}$, niech $\boldsymbol{\sigma} : \langle a, b\rangle \to U$ będzie parametryzacją klasy C^1 pewnej krzywej K i niech $f \circ \boldsymbol{\sigma}$ będzie funkcją ciągłą na $\langle a, b\rangle$. Wtedy definiujemy

$$\int_K f\, dl = \int_a^b f(\boldsymbol{\sigma}(t)) \left\| \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} \right\| dt \tag{8.21}$$

i nazywamy *całką krzywoliniową funkcji skalarnej f po krzywej K* lub *całką krzywoliniową nieskierowaną.*

PRZYKŁAD 1. Niech K będzie linią śrubową o parametryzacji $\boldsymbol{\sigma} : \langle 0, 2\pi/\omega\rangle \to \mathbb{R}^3$ danej wzorem $\boldsymbol{\sigma}(t) = (a\cos\omega t,\ a\sin\omega t,\ vt)$ (zob. Rys. 8.16), zaś $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Wyliczymy całkę $\int_K f(x, y, z)\, dl$. Najpierw potrzeba nam normy z pochodnej funkcji $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\left\| \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} \right\| = \sqrt{\left(\frac{d\, a\cos\omega t}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\, a\sin\omega t}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\, vt}{dt}\right)^2}$$
$$= \sqrt{a^2\omega^2 \sin^2\omega t + a^2\omega^2\cos^2\omega t + v^2} = \sqrt{a^2\omega^2 + v^2}.$$



Rysunek 8.16

Liczymy złożenie $f \circ \boldsymbol{\sigma}$:

$$f(\boldsymbol{\sigma}(t)) = x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = a^2\cos^2\omega t + a^2\sin^2\omega t + v^2t^2 = a^2 + v^2t^2.$$

Teraz jesteśmy gotowi liczyć całkę krzywoliniową:

$$\int_K f(x, y, z)\, dl = \int_0^{2\pi/\omega} \left(a^2 + v^2t^2\right) \sqrt{a^2\omega^2 + v^2}\, dt = \sqrt{a^2\omega^2 + v^2} \left[a^2 t + v^2\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi/\omega}$$
$$= \sqrt{a^2\omega^2 + v^2} \left[a^2\frac{2\pi}{\omega} + v^2\frac{(2\pi)^3}{3\omega^3}\right] = \frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2 + \frac{v^2}{\omega^2}} \left(3a^2 + 4\pi^2\frac{v^2}{\omega^2}\right).$$

Niech $U \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^3$, niech $\boldsymbol{\sigma} : \langle a, b\rangle \to U$ będzie parametryzacją pewnej krzywej K klasy C^2 i niech $\mathbf{F} \circ \boldsymbol{\sigma}$ będzie funkcją ciągłą na $\langle a, b\rangle$. Wtedy definiujemy

$$\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}\, dt \tag{8.22}$$

i nazywamy *całką krzywoliniową pola wektorowego* $\mathbf{F}$ *po krzywej K* lub *całką krzywoliniową skierowaną.*

PRZYKŁAD 2. Niech K będzie linią śrubową o parametryzacji $\boldsymbol{\sigma} : \langle 0, 2\pi/\omega\rangle \to \mathbb{R}^3$ danej wzorem $\boldsymbol{\sigma}(t) = (a\cos\omega t,\, a\sin\omega t,\, vt)$, zaś $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$. Wyliczymy całkę $\int_K \mathbf{F}(x,y,z)\cdot d\mathbf{r}$. Już znamy pochodną funkcji $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \left(\frac{d\,a\cos\omega t}{dt},\ \frac{d\,a\sin\omega t}{dt},\ \frac{d\,vt}{dt}\right) = (-a\omega\sin\omega,\ a\omega\cos\omega t,\ v)\,.$$

Liczymy skaloczyn $\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma}'$:

$$\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma}'(t) = \boldsymbol{\sigma}(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}'(t) = a\cos\omega t\,(-a\omega t\sin\omega t) + a\sin\omega t\; a\omega\cos\omega t + vt\,v = v^2 t.$$

Teraz możemy liczyć całkę krzywoliniową:

$$\int\limits_K \mathbf{F}(x,y,z)\cdot d\mathbf{r} = \int\limits_0^{2\pi/\omega} v^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}v^2t^2\right]_0^{2\pi/\omega} = 2\pi^2v^2/\omega^2.$$

Jeśli we wzorze (8.22) wyrazimy iloczyn skalarny przez współrzędne obu czynników, to napiszemy

$$\int\limits_K \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\limits_a^b \left(F_1(\boldsymbol{\sigma}(t))\frac{dx_1}{dt} + F_2(\boldsymbol{\sigma}(t))\frac{dx_2}{dt} + F_3(\boldsymbol{\sigma}(t))\frac{dx_3}{dt}\right)\,dt.$$

Przy całkowaniu przez podstawienie w całkach jednej zmiennej zachodzi $(dx_i/dt)\,dt = dx_i$, więc rozważaną całkę zapisuje się też formalnie

$$\int\limits_K \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\limits_K \left[F_1(\mathbf{r})dx_1 + F_2(\mathbf{r})dx_2 + F_3(\mathbf{r})dx_3\right].$$

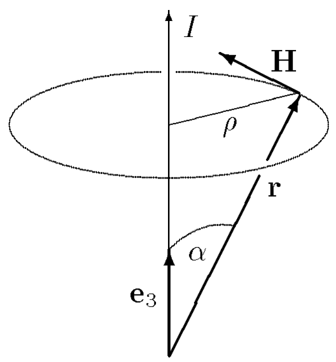
PRZYKŁAD 3. Rozważmy natężenie pola magnetycznego $\mathbf{H}$ wytwarzanego wokół prostoliniowego przewodnika z prądem pokrywającego się z osią Z:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi}\,\frac{\mathbf{e}_3\times\mathbf{r}}{\rho^2}, \tag{8.23}$$

gdzie ρ jest odległością punktu o promieniu wodzącym $\mathbf{r}$ od osi Z, zob. Rys. 8.17. Skoro iloczyn wektorowy ma wartość $||\mathbf{e}_3\times\mathbf{r}|| = r\sin\alpha = \rho$, to wartość wektora $\mathbf{H}$ wynosi

$$||\mathbf{H}|| = \frac{I}{2\pi}\,\frac{||\mathbf{e}_3\times\mathbf{r}||}{\rho^2} = \frac{I\rho}{2\pi\rho^2} = \frac{I}{2\pi\rho}. \tag{8.24}$$

A to jest znany wzór na wartość natężenia pola magnetycznego dla tej konfiguracji.



Rysunek 8.17

Chcemy wyliczyć całkę krzywoliniową tego pola $\int_K \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$ po równoległym do płaszczyzny (X, Y) okręgu K o promieniu a i o środku na osi Z. W tym celu powinniśmy znaleźć jawną postać pola (8.23), do czego potrzebna jest postać iloczynu wektorowego

$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ x & y \end{vmatrix} = -\left(\mathbf{e}_1 y - \mathbf{e}_2 x\right)$$

$$= -y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$$

oraz parametryzacja okręgu K

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (\rho \cos \omega t, \rho \sin \omega t, b),$$

gdzie b oznacza stałą współrzędną $z = b$ dla punktów na okręgu. Do całki krzywoliniowej potrzebna jest pochodna

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = (-\rho\omega \sin \omega t, \rho\omega \cos \omega t, 0)$$

oraz iloczyn skalarny

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \frac{I}{2\pi\rho^2} \left(\rho^2\omega \sin^2 \omega t + \rho^2\omega \cos^2 \omega t\right) = \frac{I}{2\pi\rho^2}\, \rho^2\omega = \frac{I\omega}{2\pi}.$$

Wreszcie zapisujemy całkę:

$$\int\limits_K \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int\limits_0^{2\pi/\omega} \frac{I\omega}{2\pi}\, dt = \frac{I\omega}{2\pi}\, t\Big|_0^{2\pi/\omega} = \frac{I\omega}{2\pi}\, \frac{2\pi}{\omega} = I.$$

Udało się – udowodniliśmy prawo Ampere'a.

Warto zaznaczyć, że fizycy tę całkę liczą prościej nie uciekając się do parametryzacji. Otóż należy zauważyć, że wektory $\mathbf{H}$ i $d\mathbf{r}$ są zgodnie równoległe, więc ilch iloczyn skalarny jest równy iloczynowi wartości $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = H\, dl$, gdzie dl jest elementem łuku okręgu. W takim razie całkę liczymy względem l korzystając z (8.24):

$$\int\limits_K \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int\limits_0^{2\pi\rho} H\, dl = H \int\limits_0^{2\pi\rho} dl = H \cdot 2\pi\rho = \frac{I}{2\pi\rho}\, 2\pi\rho = I.$$

Twierdzenie 1. Jeśli $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$, to

$$\int\limits_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\boldsymbol{\sigma}(b)) - f(\boldsymbol{\sigma}(a)).$$

Dowód. Wprowadźmy oznaczenie $g = f \circ \boldsymbol{\sigma}$. Takie funkcje rozważaliśmy w § 7.2. Wzór (7.26) pozwala nam napisać

$$\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{\sigma}(t)}{dt} = \frac{d(f \circ \boldsymbol{\sigma})(t)}{dt} = g'(t).$$

Dzięki temu według definicji (8.22) mamy

$$\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \nabla f(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}\, dt = \int_a^b g'(t)\, dt = g(b) - g(a) = f(\boldsymbol{\sigma}(b)) - f(\boldsymbol{\sigma}(a)). \blacksquare$$

Warto wprowadzić dwa punkty w $\mathbb{R}^3$: punkt B z wektorem wodzącym $\mathbf{r}_B = \boldsymbol{\sigma}(b)$ – nazwiemy go *punktem końcowym* całki krzywoliniowej – oraz punkt A z $\mathbf{r}_A = \boldsymbol{\sigma}(a)$ – nazwiemy *punktem początkowym* całki. Wtedy wzór z Twierdzenia 1 można zapisać

$$\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_B) - f(\mathbf{r}_A). \tag{8.25}$$

Widać, że całka w takim wypadku zależy tylko od końców krzywej K, a nie zależy od kształtu samej krzywej. Wtedy mówimy, że pole wektorowe $\mathbf{F}$ jest *zachowawcze*. Otrzymaliśmy wzór bardzo podobny do całki oznaczonej w przypadku funkcyj jednej zmiennej. Jeśli f uznamy za funkcję pierwotną, a $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$ za pochodną, to podany wzór mówi, że całka pochodnej jest różnicą funkcji pierwotnej na końcach odcinka całkowania.

PRZYKŁAD 4. Mamy wyliczyć całkę krzywoliniową

$$\int_K (yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz)$$

po prostej K łączącej punkt (–1,0,1) z punktem (1,1,1). Warto zauważyć, że występujące pod znakiem całki pole wektorowe $\mathbf{F} = (yz,\, xz,\, xy)$ jet gradientem funkcji skalarnej $f(x,y,z) = xyz$. Dzięki wzorowi (8.25) możemy napisać

$$\int_K (yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz) = f(1,1,1) - f(-1,0,1) = 1\cdot 1\cdot 1 - (-1)\cdot 0\cdot 1 = 1 - 0 = 1.$$

Podzbiór $S \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy *powierzchnią sparametryzowaną* klasy C^1, jeśli istnieje podzbiór $D \subset \mathbb{R}^2$ i funkcja $\boldsymbol{\Phi} : D \to \mathbb{R}^3$ klasy C^1 takie, że $S = \boldsymbol{\Phi}(D)$. Funkcję $\boldsymbol{\Phi}$ nazywamy *parametryzacją* powierzchni S i piszemy

$$\boldsymbol{\Phi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)). \tag{8.26}$$

Możemy powiedzieć, że powierzchnią sparametryzowaną jest obraz pewnej funkcji dwóch zmiennych. *Powierzchnią* nazywamy sumę mnogościową powierzchni sparametryzowanych.

PRZYKŁAD 5. Sfera jest sumą mnogościową dwóch powierzchni sparametryzowanych. Niech D będzie kołem domkniętym o promieniu a:

$$D = \{(u,v) : u^2 + v^2 \le a^2\}.$$

Określamy funkcję $\boldsymbol{\Phi}_1$:

$$\boldsymbol{\Phi}_1(u,v) = \left(u, v, \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}\right).$$

Po porównaniu z wzorem (8.26) zauważamy, że $x(u,v) = u$, $y(u,v) = v$, więc w napisanym wzorze możemy u zastąpić przez x, a v przez y:

$$\boldsymbol{\Phi}_1(x,y) = \left(x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right).$$

Obrazem tej funkcji jest górna połowa sfery o promieniu a będąca wykresem funkcji $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. W takim razie pierwszą powierzchnią sparametryzowaną jest półsfera górna $S_1 = \boldsymbol{\Phi}_1(D)$.

Określamy funkcję $\boldsymbol{\Phi}_2$

$$\boldsymbol{\Phi}_2(x,y) = \left(x, y, -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right).$$

Z powodu minusa przy trzeciej współrzędnej druga powierzchnia sparametryzowana jest półsferą dolną $S_2 = \boldsymbol{\Phi}_2(D)$. Suma mnogościowa tych półsfer $S = S_1 \cup S_2$ jest całą sferą o promieniu a.

Na powierzchni sparametryzowanej S możemy rozważać krzywe odpowiadające zmianom jednego z parametrów:

$$\boldsymbol{\sigma}_1(u) = \boldsymbol{\Phi}(u, v_0) \quad \text{z ustalonym} \quad v = v_0$$

oraz

$$\boldsymbol{\sigma}_2(v) = \boldsymbol{\Phi}(u_0, v) \quad \text{z ustalonym} \quad u = u_0$$

Skoro funkcja $\boldsymbol{\Phi}$ jest różniczkowalna, to w dowolnym punkcie dziedziny $(u,v) \in D$ możemy zdefiniować wektory styczne do krzywych $\boldsymbol{\sigma}_1$ i $\boldsymbol{\sigma}_2$

$$\mathbf{t}_u = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_1}{du}, \quad \mathbf{t}_v = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_2}{dv}. \tag{8.27}$$

Pochodne stojące po prawej stronie można też zapisać inaczej

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}_1}{du}(u_0) = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{e}_3. \tag{8.28}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}_2}{dv}(v_0) = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{e}_3. \tag{8.29}$$

W takim zapisie

$$\mathbf{t}_u(u,v) = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}(u,v), \quad \mathbf{t}_v(u,v) = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}(u,v).$$

Wektory $\mathbf{t}_u(u,v)$, $\mathbf{t}_v(u,v)$ wyznaczają płaszczyznę styczną do powierzchni S w punkcie $\boldsymbol{\Phi}(u,v)$.

Powierzchnia sparametryzowana S jest *gładka w punkcie* $\boldsymbol{\Phi}(u,v)$ jeśli

$$\mathbf{t}_u(u,v) \times \mathbf{t}_v(u,v) \neq 0. \tag{8.30}$$

Ten warunek oznacza po pierwsze, że oba wektory styczne muszą być niezerowe, a po drugie, że nie mogą być równoległe, bo wtedy iloczyn wektorowy byłby zerem. Powierzchnia sparametryzowana nazywa się *gładka*, jeśli jest gładka w każdym punkcie. Skoro wektory $\mathbf{t}_u\,\mathbf{t}_v$ są styczne do S, to ich iloczyn wektorowy $\mathbf{m} = \mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v$ jest wektorem prostopadłym do S.

PRZYKŁAD 5a. Wyliczmy wektory styczne do górnej półsfery zadanej wzorem

$$\boldsymbol{\Phi}(u,v) = u\,\mathbf{e}_1 + v\,\mathbf{e}_2 + \sqrt{a^2-u^2-v^2}\,\mathbf{e}_3.$$

Mamy

$$\mathbf{t}_u(u,v) = \mathbf{e}_1 - \frac{u}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}\,\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 - \frac{x}{z}\,\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{t}_v(u,v) = \mathbf{e}_2 - \frac{v}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}\,\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 - \frac{x}{z}\,\mathbf{e}_3.$$

Wektory te nie są określone na brzegu tej półsfery, gdyż tam $z = \sqrt{a^2-u^2-v^2} = 0$. Przy okazji stwierdzamy, że nasza powierzchnia sparametryzowana nie jest klasy C^1 bo funkcja $\boldsymbol{\Phi}$ nie ma pochodnej na brzegu dziedziny. Na przekroju półsfery z płaszczyzną (Y,Z) mamy $\mathbf{t}_u(0,v) = \mathbf{e}_1$, czyli tam wektor $\mathbf{t}_u$ jest stały. Podobnie $\mathbf{t}_v(u,0) = \mathbf{e}_2$, więc $\mathbf{t}_v$ jest stały na przekroju półsfery z płaszczyzną (X,Z).

Wyliczmy iloczyn wektorowy

$$\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = \left(\mathbf{e}_1 - \frac{x}{z}\,\mathbf{e}_3\right) \times \left(\mathbf{e}_2 - \frac{y}{z}\,\mathbf{e}_3\right) = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 - \frac{x}{z}\,\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 - \frac{y}{z}\,\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3$$

$$= \mathbf{e}_3 + \frac{x}{z}\,\mathbf{e}_1 + \frac{y}{z}\,\mathbf{e}_2.$$

Widzimy, że jest on niezerowy wszędzie tam, gdzie jest określony, więc nasza powierzchnia sparametryzowana jest gładka wszędzie poza brzegiem. Otrzymany wektor można zapisać inaczej:

$$\mathbf{m}(u,v) = \mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = \frac{1}{z}\,(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) = \frac{\mathbf{r}}{z}.$$

Stwierdzamy, ze wektor $\mathbf{m}$ jest równoległy do wektora wodzącego $\mathbf{r}$, więc jest prostopadły do sfery o środku w początku układu współrzędnych.

PRZYKŁAD 6. Rozważmy tę samą sferę z parametryzacją przez kątowe współrzędne kuliste θ, φ. Wybieramy prostokąt $D = \{(\theta,\varphi) : \theta \in (0,\pi),\ \varphi \in \langle 0, 2\pi)\}$ i określamy funkcję $\boldsymbol{\Phi}$:

$$\boldsymbol{\Phi}(\theta,\varphi) = a\mathbf{e}_1 \sin\theta\cos\varphi + a\mathbf{e}_2 \sin\theta\sin\varphi + a\mathbf{e}_3\cos\theta = \mathbf{r}.$$

Liczymy wektory styczne:

$$\mathbf{t}_\theta = a\mathbf{e}_1\cos\theta\cos\varphi + a\mathbf{e}_2\cos\theta\sin\varphi - a\mathbf{e}_3\sin\theta.$$

$$\mathbf{t}_\varphi = -a\mathbf{e}_1\sin\theta\sin\varphi + a\mathbf{e}_2\sin\theta\cos\varphi.$$

Drugi z tych wektorów jest zerowy dla $\theta = 0$ oraz $\theta = \pi$, czyli na biegunach. Zatem sfera w ten sposób sparamateryzowana nie jest gładka na biegunach. Właśnie dlatego $\theta = 0$ i $\theta = \pi$ wyrzuciliśmy z dziedziny. Teraz liczymy iloczyn wektorowy

$$\mathbf{t}_\theta \times \mathbf{t}_\varphi = a^2\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi - a^2\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 \sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi$$

$$+a^2\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \sin\theta \sin\varphi - a^2\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 \sin^2\theta \cos\varphi$$
$$= a^2\mathbf{e}_3 \sin\theta\cos\theta + a^2\mathbf{e}_2 \sin^2\theta\sin\varphi + a^2\mathbf{e}_1 \sin^2\theta\cos\varphi$$
$$= (a\mathbf{e}_1 \sin\theta\cos\varphi + a\mathbf{e}_2 \sin\theta\sin\varphi + a\mathbf{e}_3\cos\theta)\, a\sin\theta = \mathbf{r}a\sin\theta.$$

Otrzymany wektor jest niezerowy wszędzie poza biegunami i jest równoległy do wektora wodzącego, co nie powinno być zaskoczeniem, bo mamy otrzymać wektor prostopadły do sfery.

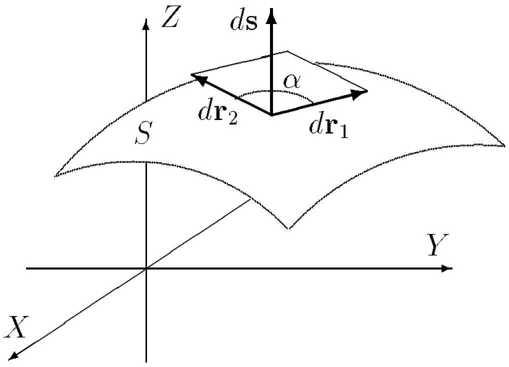
Jeśli element powierzchni skierowanej $d\mathbf{s} = \mathbf{t}_\theta \times \mathbf{t}_\varphi\, d\theta d\varphi$ zechcemy zapisać z użyciem wektora jednostkowego $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r = \mathbf{r}/a$, to otrzymamy

$$d\mathbf{s} = \mathbf{n}\, a^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi.$$

Stąd widać, jaka jest wartość elementu powierzchni sfery o promieniu a wyrażona przez współrzędne kuliste: $ds = a^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi$. Ten wzór jest znany raczej pod postacią

$$ds = r^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi.$$

Zastanówmy się, z czym jest związany iloczyn wektorowy $\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v$. Otóż z definicji (8.27) da się zauważyć, że $\mathbf{t}_u du = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_1}{du} du = d\mathbf{r}_1$ jest przyrostem wektora wodzącego wzdłuż kierunku zmiany parametru u. Podobnie $\mathbf{t}_v dv = d\mathbf{r}_2$ jest przyrostem wektora wodzącego w kierunku zmiany v. Iloczyn wektorowy tych przyrostów ma wartość $||d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2|| = ||d\mathbf{r}_1||\,||d\mathbf{r}_2|| \sin\alpha$ pola powierzchni równoległoboku rozpiętego na tych dwóch wektorach. (Tutaj α jest kątem między wektorami-czynnikami – zob. Rys. 8.18).



Rysunek 8.18

W takim razie możemy napisać $d\mathbf{s} = d\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ i interpretować to jako wektor prostopadły do powierzchni S o wartości równej polu powierzchni czworoboku krzywoliniowego odpowiadającego przyrostom prametrów du i dv:

$$d\mathbf{s} = d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2 = \mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\, du\, dv. \tag{8.31}$$

Nazwiemy to *skierowanym elementem powierzchni S*. Wprowadza się też *pole wektorów normalnych* do powierzchni S jako wektory jednostkowe o kierunku wektorów $d\mathbf{s}$:

$$d\mathbf{s} = \mathbf{n}\, ||d\mathbf{s}|| = \mathbf{n}\, ds.$$

Wyliczmy iloczyn wektorowy $\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v$ na podstawie wzorów (8.28) i (8.29):

$$\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\mathbf{e}_3.$$

W nawiasach rozpoznajemy wyznaczniki, więc możemy je zapisać w postaci jakobianów

$$\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathbf{e}_3. \tag{8.32}$$

Powierzchnia S nazywa się *orientowalna*, jeśli istnieją dwa ciągłe pola $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ niezerowych wektorów prostopadłych do niej (jeśli te wektory są dodatkowo unormowane, to nazywają się *normalnymi*) takie, że $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$. Każde z tych pól wektorowych wyznacza jedną stronę powierzchni. Przykładem powierzchni nieorientowalnej jest tzw. *wstęga Möbiusa*. Inny przykład będzie zademonstrowany na modelu ceramicznym. Jeśli dla powierzchni orientowalnej wybierzemy jedno z dwóch pól wektorowych $\mathbf{n}_i$ to otrzymamy *powierzchnię ze zwrotem*, *powierzchnię skierowaną* albo *zorientowaną*. Sfera jest powierzchnią orientowalną i możemy dla niej wybrać *zwrot wewnętrzny* albo *zewnętrzny*. W Przykładzie 5a pole prostopadłe $\mathbf{m}(u,v)$ oznaczało zwrot zewnętrzny dla górnej półsfery.

Niech S będzie gładką powierzchnią ze zwrotem, sparametryzowaną przez funkcję $\boldsymbol{\Phi} : D \to \mathbb{R}^3$ i niech $\mathbf{F}$ będzie polem wektorowym określonym na S. Definiujemy *całkę powierzchniową pola wektorowego* $\mathbf{F}$ albo *całkę powierzchniową skierowaną* jako

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_D\!\!\int \mathbf{F}(\boldsymbol{\Phi}(u,v))\cdot(\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v)\,du\,dv. \tag{8.33}$$

Na podstawie wzoru (8.32) możemy napisać

$$\mathbf{F}\cdot(\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v) = F_1\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + F_2\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + F_3\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

Wobec tego

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_D\!\!\int \left[F_1\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + F_2\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + F_3\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] du\,dv.$$

A pamiętając o wzorze (8.8) (bez znaku modułu) ma zamianę zmiennych w całce podwójnej, otrzymujemy następujący zapis całki powierzchniowej

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_S\!\!\int \left[F_1(x,y,z)\,dydz + F_2(x,y,z)\,dzdx + F_3(x,y,z)\,dxdy\right]. \tag{8.34}$$

PRZYKŁAD 7. Niech S będzie górną półsferą z Przykładu 5. Wyliczymy całkę powierzchniową pola wektorowego $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$. Jeśli chcemy wykorzystać wyliczenia z Przykładu 5a, czyli wzór $\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v = \mathbf{r}/z$, to otrzymujemy

$$I = \int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_D\!\!\int \mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{r}}{z}dx\,dy = \int_D\!\!\int \frac{\mathbf{r}^2 dx\,dy}{z} = a^2\int_D\!\!\int \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

gdzie D jest kołem o promieniu a i środku w początku układu. Skoro otrzymane wyrażenie ma symetrię obrotową wokół początku układu, to warto przejść do współrzędnych biegunowych r, φ:

$$I = a^2\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}} = 2\pi a^2\int_0^a\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Zamieniamy zmienną $u = a^2 - r^2$, $du = -2r\,dr$

$$I = -\pi a^2 \int_{a^2}^{0} \frac{du}{\sqrt{u}} = -\pi a^2 \cdot 2\sqrt{u}\Big|_{a^2}^{0} = 2\pi a^3.$$

Tę samą całkę można wyliczyć znacznie szybciej zauważając, że wektory $\mathbf{r}$ i $d\mathbf{s}$ są równoległe ze zgodnymi zwrotami więc ich skaloczyn jest równy iloczynowi wartości: $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} = a\,ds$, wtedy otrzymujemy

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} = a \int_S ds = a|S| = a \cdot 2\pi a^2 = 2\pi a^3,$$

gdzie $|S|$ oznacza pole powierzchni S.

W przypadku powierzchni S będącej wykresem funkcji $z = f(x, y)$ nad dziedziną D warto wybrać parametryzację $u = x$, $v = y$; wtedy

$$\mathbf{t}_u = \frac{\partial x}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial x}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{t}_v = \frac{\partial x}{\partial y}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_3,$$

więc

$$\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = \left(\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_3\right) \times \left(\mathbf{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_3\right) = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_1 - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Wobec tego na podstawie (8.33)

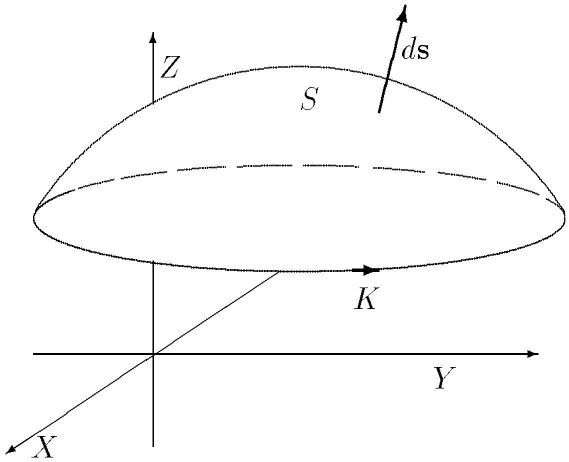
$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_D\int \left[F_1(x, y, f(x, y))\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) + F_2(x, y, f(x, y))\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right) + F_3(x, y, f(x, y))\right] dx\,dy. \tag{8.35}$$

Twierdzenie 2 (*Greena*). Niech D będzie obszarem na płaszczyźnie typu III (wg. klasyfikacji z § 8.1) i niech $P : D \to \mathbb{R}$ i $Q : D \to \mathbb{R}$ będą dwiema funkcjami klasy C^1; wtedy

$$\int_{\partial D} (P dx + Q dy) = \int_D\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy,$$

gdzie ∂D oznacza krzywą, która jest brzegiem obszaru D.

Dowód w książce Marsdena i Tomby *Vector Calculus* w § 8.1 oraz w książce Ryszarda Nowakowskiego *Elementy matematyki wyższej* w § 10.2. [George Green (1793–1841) – matematyk i fizyk angielski, wprowadził pojęcie potencjału.]



Rysunek 8.19

Jeśli na powierzchni S ze zwrotem jest krzywa zamknięta K, to tej krzywej można nadać zwrot przez podanie kierunku jej obiegu. Mówimy, że zwroty powierzchni S i krzywej K *są zgodne*, jeśli wektor normalny do S i obieg krzywej K tworzą śrubę prawoskrętną, patrz Rys. 8.19. Jeśli całka krzywoliniowa odbywa się po krzywej zamkniętej C, to na symbolu całki pojawia się kółko: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. W następującym twierdzeniu występuje całka krzywoliniowa po brzegu pewnej powierzchni, a brzeg powierzchni jest zawsze krzywą zamkniętą.

Twierdzenie 3 (*Stokesa*). Niech $D \subset \mathbb{R}^2$, niech S będzie powierzchnią zadaną przez funkcję $f : D \to \mathbb{R}$ klasy C^2 i niech ∂S będzie brzegiem S o zwrocie zgodnym ze zwrotem S. Wtedy dla pola wektorowego $\mathbf{F}$ klasy C^1 zachodzi

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s}. \tag{8.36}$$

[George Gabriel Stokes (1819-1903) – fizyk i matematyk angielski, autor prac z optyki, mechaniki płynów i fizyki matematycznej.]

Dowód. Jeśli jakaś krzywa leży na powierzchni S będącej wykresem funkcji $z = f(x, y)$, to musi być zadana przez parametryzację $\boldsymbol{\sigma}(t) = \{x(t), y(t), f(x(t), y(t))\}$. Do wzoru (8.22) potrzebna jest pochodna tej funkcji

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\mathbf{e}_3.$$

Tak właśnie jest dla krzywej ∂S będącej brzegiem powierzchni S. Iloczyn skalarny $\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}'$ wynosi

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = F_1\frac{dx}{dt} + F_2\frac{dy}{dt} + F_3\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) = \left(F_1 + F_3\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(F_2 + F_3\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}.$$

Zatem według wzoru (8.22) mamy

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left[\left(F_1 + F_3\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(F_2 + F_3\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}\right] dt.$$

Zamieniamy zmienne całkowania

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial D} \left[\left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \right].$$

Stosujemy twierdzenie Greena:

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_D \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] dxdy.$$

Teraz liczymy pochodną funkcji złożonej pamiętając, że F_1, F_2 i F_3 są funkcjami x, y i z, zaś z jest funkcją x i y:

$$\int_D \int \left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + F_3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + F_3 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) \right] dxdy.$$

Ostatnie dwa składniki z obu nawiasów znoszą się, a pozostałe wyrazy możemy przegrupować następująco

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_D \int \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right] dxdy$$

$$= \int_D \int \left[(\mathrm{rot}\, \mathbf{F})_1 \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + (\mathrm{rot}\, \mathbf{F})_2 \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + (\mathrm{rot}\, \mathbf{F})_3 \right] dxdy.$$

A to na mocy wzoru (8.35) można zapisać

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\mathrm{rot}\, \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s}. \blacksquare$$

W Twierdzeniu 1 udowodniliśmy wzór

$$\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_B) - f(\mathbf{r}_A)$$

w przypadku, gdy $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f$. Gdybyśmy wybrali inną krzywą o tych samych punktach końcowych, to dostalibyśmy ten sam wynik. W takich sytuacjach mówi się, że *całka nie zależy od drogi*. Pola gradientowe są ważne w zastosowaniach fizycznych. Na ogół $V = -f$ przedstawia energię potencjalną, a $\mathbf{F}$ – pole sił. Twierdzenie Stokesa pomocne jest do scharakteryzowania pól wektorowych, które można zapisać jako gradienty. Zanim do tego przejdziemy, wprowadzimy dwie definicje. Obszar $A \subset \mathbb{R}^3$ nazywa się *spójny*, jeśli dowolne dwa jego punkty można połączyć krzywą ciągłą leżącą całkowicie w obszarze A. Obszar A nazywa się *jednospójny*, jeśli dwie ciągłe krzywe leżące w obszarze A i łączące te same dwa punkty można przekształcić w sposób ciągły jedną w drugą nie wychodząc poza ten obszar. Każdy obszar jednospójny jest też spójny.

Twierdzenie 4. Niech $\mathbf{F}$ będzie polem wektorowym w jednospójnym obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, być może z wyjątkiem skończenie wielu punktów. Następujące warunki są równoważne:
(a) Dla dowolnej niesamoprzecinającej się krzywej zamkniętej C ze zwrotem zachodzi $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.
(b) Dla dowolnych niesamoprzecinających się krzywych C_1 i C_2 o tych samych punktach końcowych zachodzi

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(c) $\mathbf{F}$ jest gradientem pewnej funkcji skalarnej f (a jeśli pole $\mathbf{F}$ ma punkt, w którym nie jest określone, to funkcja f też nie jest tam określona).
(d) $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Pole wektorowe spełniające jeden z tych warunków (a zatem i wszystkie) nazywa się *polem zachowawczym*.

Dowód. Wykażemy następujący łańcuch wynikania, co udowodni twierdzenie:

$$(a) \;\Rightarrow\; (b) \;\Rightarrow\; (c) \;\Rightarrow\; (d) \;\Rightarrow\; (a).$$

(a) $\Rightarrow$ (b). Niech $\boldsymbol{\sigma}_1$ i $\boldsymbol{\sigma}_2$ będą parametryzacjami krzywych C_1 i C_2 o tych samych końcach. Tworzymy krzywą zamkniętą C o parametryznacji $\boldsymbol{\sigma}$ przez połączenie $\boldsymbol{\sigma}_1$ z $-\boldsymbol{\sigma}_2$, co zapisujemy symbolicznie $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2$. Przyjąwszy, że krzywa C nie jest samoprzecinająca się, otrzymujemy z warunku (a):

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

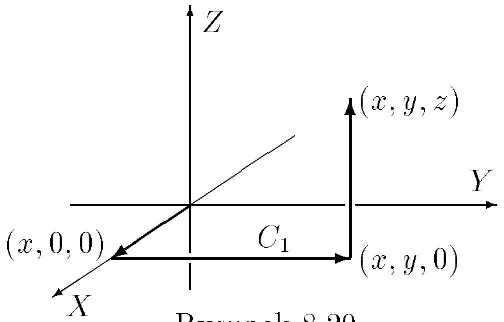
więc warunek (b) jest spełniony.

(b) $\Rightarrow$ (c). Wybierzmy początek układu wpółrzędnych gdzieś w obszarze Ω poza punktem osobliwym. Wykonujemy całkę po niesamoprzecinającej się krzywej łączącej początek układu $\mathbf{0}$ z punktem $\mathbf{r} = (x, y, z)$:

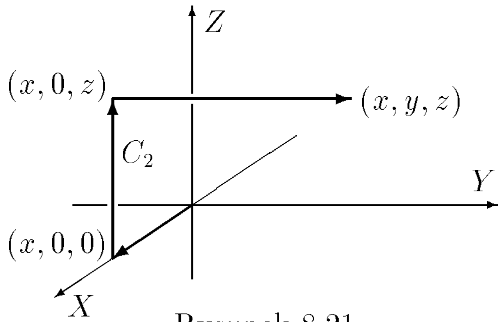
$$f(x, y, z) = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'. \tag{8.37}$$

Na mocy założenia (b) wartość $f(x, y, z)$ nie zależy od krzywej, lecz tylko od punktu końcowego $\mathbf{r}$. Mamy pokazać, że $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$. Wybierzmy krzywą C_1 w postaci linii łamanej ukazanej na Rys. 8.20. To, że dowolną krzywą łączącą punkt $\mathbf{0}$ z punktem $\mathbf{r}$ można w sposób ciągły przekształcić w krzywą C_1, wynika z założenia jednospójności obszaru Ω. Dla krzywej C_1 całkę (8.37) możemy przedstawić jako sumę trzech całek:

$$f(x, y, z) = \int_0^x F_1(t, 0, 0)\, dt + \int_0^y F_2(x, t, 0)\, dt + \int_0^z F_3(x, y, t)\, dt.$$



Rysunek 8.20



Rysunek 8.21

Różniczkowanie względem z jest różniczkowaniem względem górnej granicy ostatniej całki, więc dostajemy $\partial f/\partial z = F_3$. Wybierzmy inną linię łamaną całkowania C_2, zob. Rys. 8.21. Teraz ostatni odcinek jest równoległy do osi Y, więc otrzymujemy $\partial f/\partial y = F_2$. Podobnie pokażemy, że $\partial f/\partial x = F_1$. A to oznacza równość $\boldsymbol{\nabla} f = \mathbf{F}$.

(c) $\Rightarrow$ (d) To wynikanie mamy zapewnione dzięki Twierdzeniu 1 w § 8.4, które mówi, że $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) = 0$.

(d) $\Rightarrow$ (a) Niech C będzie krzywą zamkniętą. Wybieramy jakąkolwiek powierzchnię S, dla której C jest brzegiem. To, że S nie wykracza poza obszar Ω, mamy dzięki jednospójności Ω. (Wyobraźmy sobie obszar Ω w postaci walca z wyjętym mniejszym walcem bardzo blisko osi. To jest obszar niejednospójny. Jeśli krzywa zamknięta C otacza wyjęty mały walec, to powierzchnia S, dla której C jest brzegiem, musi wejść do małego walca, czyli wyjść poza obszar Ω.) Jeśli pole $\mathbf{F}$ ma punkty wyjątkowe, to powierzchnia S może je ominąć. Możemy więc napisać $C = \partial S$. Teraz skorzystamy z twierdzenia Stokesa.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s}.$$

Skoro $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$, to całka znika i warunek (a) jest spełniony. ■

W dowodzie punktu (c) przedstawiono sposób znajdowania funkcji skalarnej f dla zadanego pola wektorowego $\mathbf{F}$ takiej, że $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f$. Funkcja f nazywana jest *potencjałem* pola $\mathbf{F}$. Potencjał pola wektorowego dany jest z dokładnością do stałej, tzn. jeśli istnieją dwie funkcje f oraz $\tilde{f}$ takie, że $\boldsymbol{\nabla} f = \boldsymbol{\nabla} \tilde{f}$, to $\tilde{f}(x, y, z) = f(x, y, z) + C$. Istnieje jeszcze inny sposób szukania potencjału pola wektorowego, który objaśnimy na konkretnym przykładzie.

PRZYKŁAD 8. Niech będzie dane pole wektorowe $\mathbf{F}(x, y, z) = (0,\ 2y,\ -2z)$. Pominiemy sprawdzenie, że jego rotacja jest zerem. Dziedziną tego pola jest cała przestrzeń $\mathbb{R}^3$, czyli obszar jednospójny, więc do tego pola stosuje się Tw. 4. Szukamy potencjału tego pola. Równość wektorowa $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f$ oznacza trzy równości skalarne:

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x},\ F_2 = \frac{\partial f}{\partial y},\ F_3 = \frac{\partial f}{\partial z},$$

co daje trzy równania różniczkowe dla funkcji f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial f}{\partial z} = -2z.$$

Rozwiązujemy je podobnie jak równania z pochodnymi zwyczajnymi szukając funkcji pierwotnej z tą różnicą, że zamiast stałych całkowania piszemy funkcje dwóch zmiennych, których nie ma przy pochodnej cząstkowej. W ten sposób dochodzimy do trzech zapisów tej samej funkcji f:

$$f(x,y,z) = g(y,z), \quad f(x,y,z) = y^2 + h(x,z), \quad j(x,y,z) = -z^2 + j(x,y).$$

Pierwsza równość mówi, że szukana funkcja nie może zależeć od zmiennej x, więc poprawiamy pozostałe równości:

$$f(x,y,z) = g(y,z), \quad f(x,y,z) = y^2 + h(z), \quad j(x,y,z) = -z^2 + j(y).$$

Teraz widzimy, że równość druga i trzecia pasuje do równości pierwszej, bo wszędzie są funkcje tylko dwóch zmiennych y i z. Równość drugą można pogodzić z trzecią, jeśli podstawimy $h(z) = -z^2 + C$ oraz $j(y) = y^2 + C$. Wówczas możemy podstawić $g(y,z) = y^2 - z^2 + C$ i otrzymujemy

$$f(x,y,z) = y^2 - z^2 + C.$$

Przykładem fizycznym pola, do którego nie stosuje się to Twierdzenie 4, jest natężenie pola magnetycznego $\mathbf{H}$, które w magnetostatyce spełnia równanie $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}$, gdzie $\mathbf{j}$ jest gęstością prądów elektrycznych. Są wprawdzie obszary pozbawione prądów, w których $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$, ale to są często obszary niejednospójne. Dlatego dla tego pola może nie istnieć potencjał skalarny ψ taki, żeby $\mathbf{H} = \operatorname{grad}\psi$, a całki tego pola po niektórych krzywych zamkniętych nie są zerami.

PRZYKŁAD 9. Wyukorzystajmy pole wektorowe z Przykładu 3, czyli wzór (8.23) bez współczynników przed ułamkiem:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}}{\rho^2}. \tag{8.38}$$

Późniejsze obliczenia z tamtego przykładu prowadzą do innego wzoru na to samo pole

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{-y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2}{x^2 + y^2}.$$

Widać stąd, że pole to jest określone poza osią Z (bo na tej osi mianownik się zeruje), więc w obszarze niejednospójnym. Według Twierdzenia 4 nie powinien istnieć potencjał dla tego pola. Tymczasem można sprawdzić, że funkcja $f(x,y,z) = \operatorname{arc\,tg}(y/x)$ ma gradient równy tyle samo:

$$\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}) = \frac{-y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2}{x^2 + y^2}.$$

Gdzie jest sprzeczność? Otóż jest ona w tym, że ta funkcja nie ma tej samej dziedziny, co pole wektorowe (8.38). Była ona rozważana w Przykładzie 5 w § 7.2 i nie jest określona na płaszczyźnie (Y, Z).

Gdybyśmy określili pole wektorowe $\mathbf{F}$ i jego potencjał f tylko w półprzestrzeni $x > 0$, to ten obszar już jest jednospójny i Twierdzenie 4 stosuje się do takiego przypadku.

Jeśli całka powierzchniowa odbywa się po powierzchni zamkniętej S, to na symbolu całki pojawia się kółko: $\oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$. W następującym twierdzeniu występuje całka powierzchniowa po brzegu pewnego trójwymiarowego obszaru, a brzeg objętości jest zawsze powierzchnią zamkniętą.

Twierdzenie 5 (*Gaussa*). Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ będzie obszarem typu IV (wg klasyfikacji z § 9.2). Niech brzeg $\partial\Omega$ obszaru Ω będzie powierzchnią ze zwrotem zewnętrznym. Jeśli $\mathbf{F}$ jest polem wektorowym klasy C^1 na Ω, to

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dv. \tag{8.39}$$

[Carl Friedrich Gauss (1777-1855) – niemiecki matematyk, fizyk, astronom i geodeta, jeden z największych matematyków świata, porównywany z Archimedesem i Newtonem, przez współczesnych zwany księciem matematyków.]

Dowód. Z definicji dywergencji

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dv = \int_{\Omega}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)dv = \int_{\Omega}\frac{\partial F_1}{\partial x}\,dv + \int_{\Omega}\frac{\partial F_2}{\partial y}\,dv + \int_{\Omega}\frac{\partial F_3}{\partial z}\,dv.$$

Z drugiej strony rozważana całka powierzchniowa wynosi

$$\int_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial\Omega}(F_1 ds_1 + F_2 ds_2 + F_3 ds_3) = \int_{\partial\Omega} F_1 ds_1 + \int_{\partial\Omega} F_2 ds_2 + \int_{\partial\Omega} F_3 ds_3.$$

Dla udowodnienia twierdzenia wystarczy wykazać trzy równości:

$$\int_{\partial\Omega} F_1\,ds_1 = \int_{\Omega}\frac{\partial F_1}{\partial x}\,dv, \qquad \int_{\partial\Omega} F_2\,ds_2 = \int_{\Omega}\frac{\partial F_2}{\partial y}\,dv, \qquad \int_{\partial\Omega} F_3\,ds_3 = \int_{\Omega}\frac{\partial F_3}{\partial z}\,dv. \tag{8.40}$$

Udowodnimy ostatnią równość, pozostałe dowodzi się analogicznie. Skoro Ω jest obszarem typu I (Jak również typu II i III), to istnieje para funkcyj

$$z = f_1(x,y), \qquad z = f_2(x,y)$$

ze wspólną dziedziną D jako obszarem elementarnym na płaszczyźnie (X,Y) takich, że Ω jest zbiorem wszystkich punktów (x,y,z) spełniających

$$f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y) \quad \text{dla} \quad (x,y)\in D.$$

Dzięki wzorowi (8.16) mamy

$$\int_{\Omega}\frac{\partial F_3}{\partial z}\,dv = \int_D\int\left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)}\frac{\partial F_3}{\partial z}\,dz\right)dx\,dy,$$

zatem

$$\int_{\Omega}\frac{\partial F_3}{\partial z}\,dv = \int_D\int\left[F_3(x,y,f_2(x,y)) - F_3(x,y,f_1(x,y))\right]dx\,dy. \tag{8.41}$$

Brzeg $\partial\Omega$ obszaru Ω jest powierzchnią zamkniętą, której część górna S_2 jest wykresem funkcji f_2, a część dolna S_1 jest wykresem funkcji f_1. W takim razie

$$\int\limits_{\partial\Omega} F_3\, ds_3 = \int\limits_{S_2} F_3\, ds_3 - \int\limits_{S_1} F_3\, ds_3.$$

Nie ma wkładu od powierzchni bocznej, bo tam $ds_3 = 0$. Drugi wyraz wzięliśmy z minusem, bo aby wektor $d\mathbf{s}$ na powierzchni dolnej miał zwrot zewnętrzny, to jego trzecia współrzędna musi być ujemna. Wykorzystując wzór (8.34) napiszemy to

$$\int\limits_{\partial\Omega} F_3 ds_3 = \int\limits_{D}\int F_3(x, y, f_2(x, y))\, dxdy - \int\limits_{D}\int F_3(x, y, f_1(x, y))\, dxdy,$$

a to się pokrywa z prawą stroną wzoru (8.41). Wobec tego udowodniliśmy ostatnią równość (8.40). ∎

Założenie o IV typie obszaru Ω posłużyło jedynie do tego, by można było go opisać dwiema powierzchniami ograniczającymi go z dwóch stron i będącymi zarazem wykresami funkcyj. Twierdzenie można uogólnić na obszar jednospójny, gdyż taki obszar można porozcinać na części typu IV, a całki po powierzchniach rozcinających będą liczone dwukrotnie z przecinymi zwrotami, więc się zniosą.

Twierdzenia Gaussa i Stokesa są bardzo ważne w elektromagnetyźmie, gdzie pozwalają zamienić całkowe równania Maxwella na różniczkowe równania Maxwella.

Twierdzenie 6. Jeśli $\mathbf{B}$ jest polem wektorowym na $\mathbb{R}^3$ takim, że $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, to istnieje pole wektorowe $\mathbf{A}$ o własności $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$.

Dowód. Wystarczy wskazać jedno takie pole $\mathbf{A}$. Otóż weźmy

$$A_1(\mathbf{r}) = \int\limits_0^z B_2(x, y, t)\, dt - \int\limits_0^y B_3(x, t, 0)\, dt, \qquad A_2(\mathbf{r}) = -\int\limits_0^z B_1(x, y, t)\, dt, \qquad A_3(\mathbf{r}) = 0.$$

Liczymy poszczególne współrzędne rotacji tego pola:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = 0 - (-B_1) = B_1, \tag{8.42}$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})_2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 = B_2 - 0 = B_2, \tag{8.43}$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})_3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = -\int\limits_0^z \frac{\partial B_1}{\partial x}(x, y, t)\, dt - \int\limits_0^z \frac{\partial B_2}{\partial y}(x, y, t)\, dt + B_3(x, y, 0)$$

$$= B_3(x, y, 0) - \int\limits_0^z (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2)(x, y, t)\, dt.$$

Ze znikania dywergencji wynika, że wyrażenie w nawiasie można zastąpić przez $-\partial_3 B_3$, więc

$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})_3(\mathbf{r}) = B_3(x, y, 0) + \int\limits_0^z \frac{\partial B_3}{\partial t}(x, y, t)\, dt = B_3(x, y, 0) + B_3(x, y, z) - B_3(x, y, 0) = B_3(\mathbf{r}).$$

A to razem z (8.42) i (8.43) oznacza równość wektorową $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ■

Trzeba tu ostrzec, że inaczej niż w Twierdzeniu 4, pole wektorowe nie może mieć punktów wyłączonych. Na przykład grawitacyjne pole sił masy punktowej $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -GmM\mathbf{r}/r^3$ ma własność $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = 0$ wszędzie tam, gdzie jest określone, a nie ma dla niego $\mathbf{A}$ takiego, żeby $\mathbf{F} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$. Oznaczenia w tym twierdzeniu zostały wzięte tak, żeby pasowały do elektromagnetyzmu, gdzie $\mathbf{B}$ jest indukcją magnetyczną, zaś $\mathbf{A}$ nazywa się *potencjałem magnetycznym* lub *potencjałem wektorowym*.