Rozdział 9

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE

Istniejące podręczniki

H. Margenau i G.M. Murphy: *Matematyka w fizyce i chemii*, rozdział 7, PWN, Warszawa 1962;
W.I. Smirnow: *Matematyka wyższa*, tom II, rozdział 7, PWN, Warszawa 1966;
Charles Alfred Coulson, Alan Jeffrey: *Fale. Modele matematyczne*, WNT, Warszawa 1982;
Lawrence C. Evans: *Równania różniczkowe cząstkowe*, PWN, Warszawa 2002;
Samuel S. Holland: *Applied analysis by the Hilbert space method*, Marcel Dekker Inc., New York 1990.

9.1 Wiadomości ogólne

Równaniem różniczkowym cząstkowym nazywamy równanie, w którym występuje funkcja niewiadoma u dwóch lub więcej zmiennych x, $y \dots$ i jej pochodne cząstkowe, czyli równanie postaci

$$F\left(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots\right) = 0.$$

Rzędem równania różniczkowego cząstkowego nazywamy najwyższy rząd pochodnej funkcji niewiadomej występujący w równaniu. Niech u będzie funkcją n zmiennych. *Rozwiązaniem cząstkowego równania różniczkowego m-go rzędu* w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy taką funkcję u klasy C^m z dziedziną Ω, która po podstawieniu wraz ze swymi pochodnymi do danego równania zamienia je w tożsamość w obszarze Ω.

PRZYKŁAD 1. Dane jest równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 - y^2.$$

Jest ono łatwe do scałkowania, bo nie ma innych pochodnych. Najpierw znajdujemy funkcję pierwotną względem x:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^3}{3} - xy^2 + \phi(y)$$

z dowolną funkcją ϕ. Następnie całkujemy względem y:

$$u(x,y) = \frac{x^3}{3}y - x\frac{y^3}{3} + g(y) + f(x) = \frac{xy}{3}(x^2 - y^2) + f(x) + g(y).$$

Dowolna funkcja $\phi(y)$ po scałkowaniu względem y zamieniła się w dowolną funkcję $g(y)$. Poza tym pojawiła się dowolna funkcja $f(x)$. Należy zauważyć, że stałe dowolne występujące w rozwiązaniu równania różniczkowego zwyczajnego zamieniają się na funkcje dowolne.

Jeśli w funkcji u od $(n+1)$ zmiennych niezależnych wyróżnimy jedną ze zmiennych jako czas t pisząc $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, to mówimy, że u jest *funkcją punktu* $\mathbf{r}$ *i czasu* t, co zapisuje się też $u(\mathbf{r}, t)$. *Warunkami początkowymi* nazywamy warunki stawiane funkcji u dla wybranej chwili $t = t_0$, np. $u(\mathbf{r}, t)|_{t=t_0} = \phi(\mathbf{r})$. *Warunkami brzegowymi* nazywamy warunki stawiane funkcji u na brzegu $\partial\Omega$ pewnego obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, np. $u(\mathbf{r}, t)|_{\mathbf{r}\in\partial\Omega} = f(\mathbf{r}, t)$. Można jeszcze stawiać warunki określającezachowanie się funkcji u przy jednej ze zmiennych dążącej do $-\infty$ lub$+\infty$. Zespół wymienionych warunków nazywamy *warunkami granicznymi.*

Poszukiwanie funkcji spełniającej dane równanie różniczkowe oraz określone warunki graniczne nazywamy *zagadnieniem granicznym.* W szczególności może to być *zagadnienie brzegowe* lub *zagadnienie początkowe.*

9.1.1 Równania pierwszego rzędu

Równaniem różniczkowym cząstkowym pierwszego rzędu nazywamy równanie

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{9.1}$$

gdzie F jest funkcją $2n+1$ zmiennych określoną w pewnym obszarze $(2n+1)$-wymiarowym.

Zagadnienie początkowe zwane też *zagadnieniem Cauchy'ego* dla równania (9.1) polega na poszukiwaniu funkcji $u : \Omega \to \mathbb{R}$ spełniającej to równanie w jakimś obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, zaś na $(n-1)$-wymiarowym podzbiorze $S \subset \Omega$ spełniającej warunek

$$\forall \mathbf{r} \in S : \quad u(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}), \tag{9.2}$$

gdzie $\phi : S \to \mathbb{R}$ jest zadaną funkcją.

Liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym pierwszego rzędu nazywamy równanie (9.1), jeśli F jest funkcją liniową względem u oraz względem $\partial_i u$ dla wszyskich $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Jest to zatem równanie postaci

$$A_0(\mathbf{r})u + \sum_{i=1}^{n} A_i(\mathbf{r})\frac{\partial u}{\partial x_i} = B(\mathbf{r}),$$

gdzie B oraz $A_i,\ i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ są danymi funkcjami, zazwyczaj ciągłymi. Szczególnym przypadkiem jest *równanie liniowe jednorodne*, w którym $A_0 = B = 0$.

PRZYKŁAD 2. Rozważmy równanie

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Jest ono liniowe jednorodne pierwszego rzędu o stałych współczynnikach. Dla jego rozwiązania wprowadza się zamianę zmiennych $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. Z reguł różniczkowania funkcji złożonej mamy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Wstawiamy to do równania różniczkowego otrzymując

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

a to oznacza, że funkcja u nie zależy od zmiennej η, natomiast zależność od ξ może być dowolna. Rozwiązanie ogólne jest więc postaci

$$u(x, y) = f(\xi) = f(x + y)$$

z dowolną różniczkowalną funkcją f jednej zmiennej. Jeszcze raz przekonujemy się, że rozwiązanie ogólne zawiera dowolną funkcję, a nie dowolną stałą, jak to było dla równań zwyczajnych.

Ten przykład podsuwa nam metodę rozwiązywania jednorodnego równania liniowego o stałych współczynnikach:

$$a\,\frac{\partial u}{\partial x} + b\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Zamieniamy zmienne w przekształceniu liniowym:

$$\xi = \alpha x + \beta y, \qquad \eta = \gamma x + \delta y,$$

w którym stałe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ na razie są dowolne, ustalimy je później. Wtedy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\,\alpha + \frac{\partial u}{\partial \eta}\,\gamma, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\,\beta + \frac{\partial u}{\partial \eta}\,\delta.$$

Wstawiamy to do równania różniczkowego

$$a\left(\alpha\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + \gamma\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + b\left(\beta\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + \delta\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0,$$

$$(a\alpha + b\beta)\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + (a\gamma + b\delta)\,\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Możemy wybrać $\gamma = a$, $\delta = b$, natomiast α i β tak, żeby pierwszy nawias znikał, np. $\alpha = b$, $\beta = -a$. Wtedy z równania zostaje

$$\left(a^2 + b^2\right)\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

gdzie $\xi = bx - ay$, $\eta = ax + by$. Otrzymane równanie mówi, że funkcja u nie może zależeć od zmiennej η, a na zależność od ξ nie ma żadnego warunku, stąd ogólne rozwiązanie naszego równania różniczkowego ma postać

$$u(x, y) = f(\xi) = f(bx - ay)$$

z dowolną funkcją f jednej zmiennej.

9.1.2 Równania drugiego rzędu

Liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu nazywamy równanie

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_1, x_2, ..., x_n)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (9.3)$$

Funkcja F może zależeć od funkcji u i jej pochodnych nawet w sposób nieliniowy. Rozważane równanie jest więc liniowe wyłącznie względem drugich pochodnych.

Dla przeprowadzenia klasyfikacji takich równań rozważa się formę kwadratową zmiennych pomocniczych ξ_i:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(\mathbf{r})\,\xi_i \xi_k.$$

Jeśli ustalimy wartości zmiennych niezależnych $x_l = x_l^0$, czyli ustalimy punkt $\mathbf{r} = \mathbf{r}^0 \in \mathbb{R}^n$, to powstaje forma kwadratowa o stałych współczynnikach. Tę formę przez liniową zamianę zmiennych można doprowadzić do postaci kanonicznej, w której występują jedynie kwadraty zmiennych ξ_i: $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{r}^0)\,{\xi_i}^2$; przy tym liczba współczynników dodatnich i ujemnych dla danej formy nie zależy od sposobu przejścia do postaci kanonicznej. To samo przejście pozwala zapisać równanie (9.3) bez pochodnych mieszanych:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(x_1, x_2, ..., x_n)\,\frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} + F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (9.4)$$

Mówimy, że równanie (9.3) jest *typu eliptycznego w punkcie* $\mathbf{r}^0$, jeśli równanie (9.4) ma współczynniki $b_i(\mathbf{r}^0)$ tylko dodatnie albo tylko ujemne i żaden nie jest zerem. Mówimy, że równanie jest *typu eliptycznego w obszarze* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jeśli jest typu eliptycznego w każdym punkcie tego obszaru. Podobnie mówimy, że równanie (9.3) jest *typu hiperbolicznego*, jeśli po sprowadzeniu do postaci kanonicznej wszystkie współczynniki poza jednym są tego samego znaku, a jeden współczynnik ma znak przeciwny. Jeśli forma kwadratowa w postaci kanonicznej ma chociaż jeden współczynnik równy zeru, to równanie (9.3) jest typu *parabolicznego*. Jeśli współczynniki a_{ik} są stałe, to typ równania nie zależy od wyboru punktu $\mathbf{r} \in \Omega$.

PRZYKŁAD 3. Rozważmy równanie

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + F\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = 0. \qquad (9.5)$$

Pomocnicza forma kwadratowa ma postać

$$0 \cdot {\xi_1}^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_1 + 0 \cdot {\xi_2}^2. \qquad (9.6)$$

Szukamy takiego przekształcenia linowego do nowych zmiennych y_1, y_2:

$$\xi_1 = y_1 + ay_2, \qquad \xi_2 = y_1 + by_2, \qquad (9.7)$$

żeby po podstawieniu do (9.6) wystąpiły tylko kwadraty zmiennych y_i. Liczymy:

$$\xi_1\xi_2 = (y_1 + ay_2)(y_1 + by_2) = {y_1}^2 + ab{y_2}^2 + (a+b)y_1y_2.$$

Żądamy znikania nawiasu zwykłego: $a + b = 0$, stąd $b = -a$, a forma kwadratowa (9.6) przyjmuje postać:

$$2\xi_1\xi_2 = 2\left({y_1}^2 - a^2{y_2}^2\right).$$

Widzimy, że w kombinacji kwadratów jest jeden współczynnik dodatni i jeden ujemny. Według podanej klasyfikacji równanie różniczkowe (9.5) jest typu hiperbolicznego.

Oto równania rzędu drugiego występujące w fizyce. Są one już w postaci kanonicznej, tzn. bez pochodnych mieszanych.
Równanie Poissona

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho(x, y, z)$$

jest typu eliptycznego. [Simeon Denis Poisson (1781–1840) – francuski matematyk i fizyk; zajmował się m.in. elektrostatyką i teorią sprężystości.] Szczególnym przypadkiem tego równania jest *równanie Laplace'a*

$$\Delta u = 0.$$

Jeszcze jednym równaniem typu eliptycznego jest *równanie Helmholtza*:

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

ze stałą $k \in \mathbb{R}$. *Równanie falowe*

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;$$

jest typu hiperbolicznego; tutaj v jest prędkością fazową fali, operator $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ nazywa się *dalambercjanem. Równanie przewodnictwa cieplnego*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0.$$

jest typu parabolicznego. W tym przypadku forma kwadratowa ma postać $-k\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2\right)$ i jest już doprowadzona do postaci kanonicznej. Skoro nie ma drugiej pochodnej względem czasu t, to można powiedzieć, że współczynnik przy ξ_4^2 jest zerem.

Warunki Cauchy'ego dla równania (9.3) polegają na podaniu funkcji u na $(n-1)$-wymiarowym podzbiorze $S \subset \Omega$:

$$\forall \mathbf{r} \in S: \quad u(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r})$$

oraz jej pochodnej kierunkowej w kierunku $\mathbf{m}$ nie stycznym do S:

$$\forall \mathbf{r} \in S: \quad (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nabla})u(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})$$

z zadanymi funkcjami $\phi, \psi : S \to \mathbb{R}$ oraz $\mathbf{m} : S \to \mathbb{R}^n$. Pochodne w kierunkach stycznych do S można wyliczyć z funkcji ϕ. Jeśli warunki początkowe są dane na powierzchni S o równaniu $x_n = a$, czyli na hiperpłaszczyźnie, to mamy taką postać warunków Cauchy'ego:

$$u\big|_{x_n=a} = \phi(x_1, ..., x_{n-1}), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=a} = \psi(x_1, ..., x_{n-1}).$$

9.2 Szeregi Fouriera

Rozważamy szereg funkcyjny $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$, którego wyrazami są funkcje $f_n : \langle -\pi, \pi\rangle \to \mathbb{R}$ postaci

$$f_0(x) = \frac{1}{2}a_0, \quad f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad \text{gdzie} \quad a_n, b_n \in \mathbb{R} \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Możemy więc napisać

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{9.8}$$

Jak znaleźć współczynniki a_i, b_i, gdy znana jest funkcja f? Jeśli szereg jest jednostajnie zbieżny, to możemy zastosować Twierdzenie 13 z § 6.5 i napisać całkę oznaczoną po podanej dziedzinie jako szereg całek

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}a_0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,dx.$$

Wyliczamy poszczególne całki

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}a_0\,dx = \frac{1}{2}a_0[\pi - (-\pi)] = \pi a_0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{1}{n}[\sin n\pi - \sin(-n\pi)] = \frac{1}{n}(0-0) = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = -\frac{1}{n}[\cos n\pi - \cos(-n\pi)] = -\frac{1}{n}[\cos n\pi - \cos(n\pi)] = 0.$$

W takim razie zostaje $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0$ i stąd mamy sposób na wyliczenie pierwszej stałej a_0 z funkcji (9.8) – sumy całego szeregu

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{9.9}$$

Aby obliczyć stałe a_n, mnożymy obie strony równości (9.8) przez $\cos mx$ i całkujemy jak przedtem po przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}a_0 \cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx)\,dx.$$

Do iloczynu cosinusów stosujemy tożsamość trygonometryczną $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$, która daje

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}[\cos(n-m)x + \cos(n+m)x].$$

Dzięki temu dla $m \neq n$ dostajemy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x + \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Natomiast dla $m = n$ otrzymujemy $\cos^2 nx = \frac{1}{2}[1 + \cos 2nx]$, a stąd

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}[\pi - (-\pi)] = \pi.$$

Do iloczynu cosinusa z sinusem stosujemy podobną tożsamość $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$, która daje

$$\sin nx \cos mx = \frac{1}{2}[\sin(n-m)x + \sin(n+m)x].$$

Tym razem dla wszystkich $m \in \mathbb{N}$ po wycałkowaniu otrzymamy zero:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx = 0.$$

W takim razie zostaje $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \pi a_m$, więc możemy wyrazić m-ty współczynnik przy cosinusie przez całkę z sumy całego szeregu pomnożonej przez $\cos mx$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx. \tag{9.10}$$

Podobnie znajdziemy

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx. \tag{9.11}$$

Wzory (9.9)–(9.11) nazywają się *wzorami Eulera-Fouriera*. Jeśli istnieje rozwinięcie funkcji f na szereg postaci (9.8), to nazywamy je *szeregiem Fouriera funkcji f*. [Jean Babtiste Joseph Fourier (1768-1830) – francuski matematyk i egiptolog, jeden z prekursorów fizyki matematycznej. Uczestnik wyprawy egipskiej Napoleona (1798-1801), jako pierwszy zastosował szeregi trygonometryczne do zagadnień przewodnictwa cieplnego.]

Pojawia się pytanie: Jakie funkcje dają się przedstawić w postaci (9.8) ze współczynnikami spełniającymi wzory (9.9)-(9.11)? Wszystkie funkcje trygonometryczne po prawej stronie wzoru (9.8) mają wspólny okres 2π, więc należy założyć okresowość funkcji f.

Funkcja $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ nazywa się *przedziałami monotoniczna*, jeśli przedział $\langle a, b\rangle$ można podzielić za pomocą skończonego układu punktów $a = c_0 < c_1 < c_2 < \,..\,, c_n = b$ na przedziały $\langle c_{k-1}, c_k\rangle$ w taki sposób, aby w przedziałach otwartych (c_{k-1}, c_k) funkcja f była monotoniczna.

Przed sformułowaniem twierdzeń wprowadźmy oznaczenia na granice jednostronne funkcji

$$f(a^-) = \lim_{x\to a-} f(x), \quad f(a^+) = \lim_{x\to a+} f(x).$$

Lemat *całka Dirichleta.* Jeśli funkcja $f : \langle 0, a\rangle \to \mathbb{R}$ jest przedziałami monotoniczna i ma przedziałami ciągłą pochodną, to

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a f(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}f(0^+).$$

Dowód w książce Kuratowskiego na str. 216. [Peter Gustaw Lejeune Dirichlet (1805-1859) – matematyk niemiecki pochodzenia francuskiego, przez rok pracował we Wrocławiu, udowodnił zbieżność szeregu Fouriera, udowodnił wielkie twierdzenie Fermata dla potęg mniejszych lub równych pięć.]

Twierdzenie 1. Każda funkcja okresowa f o okresie 2π, przedziałami ciągła wraz ze swoją pochodną, przedziałami monotoniczna i w punktach nieciągłości spełniająca warunek

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x^-) + f(x^+)\right] \tag{9.12}$$

daje się rozwinąć w szereg Fouriera postaci (9.8).

Dowód. Oznaczmy sumy częściowe szeregu (9.8):

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{9.13}$$

Należy udowodnić, że jeśli współczynniki spełniają warunki (9.9)–(9.11), to

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x). \tag{9.14}$$

Do wzoru (9.13) wstawiamy współczynniki wyrażone przez całki (9.9)–(9.11), w których zmienną całkowania jest t zamiast x:

$$S_n(x) = \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}f(t)\,dt + \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos t\cos x + \sin t \sin x)\,dt + \ldots$$

$$\ldots + \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos nt \cos nx + \sin nt \sin nx)\,dt.$$

w nawiasach zwykłych występują wzory na cosinusy różnicy argumentów:

$$S_n(x) = \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \cos(t-x) + \ldots + \cos n(t-x)\right]dt.$$

Na ćwiczeniach udowodnimy tożsamość

$$\frac{1}{2} + \cos y + \cos 2y + \ldots + \cos ny = \frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}y}{2\sin\frac{1}{2}y},$$

dzięki której możemy napisać

$$S_n(x) = \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt\,.$$

Zamieniamy zmienne całkowania $\frac{1}{2}(t-x) = z$, stąd $t = x + 2z,\ dt = 2dz$:

$$S_n(x) = \pi^{-1}\int_{(-\pi-x)/2}^{(\pi-x)/2} f(x+2z)\,\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz. \tag{9.15}$$

Rozkładamy tę całkę na sumę dwóch całek w przedziałach $\langle -\frac{\pi+x}{2}, 0\rangle$ oraz $\langle 0, \frac{\pi-x}{2}\rangle$, a w pierwszej z nich podstawiamy nową zmienną $y = -z$:

$$S_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{(\pi+x)/2}^{0} f(x-2y)\,\frac{\sin(2n+1)y}{\sin y}\,dy + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{(\pi-x)/2} f(x+2z)\,\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{(\pi+x)/2} f(x-2y)\,\frac{\sin(2n+1)y}{\sin y}\,dy + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{(\pi-x)/2} f(x+2z)\,\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz.$$

Jeśli uda nam się pokazać, że pierwsza całka dąży do połowy granicy lewostronnej funkcji f w punkcie x, a druga do połowy granicy prawostronnej w tym samym punkcie, to będziemy mieć udowodnioną równość (9.14) dla warunku (9.12). W takim razie mamy udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{(\pi+x)/2} f(x-2y)\, \frac{\sin(2n+1)y}{\sin y}\, dy = \frac{1}{2} f(x^-), \tag{9.16}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{(\pi-x)/2} f(x+2z)\, \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz = \frac{1}{2} f(x^+). \tag{9.17}$$

Oznaczmy funkcję od y przy ustalonym x : $h(y) = f(x-2y)$. Funkcja h jest więc przedziałami ciągła wraz z pochodną i przedziałami monotoniczna, to samo dotyczy też funkcji $h(y)y/\sin y$, możemy więc zastosować Lemat:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a h(y)\, \frac{\sin ny}{\sin y}\, dy = \lim_{n\to\infty} \int_0^a h(y)\, \frac{y}{\sin y}\, \frac{\sin ny}{y}\, dy = \frac{\pi}{2} \lim_{y\to 0+} h(y) \frac{y}{\sin y}$$

$$= \frac{\pi}{2} h(0^+) \cdot 1 = \frac{\pi}{2} h(0^+).$$

Funkcja podcałkowa musi być określona na wnętrzu przedziału całkowania, więc aby sinus w mianowniku się nie zerował, przedział nie powinien być większy niż $\langle 0, \pi\rangle$. Dla $x \in (-\pi, \pi)$ zachodzą nierówności $0 < \frac{1}{2}(\pi + x) < \pi$, więc w tym wzorze można zastąpić a przez $\frac{1}{2}(\pi + x)$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{(\pi+x)/2} h(y)\, \frac{\sin ny}{\sin y}\, dy = \frac{\pi}{2} h(0^+),$$

co po zamianie $h(y) = f(x-2y)$ daje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{(\pi+x)/2} f(x-2y)\, \frac{\sin ny}{\sin y}\, dy = \frac{1}{2} f(x^-).$$

Jest to coś więcej, niż potrzeba we wzorze (9.16), bo tam jest granica dla podciągu liczb nieparzystych. Mamy więc wzór (9.16) udowodniony.

Zupełnie podobnie, oznaczając $g(z) = f(x+2z)$ i biorąc pod uwagę, że dla $x \in (-\pi, \pi)$ zachodzą nierówności $0 < \frac{1}{2}(\pi - x) < \pi$, dochodzimy do wzoru (9.17). Dodając do siebie wzory (9.16) i (9.17) dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)].$$

Potrzebne były oba wzory (9.16) i (9.17), więc wykorzystywaliśmy mozliwość dochodzenia do wartości x z dwóch stron. W ten sposób twierdzenie jest udowodnione dla $x \in (-\pi, \pi)$ z przedziału otwartego. Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy $x = -\pi$ lub $x = \pi$.

Weźmy więc $x = -\pi$. Zgodnie z (9.15) mamy

$$S_n(-\pi) = \pi^{-1} \int_0^{\pi} f(-\pi + 2z)\, \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz\,.$$

Rozkładamy to na dwie całki w przedziałach $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ oraz $\langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle$, a w drugiej z nich podstawiamy nową zmienną $y = \pi - z$:

$$S_n(-\pi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(-\pi + 2z)\, \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\pi - 2y)\, \frac{\sin(2n+1)y}{\sin y}\, dz.$$

Jak poprzednio, pierwsza z tych całek dąży do $\frac{1}{2}f(-\pi^+)$, druga do $\frac{1}{2}f(\pi^-)$, co ze względu na okresowość funkcji f można zapisać $\frac{1}{2}f(-\pi^-)$. W sumie więc dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} S_n(-\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi^-) + f(-\pi^+)].$$

Ze względu na okresowość to samo zachodzi w punkcie przesuniętym w prawo o 2π:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\pi) = \frac{1}{2}[f(\pi^-) + f(\pi^+)].$$

W ten sposób twierdzenie jest udowodnione dla każdego $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$, a przez okresowość dla każdego $x \in \mathbb{R}$. ■

Rozkład danej funkcji okresowej na szereg Fouriera nazywa się *analizą Fouriera*. W fizyce znajduje ona zastosowanie w akustyce i w teorii drgających obwodów elektrycznych. Widzimy, że prawie każde (tzn. spełniające założenia naszego twierdzenia) zjawisko okresowo zmieniające się w czasie z okresem T daje się rozłożyć na kombinacje zmian opisanych funkcjami trygonometrycznymi, czyli drgań harmonicznych. Aby argument funkcyj sinus i cosinus nie miał wymiaru fizycznego, trzeba zamiast zmiennej x pisać ωt, gdzie ω jest zwane *częstością kołową* spełniającą warunek $\omega = 2\pi/T$. Wtedy różnicy czasów $t_2 - t_1 = T$ odpowiada różnica argumentów sinusa czy cosinusa $x_2 - x_1 = 2\pi$, co jest ich okresem. Jeśli oznaczymy $F(t) = f(\omega t)$, to wzór (9.8) daje

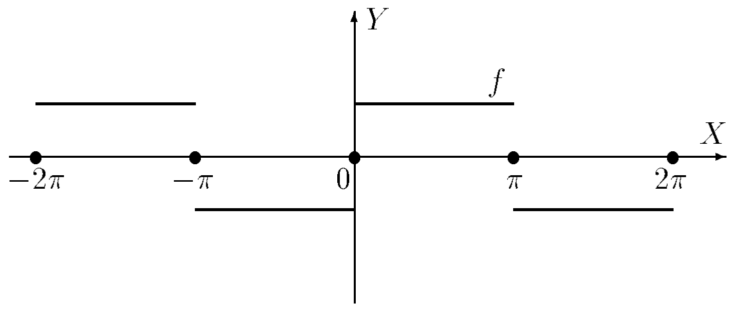
$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t).$$

Wartości $n = 1$ odpowiada częstość drgań ω, wartości $n = 2$ częstość 2ω itd. Dlatego drganie odpowiadające częstości ω nazywa się *drganiem podstawowym*, a pozostałe *wyższymi harmonicznymi* – ich częstości są wielokrotnościami częstości drgania podstawowego.

PRZYKŁAD 1. Niech f oznacza funkcję okresową z okresem 2π daną wzorem klamrowym:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/4 & \text{gdy} \quad x \in (-\pi, 0), \\ \pi/4 & \text{gdy} \quad x \in (0, \pi), \\ 0 & \text{gdy} \quad (x = 0) \vee (x = \pm\pi). \end{cases} \tag{9.18}$$

Wykres tej funkcji ukazujemy na Rys. 6.3. Składa się on z poziomych odcinków o długości π położonych na przemian na prostych $y = -\frac{\pi}{4}$ lub $y = \frac{\pi}{4}$ oraz punktów na osi X będących całkowitymi wielokrotnościami liczby π. Końce odcinków nie należą do wykresu. Elektronicy nazywają taki przebieg czasowy *drganiem prostokątnym*.



Rysunek 6.3

Funkcja tak określona jest przedziałami ciągła i monotoniczna, mianowicie w przedziałach $((m-1)\pi, m\pi)$, $m \in \mathbb{Z}$. Można więc do niej stosować Twierdzenie 1.

Obliczmy współczynniki a_n, b_n według wzorów (9.9)–(9.11):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{\pi}{4}\right)dx + \int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}dx\right] = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{4}\right) = 0,$$

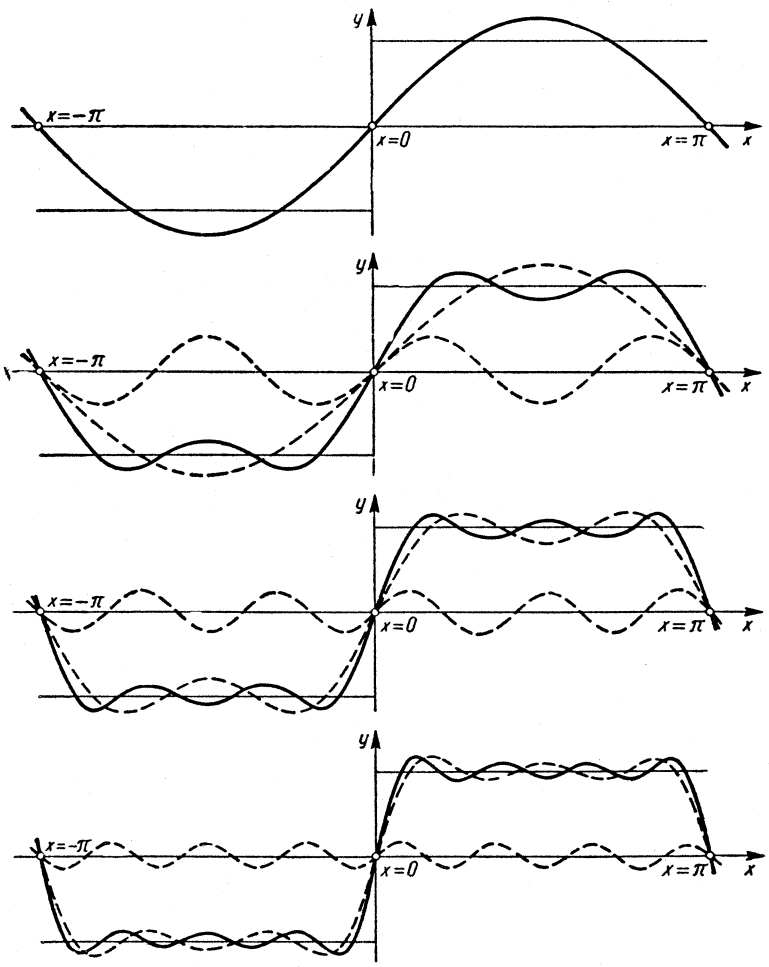
$$a_n = \frac{1}{4}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\cos nx)\,dx + \int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] = \frac{1}{4n}\left[-\sin nx|_{-\pi}^{0} + \sin nx|_0^{\pi}\right] = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{4}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\sin nx)\,dx + \int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right] = \frac{1}{4n}\left[\cos nx|_{-\pi}^{0} - \cos nx|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{4n}(2-2\cos n\pi),$$

a więc $b_n = 0$ dla n parzystych zaś $b_n = 1/n$ dla n nieparzystych. Skutkiem tego otrzymujemy rozwinięcie funkcji (9.18) w szereg Fouriera:

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots \tag{9.19}$$

Na Rysunku 6.4 zilustrowano na tle wyjściowej funkcji prostokątnej najpierw pierwszy wyraz szeregu $f_1(x) = \sin x$, potem sumę dwóch pierwszych wyrazów $s_2(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$, potem sumę $s_3(x) = s_2(x) + \frac{1}{5}\sin 5x$, wreszcie sumę $s_4(x) = s_3(x) + \frac{1}{7}\sin 7x$. Widać jak stopniowo sumy częściowe przybliżają funkcję prostokątną.



Rysunek 6.4

Dla $x \in (0, \pi)$ na mocy definicji (9.18) możemy po lewej stronie równości (9.19) zastąpić $f(x)$ przez $\pi/4$, co daje

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots \quad \text{dla} \quad x \in (0, \pi).$$

W szczególności podstawiając $x = \frac{\pi}{2}$ otrzymujemy sumę pewnego szeregu naprzemiennego:

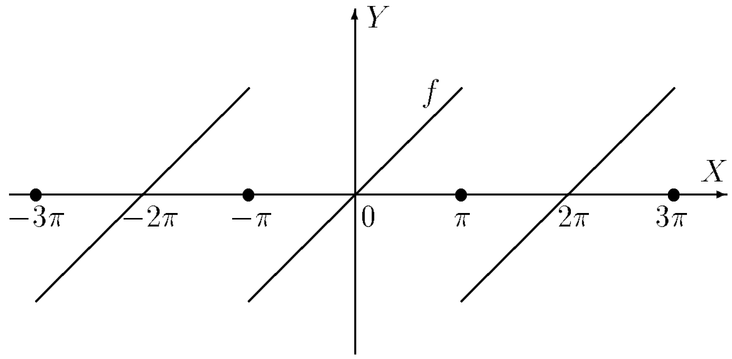
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

które się nazywa *rozwinięciem Leibniza.*

PRZYKŁAD 2. Niech f oznacza funkcję okresową z okresem 2π daną wzorem klamrowym:

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{gdy} \quad x \in (-\pi, \pi), \\ 0 & \text{gdy} \quad x = \pm\pi. \end{cases} \tag{9.20}$$

Wykres tej funkcji ukazujemy na Rys. 6.5. Składa się on z ukośnych odcinków nad przedziałami o długości 2π oraz punktów na osi X będących nieparzystymi wielokrotnościami liczby π. Końce odcinków nie należą do wykresu. Elektronicy nazywają taki przebieg czasowy *drganiem piłokształtnym.*



Rysunek 6.5

Ta funkcja też jest przedziałami ciągła i monotoniczna, więc stosujemy do niej Twierdzenie 1.

Obliczmy współczynniki a_n, b_n według wzorów (9.9)–(9.11):

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right) = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx - \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi - \frac{\pi}{n}\cos(-n\pi)\right] = -\frac{1}{n}\cos n\pi.$$

a więc $b_n = -1/n$ dla n parzystych zaś $b_n = 1/n$ dla n nieparzystych. Wobec tego otrzymujemy rozwinięcie funkcji (9.20) w szereg Fouriera:

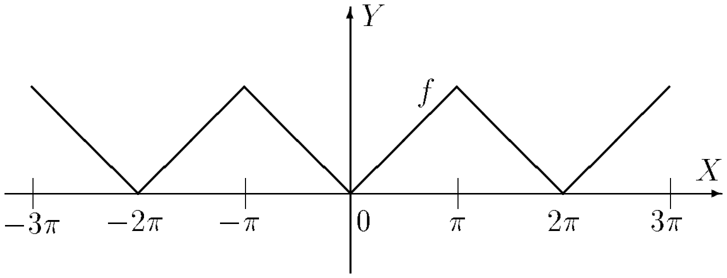
$$\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Po podstawieniu $x = \pi/2$ znikają wyrazy z parzystym n i zostaje

$$\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2} + \ldots \quad = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

co jest znowu rozwinięciem Leibniza.

PRZYKŁAD 3. Określamy funkcję f wzorem $f(x) = |x|$ dla $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$, a poza tym przedziałem określamy przez okresowość, czyli przez warunek $f(x+2m\pi) = f(x),\ m \in \mathbb{Z}$. Jest to funkcja ciągła na całej osi X. Jej wykresem jest linia łamana, zob. Rys. 6.6.



Rysunek 6.6

Liczymy współczynniki rozwinięcia w szereg Fouriera:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1),$$

co daje 0 dla n parzystych lub $-4/\pi n^2$ dla n nieparzystych. Przy współczynnikach b_n dostajemy całkę funkcji antyparzystej po przedziale symetrycznym co – jak możemy z góry przewidzieć – daje zero:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx.$$

W pierwszej całce zamieniamy zmienne $y = -x$:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} x\sin ny\,dy + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} y\sin ny\,dy + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = 0.$$

W takim razie możemy zapisać rozwinięcie (9.8)

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right), \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

W szczególności, podstawiając $x = 0$ otrzymujemy

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right),$$

skąd

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots \tag{9.21}$$

Ten wynik możemy wykorzystać do znalezienia sumy szeregu o wyrazach $1/n^2$. Otóż oznaczmy $s = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$, wtedy

$$\frac{s}{4} = \frac{1}{4 \cdot 1^2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \ldots = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots$$

Różnica dwóch ostatnich szeregów pozostawia tylko wyrazy nieparzyste, więc

$$s - \frac{s}{4} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots,$$

a na podstawie (9.21) możemy napisać

$$s - \frac{s}{4} = \frac{3}{4}s = \frac{\pi^2}{8},$$

więc $s = \pi^2/6$. W ten sposób otrzymujemy wynik

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots,$$

który nosi nazwę *wzoru Eulera.*

Po przyjrzeniu się wszystkim trzem przykładom daje się zauważyć, że dla funkcyj parzystych w szeregu Fouriera występują tylko funkcje cosinus i wyraz stały, bo one także są funkcjami parzystymi, a dla funkcyj antyparzystych występują tylko funkcje sinus, bo one zachowują się tak samo względem odwrócenia znaku argumentu.

Istnieje możliwość zapisania szeregu Fouriera w postaci zespolonej. Z algebry wiadomo, że funkcja wykładnicza o wykładniku urojonym ma postać

$$\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Stąd otrzymuje się

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{i\varphi} + \mathrm{e}^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{i\varphi} - \mathrm{e}^{-i\varphi}}{2i}.$$

Wstawmy to do wzoru (9.8)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left[a_n\left(\mathrm{e}^{inx} + \mathrm{e}^{-inx}\right) - ib_n\left(\mathrm{e}^{inx} - \mathrm{e}^{-inx}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n - ib_n)\mathrm{e}^{inx} + (a_n + ib_n)\mathrm{e}^{-inx}\right]. \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu współczynników zespolonych

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \tag{9.22}$$

możemy napisać

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \mathrm{e}^{inx} + c_{-n}\mathrm{e}^{-inx}\right] = c_0\, \mathrm{e}^{i0\cdot x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx} + \sum_{m=-1}^{-\infty} c_m \mathrm{e}^{imx}, \tag{9.23}$$

a to można zapisać jako jedną sumę od $-\infty$ do ∞:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}. \tag{9.24}$$

Jest to właśnie *zespolona postać szeregu Fouriera.* Przy okazji mamy nowy typ szeregu o dwóch granicach nieskończonych – jest to suma dwóch szeregów: jeden od 0 do ∞, drugi od –1 do $-\infty$.

Zauważmy ciekawą własność szeregu (9.23). Otóż jeśli f jest funkcją rzeczywistą, to a_n i b_n są liczbami rzeczywistymi i wzory (9.22) pokazują, że wpółczynniki c_n następująco zachowują się względem sprzężenia zespolonego

$$c_n^* = c_{-n}. \tag{9.25}$$

Weźmy sprzężenie zespolone równości (9.23)

$$f(x)^* = c_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n^* \mathrm{e}^{-inx} + c_{-n}^* \mathrm{e}^{inx}\right] = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_{-n} \mathrm{e}^{-inx} + c_n \mathrm{e}^{inx}\right]$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \mathrm{e}^{inx} + c_{-n} \mathrm{e}^{-inx}\right] = f(x).$$

Widzimy tożsamość $f(x)^* = f(x)$, która oznacza, że funkcja f ma wartości rzeczywiste. Jeśli zrezygnujemy z warunku (9.25), to wzór (9.24) będzie rozwinięciem w szereg Fouriera funkcji o wartościach zespolonych.

9.3 Fale stojące w jednym wymiarze przestrzennym

Rozważmy równanie falowe w jednym wymiarze przestrzennym:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{9.26}$$

Tutaj u można interpretować jako poprzeczne wychylenie struny, która początkowo rozciągała się wzdłuż osi X. Przyjmijmy, że długość spoczywającej struny wynosi L, wtedy $u : \langle 0, L\rangle \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jeśli założymy, że struna jest zamocowana na obu końcach, to mamy warunki brzegowe

$$\forall\ t \in \mathbb{R}: \quad u(0,t) = u(L,t) = 0. \tag{9.27}$$

Zastosujemy *metodę rozdzielenia zmiennych* zakładając, że rozwiązanie szczególne $u(x,t)$ jest iloczynem dwóch funkcyj różnych zmiennych:

$$u(x,t) = f(x)\,g(t).$$

Fizycznie oznacza to, że szukamy *fali stojącej*, co oznacza, że wszystkie punkty struny mają taki sam rytm zmian czasowych. Po podstawieniu tego do równania (9.68) otrzymujemy

$$f''(x)\,g(t) = \frac{f(x)\,g''(t)}{v^2},$$

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{v^2}\,\frac{g''(t)}{g(t)}.$$

Lewa strona nie zależy od t, prawa strona nie zależy od x, więc obie strony nie mogą zależeć ani od x, ani od t. W takim razie równe są pewnej stałej $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f''}{f} = \frac{1}{v^2}\,\frac{g''}{g} = \lambda. \tag{9.28}$$

W ten sposób dostajemy dwa równania:

$$f''(x) = \lambda\, f(x), \quad g''(t) = v^2\lambda\, g(t).$$

Warunek brzegowy (9.27) działa tylko na funkcję f:

$$f(0) = f(L) = 0. \tag{9.29}$$

Zajmujemy się więc zagadnieniem brzegowym pierwszego równania

$$f'' - \lambda f = 0, \quad f(0) = f(L) = 0.$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Nauczyliśmy się je rozwiązywać w Rozdziale 7, ale tam były inne warunki nakładane na rozwiązanie – zadawaliśmy wartość funkcji i jej pochodnej w tym samym punkcie, a nie wartości funkcji w dwóch różnych punktach. Zobaczmy, czy te nowe warunki da się spełnić. Rozważmy trzy możliwości dla stałej λ.

I. $\lambda > 0$. Ogólne rozwiązanie ma postać

$$f(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Warunki brzegowe dają $C_1 + C_2 = 0$, $C_1\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}L} + C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}L} = 0$. Jest to układ dwóch równań na dwie niewiadome C_1, C_2. Rozwiązanie niezerowe istnieje wtedy, gdy wyznacznik macierzy tego równania jest zerem. My tymczasem otrzymujemy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}L} & \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}L} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}L} - \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}L} \neq 0,$$

czyli $\mathrm{e}^{2\sqrt{\lambda}L} \neq 1$. Tego warunku nie da się spełnić dla $\lambda > 0$ i $L \neq 0$. W takim razie pozostaje $C_1 = C_2 = 0$, więc nie da się spełnić warunków brzegowych przez znalezione rozwiązanie ogólne.

II. $\lambda = 0$. Rozwiązanie ogólne

$$f(x) = C_1 x + C_2$$

także nie może spełnić warunków brzegowych (9.29).

III. $\lambda < 0$. Dla rozwiązania ogólnego

$$f(x) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}x$$

warunek $f(0) = 0$ daje $C_1 = 0$. Drugi warunek daje

$$f(L) = C_2 \sin\sqrt{-\lambda}L = 0, \quad \text{czyli} \quad \sqrt{-\lambda}L = n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Wartość $n = 0$ powinniśmy wykluczyć, bo ona daje rozwiązanie zerowe, zaś n ujemne dają rozwiązania liniowo zależne od tych dla n dodatniego.

Doszliśmy do tego, że nasze zagadnienie Cauchy'ego ma niezerowe rozwiązanie tylko wtedy, gdy w równaniu (9.28) występuje stała

$$\lambda = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Funkcje zależne od położenia trzeba ponumerować tym samym wskaźnikiem n, który numeruje wartości λ:

$$f_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Równanie różniczkowe dla funkcji zależnej od czasu:

$$g''(t) = -v^2\,\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,g(t)$$

ma rozwiązania

$$g_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi vt}{L} + B_n \sin\frac{n\pi vt}{L}.$$

W ten sposób udowodniliśmy

Wniosek 1. Równanie falowe (9.68) z warunkami brzegowymi $u(0,t) = u(L,t) = 0$ ma nieskończoną rodzinę rozwiązań

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi vt}{L} + B_n \sin\frac{n\pi vt}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Stała C_n w tym wzorze staje się niepotrzebna, bo można ją włączyć do A_n i B_n.

W argumentach funkcyj trygonometrycznych stoi wyrażenie $\omega_n t$, gdzie $\omega_n = n\pi v/L$. Z tego wniosku wynika więc, że struna z umocowanymi końcami może drgać harmonicznie z różnymi częstościami, z których najniższa dla $n = 1$ wynosi $\nu = v/2L$, a pozostałe są jej wielokrotnościami $n\nu$. Drgania odpowiadające większym częstościom nazywają się *wyższymi harmonicznymi.* Rozwiązanie ogólne jest kombinacją liniową rozwiązań szczególnych, więc jest dane przez szereg

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi vt}{L} + B_n \sin\frac{n\pi vt}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{9.30}$$

To rozwiązanie nie jest już falą stojącą.

Jeśli chcemy wyznaczyć stałe A_n, B_n, to oprócz warunków brzegowych musimy wziąć pod uwagę warunki początkowe, tzn ustalić $u(x,0)$ oraz $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$. Wybierając $u(x,0) = \phi(x)$ dostajemy warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \phi(x), \tag{9.31}$$

natomiast dla $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$ otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{L} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \psi(x). \tag{9.32}$$

Powołując się na teorię szeregów Fouriera poznaną w rozdziale 6, możemy znaleźć współczynniki tych rozwinięć. Przypomnijmy, że dla szeregu postaci

$$F(y) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos ny + b_n \sin ny)$$

określonego w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ współczynniki wylicza się według wzorów

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y) \cos ny\, dy, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y) \sin ny\, dy. \tag{9.33}$$

Jeśli dziedziną dla x jest przedział $\langle 0, L\rangle$, to dla $y = \pi x/L$ jest przedział $\langle 0, \pi\rangle$, więc można funkcje ϕ i ψ określić dla ujemnych wartości przez antysymetrię, tzn.

$$\phi(-x) = -\phi(x),\ \ \psi(-x) = -\psi(x), \tag{9.34}$$

bo taką własność mają szeregi po lewej stronie wzorów(9.31) i (9.32). Robimy to po to, żeby móc skorzystać z wzorów (9.33).

Przy podstawieniu $y = \pi x/L$ z wzoru (9.31) po wykorzystaniu (9.33) dostajemy

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi\left(\frac{Ly}{\pi}\right) \sin ny\, dy,$$

a po wykorzystaniu (9.34)

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \phi\left(\frac{Ly}{\pi}\right) \sin ny\, dy.$$

Podobnie z (9.32) po wykorzystaniu (9.34) dostajemy

$$\frac{n\pi v}{L} B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi\left(\frac{Ly}{\pi}\right) \sin ny\, dy = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \psi\left(\frac{Ly}{\pi}\right) \sin ny\, dy.$$

Po zamianie zmiennych całkowania mamy $dy = \frac{\pi}{L}\, dx$, więc

$$A_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \tag{9.35}$$

oraz $\frac{n\pi v}{L} B_n = \frac{2}{L} \int\limits_0^L \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$, czyli

$$B_n = \frac{2}{n\pi v} \int\limits_0^L \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx. \tag{9.36}$$

Twierdzenie 1. Istnieje co najwyżej jedno rozwiązanie zagadnienia granicznego (tzn. brzegowo-początkowego) dla równania falowego (9.68).

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją dwa rozwiązania u_1 i u_2 spełniające te same warunki graniczne. Wtedy ich różnica $u = u_1 - u_2$ jest rozwiązaniem równania falowego z zerowymi warunkami granicznymi. Pokażemy, że $u(x,t) = 0$ tożsamościowo.

Rozważmy funkcję

$$F(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^L \left[v^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 \right] dx. \tag{9.37}$$

Wtedy

$$\frac{dF}{dt} = \int\limits_0^L \left(v^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx. \tag{9.38}$$

Jeden z tych wyrazów całkujemy przez części:

$$\int\limits_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\, dx = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=0}^{x=L} - \int\limits_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx.$$

Zerowe warunki brzegowe oznaczają $u(0,t) = 0$ i $u(L,t) = 0$, skąd $\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(L,t) = 0$, więc

$$\int\limits_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\, dx = - \int\limits_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx.$$

Wstawiamy to do (9.38):

$$\frac{dF}{dt} = \int\limits_0^L \left(-v^2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx = \int\limits_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx.$$

Na mocy równania falowego to wynosi zero, więc mamy $\frac{dF}{dt} = 0$, $F(t) = \text{const}$, czyli

$$F(t) = F(0) = \frac{1}{2} \int\limits_0^L \left[v^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \right)^2 \right]_{t=0} dx.$$

Zerowy warunek początkowy oznacza $u(x,0) = 0$ oraz $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, Stąd $\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = 0$, więc

$$F(t) = 0 \quad \text{tożsamościowo.}$$

Patrząc na wyrażenie wyjściowe (9.37) stwierdzamy, że nieujemna funkcja podcałkowa musi być zerem, co jest możliwe tylko wtedy, gdy $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ tożsamościowo, czyli gdy $u(x,t) = \text{const}$. Ale z warunku początkowego $u(x,0) = 0$ więc $u(x,t) = 0$ tożsamościowo. Wtedy $u_1 = u_2$, więc rozwiązanie jest jedyne. ■

9.4 Liniowe przestrzenie funkcyjne z iloczynem skalarnym

Zbiór funkcyj V nazywamy *przestrzenią liniową* albo *lineałem nad ciałem* $\mathbb{C}$ (inna nazwa: *zespolona przestrzeń liniowa* lub *lineał zespolony*), jeśli

a) w zbiorze V jest określone dodawanie $+$ w taki sposób, że $(V, +)$ jest grupą przemienną (abelową);

b) w zbiorze V jest określone mnożenie przez liczby $\alpha \in \mathbb{C}$ w taki sposób, że spełnione są własności znane z kursu algebry (łączność mnożenia, istnienie jedynki, rozdzielność mnożenia względem dodawania).

Elementy lineału będziemy nazywać *funkcjami* lub *wektorami.*

PRZYKŁAD 1. Zbiór $C[0,1]$ wszystkich funkcyj ciągłych na przedziale domkniętym $\langle 0, 1\rangle$. Dodawanie dwóch funkcyj $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ określamy jako $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, co się nazywa *dodawaniem punktowym*, bo odbywa się w każdym punkcie dziedziny osobno. Najważniejsze jest sprawdzenie, czy oba działania nie wyprowadzają poza zbiór. Tak jest w istocie, gdyż suma funkcyj ciągłych jest ciągła, a pomnożenie przez stały skalar z funkcji ciągłej daje funkcję ciągłą. Sprawdzenie własności a,b przenosimy na ćwiczenia.

Wektory f_1, f_2, $\ldots, f_n$ są *liniowo niezależne*, jeśli z równości

$$\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n = 0$$

wynika

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Jeśli w lineale V istnieje taki układ wektorów liniowo niezależnych $e_1, \ldots, e_n$, że każdy wektor $f \in V$ da się przedstawić jako kombinacja liniowa

$$f = \alpha_1\, e_1 + \ldots + \alpha_n\, e_n,$$

to lineał V *jest n-wymiarowy* albo *ma wymiar n*, a układ $\{e_k\}$ nazywa się *bazą* tego lineału. Jeśli natomiast dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ w lineale V istnieje n liniowo niezależnych wektorów, to mówimy, że V jest *nieskończenie wymiarowy.*

PRZYKŁAD 1a. W lineale $C[0,1]$ układ jednomianów 1, x, x^2, x^3, $\ldots$, x^n jest liniowo niezależny dla każdego $n \in \mathbb{N}$, czyli można znaleźć dowolnie wiele elementów liniowo niezależnych, zatem ten lineał jest nieskończenie wymiarowy.

Niech V będzie lineałem zespolonym; *iloczynem skalarnym* lub *skaloczynem* w V nazywamy odwzorowanie $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ spełniające warunki zwane *aksjomatami*:

1. $(f, g) = (g, f)^*$ – *hermitowska symetria*;
2. $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$ – *addytywność względem pierwszego czynnika*;
3. $(\alpha f, g) = \alpha^*(f, g)$ – *sprzężona jednorodność względem pierwszego czynnika*;

4a. $(f, f) \geq 0$ – *nieujemna określoność*;

4b. $(f, f) = 0 \iff f = 0$ – *niezwyrodniałość*.

Dwie ostatnie własności razem nazywają się *dodatnią określonością*. Można sprawdzić, że z własności 1 i 2 wynika addytywność względem drugiego czynnika: $(f, g+h) = (f,g) + (f,h)$, a z 1 i 3 wynika jednorodność względem drugiego czynnika: $(f, \alpha g) = \alpha(f,g)$. Należy dodać, że warunek 3 jest zapisany w wersji, jaką wolą fizycy; matematycy zakładają jednorodność (nie sprzężoną) względem pierwszego czynnika.

PRZYKŁAD 1b. Zbiór $C[-\pi,\pi]$ funkcyj ciągłych na przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ jest zamknięty względem mnożenia, bo iloczyn funkcyj ciągłych jest funkcją ciągłą. Ponadto zespolone sprzężenie funkcji ciągłej jest funkcją ciągłą, więc dla dwóch funkcyj $f, g \in C[-\pi,\pi]$ mamy $f^*g \in C[-\pi,\pi]$. W § 6.2 udowodniliśmy Twierdzenie 11 mówiące, że każda funkcja ciągła w przedziale domkniętym ma funkcję pierwotną. To oznacza, że dla $f, g \in C[-\pi,\pi]$ istnieje całka oznaczona

$$(f,g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^* g(x)dx. \tag{9.39}$$

To wyrażenie ma wszystkie potrzebne własności skaloczynu. Oznaczywszy $e_n(x) = \cos nx$ oraz $f_n(x) = \sin nx$ za pomocą tego skaloczynu możemy wzory (9.33) zapisać

$$a_n = (e_n, F), \quad b_n = (f_n, F).$$

Twierdzenie 1. Dla dowolnych $f, g \in V$ zachodzi nierówność

$$|(f,g)|^2 \leq (f,f)\,(g,g)$$

zwana *nierównością Schwarza.*

Dowód. Mieliśmy podobne Twierdzenie 1 z § 8.1 dotyczące skaloczynu w $\mathbb{R}^n$, ale potrzebny jest nowy dowód. Z własności 4a mamy

$$(f+\lambda g, f+\lambda g) \geq 0$$

dla dowolnej liczby $\lambda \in \mathbb{C}$. Z własności 2 i 3 dostajemy

$$(f,f) + \lambda^*(g,f) + \lambda(f,g) + \lambda^*\lambda(g,g) \geq 0.$$

Dzięki 1 możemy to zapisać

$$(f,f) + [\lambda(f,g)]^* + \lambda(f,g) + |\lambda|^2(g,g) \geq 0.$$

Podstawiamy teraz $\lambda = -(g,f)/(g,g)$:

$$(f,f) - \frac{[(g,f)(f,g)]^*}{(g,g)} - \frac{(g,f)(f,g)}{(g,g)} + \frac{|(g,f)|^2}{(g,g)^2}(g,g) \geq 0.$$

Znowu korzystamy z 1:

$$(f,f) - 2\frac{|(g,f)|^2}{(g,g)} + \frac{|(g,f)|^2}{(g,g)} \geq 0,$$

$$(f,f) - \frac{|(f,g)|^2}{(g,g)} \geq 0,$$

$$(f,f)(g,g) \geq |(f,g)|^2. \quad \blacksquare$$

Twierdzenie 2. Wyrażenie
$$||f|| = \sqrt{(f,f)} \tag{9.40}$$
ma następujące własności
1. $||\alpha f|| = |\alpha|\,||f||$,
2. $||f+g|| \leq ||f|| + ||g||$,
3a. $||f|| \geq 0$
3b. $||f|| = 0 \iff f = 0$.

Dowód. Dla udowodnienia 1 policzmy
$$||\alpha f||^2 = (\alpha f, \alpha f) = \alpha^* \alpha (f,f) = |\alpha|^2 ||f||^2,$$
co po spierwiastkowaniu daje potrzebną równość. Dla wykazania 2 liczymy
$$||f+g||^2 = (f+g, f+g) = (f,f) + (g,f) + (f,g) + (g,g) = (f,f) + (f,g)^* + (f,g) + (g,g)$$
$$= ||f||^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(f,g) + ||g||^2 \leq ||f||^2 + 2\,|\mathrm{Re}\,(f,g)| + ||g||^2 \leq ||f||^2 + 2\,|(f,g)| + ||g||^2.$$
Teraz korzystamy z poprzedniego twierdzenia
$$||f+g||^2 \leq ||f||^2 + 2||f||\,||g|| + ||g||^2 = (||f|| + ||g||)^2 .$$
Po spierwiastkowaniu dostaniemy nierówność trójkąta. Własność 3a wynika z (9.40) i z własności 4a skaloczynu, a własność 3b również poprzez (9.40) z własności 4b skaloczynu. ■

Własności udowodnione w tym twierdzeniu pozwalają nazwać wyrażenie (9.40) *normą.* Używając tej normy możemy wprowadzić *odległość* między funkcjami:
$$d\,(f,g) = ||f-g||.$$
W przypadku funkcyj o dziedzinie $\langle -\pi, \pi \rangle$ ze skaloczynem (9.39) kwadrat normy jest całką z kwadratu modułu:
$$||f||^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^* f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx,$$
a odległość między funkcjami jest odległością w sensie średniej kwadratowej z różnicy:
$$d\,(f,g) = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx}.$$

Skoro już mamy normę i odległość, jak w zwykłej przestrzeni, to można rozważać ciągi jej elementów albo wektorów $\{f_n\}$. Ciąg elementów linealu V spełnia *warunek Cauchy'ego*, jeśli
$$\forall\, \epsilon > 0 \ \ \exists\, N \in \mathbb{N} : \ \forall\, n, m > N \ \ d\,(f_n, f_m) < \epsilon. \tag{9.41}$$
Lineał ze skaloczynem $(V, (\cdot,\cdot))$, w którym każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny w tym lineale (tzn. granica ciągu należy do linealu), nazywamy *przestrzenią Hilberta* lub *linealem Hilberta.* [David Hilbert (1862–1943) – matematyk niemiecki,

zajmował się niemal wszystkimi działami matematyki, uważany za najwybitniejszego matematyka XX wieku.]

W lineale $C[a,b]$ można określić skaloczyn podobnie jak w (9.39), tyle że z odpowiednimi granicami całkowania: $(f,g) = \int_a^b f(x)^* g(x) d$, ale to nie jest lineał Hilberta, bo można określić ciąg funkcyj ciągłych zbieżny do funkcji nieciągłej. Taki ciąg spełnia warunek Cauchy'ego, ale jego granica nie należy do lineału $C[a,b]$, bo nie jest ciągła.

Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ niech $w : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^+$. Określamy zbiór funkcyj $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$:

$$L^2(a,b;w) = \{f : \int_a^b |f(x)|^2 w(x)\, dx < \infty\}. \tag{9.42}$$

Ostatni warunek w nawiasie klamrowym mówi, że całka z kwadratu modułu jest zbieżna. Górny wskaźnik 2 w L^2 oznacza, że chodzi o funkcje całkowalne z kwadratem (modułu). Uwaga: w tym zbiorze nie zakładamy, że funkcje są ciągłe.

Twierdzenie 3. Zbiór $L^2(a,b;w)$ jest lineałem zespolonym.

Dowód. Jeśli $f \in L^2(a,b;w)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$, to $\lambda f \in L^2(a,b;w)$, bo stałą $|\lambda|^2$ można wyciągnąć przed znak całki. Teraz sprawdzimy, czy zbiór jest zamknięty względem dodawania. Niech $f, g \in L^2(a,b;w)$. Dla dowolnych liczb zespolonych u, z zachodzi

$$0 \le (|u| - |z|)^2 = |u|^2 - 2|u|\,|z| + |z|^2,$$

skąd

$$2|u|\,|z| \le |u|^2 + |z|^2, \tag{9.43}$$

$$|u|^2 + 2|u|\,|z| + |z|^2 \le 2\left(|u|^2 + |z|^2\right). \tag{9.44}$$

Z drugiej strony

$$|u+z|^2 = (u+z)^*(u+z) = \overline{u}u + u^*z + z^*u + z^*z = |u|^2 + 2\,\mathrm{Re}(u^*z) + |z|^2 \le |u|^2 + 2|u|\,|z| + |z|^2.$$

Łącząc to z (9.44) dostajemy

$$|u+z|^2 \le 2\left(|u|^2 + |z|^2\right).$$

Wykorzystujemy to w następujących całkach

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 w(x)\, dx \le 2\int_a^b |f(x)|^2 w(x)\, dx + 2\int_a^b |g(x)|^2 w(x)\, dx < \infty,$$

bo obie całki z osobna są mniejsze od nieskończoności. To oznacza, że $f + g \in L^2(a,b;w)$ Sprawdziliśmy, że zbiór jest zamknięty względem obu działań linowych. Pozostałe aksjomaty lineału o własnościach działań liniowych są spełnione jak dla dowolnych funkcyj zespolonych. ■

Całka stojąca we wzorze (9.42) będzie kandydatem na kwadrat normy w lineale $L^2(a,b;w)$:

$$||f||^2 = \int_a^b |f(x)|^2 w(x)\, dx. \tag{9.45}$$

Własności normy wymienione w Twierdzeniu 2 są łatwe do sprawdzenia poza ostatnią. Całka z kwadratu modułu dowolnej funkcji f pomnożonej przez nieujemną funkcję w jest nieujemna, więc własność 3a jest spełniona. Dla sprawdzenia własności 3b przyrównajmy całkę z kwadratu modułu do zera:

$$||f||^2 = \int_a^b |f(x)|^2 w(x)\, dx = 0.$$

Jest to całka z funkcji nieujemnej. Jej znikanie nie oznacza niestety znikania funkcji podcałkowej na całej dziedzinie. Teraz już nie ma założenia, że funkcja f jest ciągła. Może się zdarzyć, że f jest zerem poza skończonym zbiorem punktów – wtedy całka też jest zerem, bo na wartość całki nie ma wpływu zmiana funkcji w skończenie wielu punktach. Mamy więc nieskończenie wiele funkcyj niezerowych, dla których wyrażenie (9.45) jest zerem. Warunek 3b nie jest spełniony. Matematycy znaleźli wyjście z tego kłopotu – wszystkie funkcje f, dla których wzór (9.45) daje zero, trzeba uznać za ten sam zerowy element lineału. Podobnie dwie różne funkcje f, g, dla których zachodzi

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 w(x)\, dx = 0,$$

uznamy za repezentanty tego samego elementu lineału $L^2(a, b; w)$. Takie funkcje są „niemal” równe, to znaczy równe poza „niewieloma” punktami dziedziny. To wszystko jest mało ścisłe; z braku czasu mogę jedynie podać wyrażenie, jakim posługują się matematycy: funkcje f i g są sobie równe *prawie wszędzie*, a po definicję tego pojęcia odesłać do rozdziału VI książki Witolda Kołodzieja *Analiza matematyczna*. Tak więc za element lineału trzeba uznać klasę równoważności funkcyj, które są sobie równe prawie wszędzie na przedziale $\langle a, b\rangle$.

Twierdzenie 4. Wzór

$$(f, g) = \int_a^b f(x)^* g(x) w(x)\, dx$$

określa iloczyn skalarny w $L^2(a, b; w)$.

Dowód. Należy pokazać, że dla dowolnych funkcyj z lineału podany wzór daje skończoną liczbę zespoloną. Niech $f, g \in L^2(a, b; w)$; wykorzystujemy wzór (9.43):

$$\left| \int_a^b f^* g\, w\, dx \right| \le \int_a^b |f|\,|g| w\, dx \le \frac{1}{2} \left(\int_a^b |f|^2 w\, dx + \int_a^b |g|^2 w\, dx \right) < \infty.$$

Pozostałe własności są łatwe do sprawdzenia jak w Przykładzie 1b, a kłopot z niezwyrodniałością zostaje rozwiązany przez klasy równoważności funkcyj. ■

Twierdzenie 5. Zbiór $L^2(a, b; w)$ jest lineałem Hilberta.

Dowodu nie będzie.

Dwie funkcje $f, g \in L^2(a, b; w)$ nazywają się *ortogonalne*, jeśli $(f, g) = 0$. *Układem ortogonalnym* nazywamy każdy zbiór elementów $L^2(a, b; w)$, które są parami ortogonalne. Jeśli wszystkie elementy takiego układu mają normę 1, to układ nazywa się *ortonormalny*.

PRZYKŁAD 2. Zajmijmy się funkcjami $e_n(x) = \cos nx$, $f_n(x) = \sin nx$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $e_0(x) = 1/\sqrt{2}$. Policzmy ich skaloczyny w $L^2(-\pi, \pi; 1/\pi)$:

$$(e_0, e_n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi\sqrt{2}n} \sin nx|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}n}(0-0) = 0,$$

$$(e_0, f_n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = \frac{-1}{\pi\sqrt{2}n} \cos nx|_{-\pi}^{\pi} = \frac{-1}{\pi\sqrt{2}n}[(-1)^n - (-1)^n] = 0,$$

$$(e_m, e_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x + \frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \text{dla} \quad m \neq n.$$

Podobnie pokazuje się, że $(f_m, f_n) = 0$ dla $m \neq n$ oraz $(e_n, f_m) = 0$ dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$. To znacza, że układ $\{e_0,\, e_n,\, f_m\}$ jest ortogonalny.

Wyliczmy teraz kwadraty norm:

$$||e_0||^2 = (e_0, e_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2\pi}\; x|_{-\pi}^{\pi} = 1,$$

$$||e_n||^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2nx)\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[x + \frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_{-\pi}^{\pi} = 1.$$

Podobnie wyliczymy $||f_n||^2 = 1$. To oznacza, że układ $\{e_0,\, e_n,\, f_n\}$ jest ortonormalny.

PRZYKŁAD 3. Niech $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb zespolonych $\alpha_k \in \mathbb{C}$. Określamy l^2 jako zbiór takich ciągów zespolonych $\{\alpha_k\}$, że $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$. Suma dwóch takich ciągów $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_k\}$ oraz $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_k\}$ też należy do zbioru l^2, bo warunek zbieżności szeregu kwadatów modułów sum wynika z nierówności

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k + \beta_k|^2 \leq 2\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2$$

dowodzonej podobnie, jak dla całek w Twierdzeniu 3. Po pomnożeniu elementów ciągu przez stałą liczbę zespoloną można ją wyciągnąć z kwadratem modułu przed znak sumy, więc warunek zbieżności jest spełniony. To oznacza, że zbiór l^2 jest lineałem. W tym lineale można wskazać układ wektorów:

$$\begin{aligned}
\mathsf{e}_1 &= (1, 0, 0, 0, \ldots\ldots\ldots\ldots), \\
\mathsf{e}_2 &= (0, 1, 0, 0, \ldots\ldots\ldots\ldots), \\
\mathsf{e}_3 &= (0, 0, 1, 0, \ldots\ldots\ldots\ldots), \qquad (9.46) \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\mathsf{e}_n &= (0, 0, 0, 0, \ldots 0, 1, 0, \ldots),
\end{aligned}$$

. . . .

W lineale l^2 określa się naturalny skaloczyn $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^* \beta_k$, z którego otrzymana norma $||\boldsymbol{\alpha}|| = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}$ jest dla każdego wektora skończona na mocy definicji lineału l^2. Wyliczmy skaloczyn kilku wektorów układu (9.46):

$$(\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \ldots = 0,$$

$$(\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_3) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \ldots = 0.$$

Podobnie $(\mathsf{e}_n, \mathsf{e}_n) = 0$ dla $n \neq m$. Widzimy, że układ (9.46) jest ortogonalny. Należy zauważyć, że $(\mathsf{e}_n, \mathsf{e}_n) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, więc ten układ jest również ortonormalny, co da się zapisać za pomocą delty Kroneckera: $(\mathsf{e}_n, \mathsf{e}_m) = \delta_{nm}$. Zauważmy, że ten układ ma własność odtwarzania k-go elementu ciągu $\boldsymbol{\alpha}$ w skaloczynie z wektorem e_k: $(\mathsf{e}_k, \boldsymbol{\alpha}) = \alpha_k$.

Przed sformułowaniem następnego twierdzenia warto przypomnieć wzór na przedstawienie wektora $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ w bazie ortonormalnej: $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i$. Wiadomo przy tym, że współrzędne x_i tego wektora można wyrazić przez iloczyny skalarne: $x_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r}$. Po wstawieniu tego do poprzedniego wzoru dostajemy

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r})\, \mathbf{e}_i \tag{9.47}$$

Twierdzenie 6. Jeśli $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ jest układem ortonormalnym w lineale Hilberta V, to dla dowolnego $f \in V$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, f)|^2$ jest zbieżny i zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, f)|^2 \leq ||f||^2, \tag{9.48}$$

która przechodzi w równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, f)|^2 = ||f||^2 \tag{9.49}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e_n, f) e_n = f. \tag{9.50}$$

Dowód. Liczymy

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{m} (e_k, f) e_k \right\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{m} (e_k, f) e_k,\ f - \sum_{l=1}^{m} (e_l, f) e_l \right)$$

$$= (f, f) - \sum_{l=1}^{m} (f, (e_l, f) e_l) - \sum_{k=1}^{m} ((e_k, f) e_k, f) + \sum_{k,l=1}^{m} ((e_k, f) e_k, (e_l, f) e_l)$$

$$= (f, f) - \sum_{k=1}^{m} (e_k, f)(f, e_k) - \sum_{k=1}^{m} (e_k, f)^* (e_k, f) + \sum_{k,l=1}^{m} (e_k, f)^* (e_l, f) \delta_{kl}$$

$$= (f, f) - 2\sum_{k=1}^{m} |(e_k, f)|^2 + \sum_{k=1}^{m} |(e_k, f)|^2 = ||f||^2 - \sum_{k=1}^{m} |(e_k, f)|^2 \geq 0. \tag{9.51}$$

Wobec tego $\sum_{k=1}^{m} |(e_k, f)|^2 \leq ||f||^2$, a po przejściu do granicy $m \to \infty$ otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(e_k, f)|^2 \leq ||f||^2,$$

więc mamy udowodnioną nierówność (9.48).

Gdyby zamiast tego była równość, to z rachunków prowadzących do (9.51) otrzymujemy

$$\left|\left| f - \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, f) e_k \right|\right|^2 = ||f||^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |(e_k, f)|^2 = 0.$$

Z niezwyrodniałości normy wynika $f - \sum_{k=0}^{\infty} (e_k, f) e_k = 0$ czyli równość (9.49). ■

Wzór (9.48) nazywa się *nierównością Bessela*, a wzór (9.49) *równością Parsevala*. [Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) – astronom i geodeta niemiecki, w wieku 20 lat wyliczył orbitę komety Halleya, Marc Antoin Parseval (1755–1836) – matematyk francuski.] Równość Parsevala oznacza, że każdy wektor z lineału Hilberta V da się rozwinąć na nieskończoną kombinację wektorów układu $\{e_n\}$. To oznacza, że ten układ jest *bazą* lineału V. Z (9.50) mamy od razu współczynniki rozwinięcia na wektory bazy ortonormalnej. Wzór (9.50) jest podobny do wzoru (9.47), dlatego mówimy, że liczby $\alpha_k = (e_k, f)$ są *współrzędnymi* wektora f w bazie ortonormalnej $\{e_n\}$.

Twierdzenie 7. Niech V będzie lineałem Hilberta i niech $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ będzie układem ortonormalnym w V. Jeśli $\{\alpha_k\} \in l^2$, tzn. $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$, to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ jest zbieżny w V oraz zachodzi równość

$$\left|\left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \right|\right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2.$$

Dowód. Wobec zbieżności szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $m > n \geq N$ zachodzi

$$\sum_{k=n}^{m} |\alpha_k|^2 < \epsilon^2.$$

Z ortonormalności układu $\{e_n\}$ mamy

$$\left|\left| \sum_{k=n}^{m} \alpha_k e_k \right|\right|^2 = \left(\sum_{k=n}^{m} \alpha_k e_k, \sum_{l=n}^{m} \alpha_l e_l \right) = \sum_{k,l=n}^{m} \alpha_k^* \alpha_l \delta_{kl} = \sum_{k=n}^{m} |\alpha_k|^2 < \epsilon^2.$$

Po spierwiastkowaniu dostajemy $\left|\left| \sum_{k=n}^{m} \alpha_k e_k \right|\right| < \epsilon$. To oznacza spełnienie warunku Cauchy'ego z § 6.1. Na mocy Twierdzenia 1 z tamtego paragrafu i ponieważ V jest przestrzenią Hilberta, szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ jest zbieżny, a potrzebną równość dowodzi się tak samo, jak równość Parsevala. ■

W Przykładzie 2 pokazaliśmy, że układ $\{e_0, f_1, e_1, f_2, e_2, \dots\}$ jest ortonormalny w $L^2(-\pi,\pi;\pi^{-1})$. Można pokazać, że jest on bazą. To oznacza, że dowolną funkcję $f \in L^2(-\pi,\pi;\pi^{-1})$ można przedstawić w postaci sumy dwóch szeregów

$$f = \sum_{k=0}^{\infty}(e_k, f)e_k + \sum_{k=1}^{\infty}(f_k, f)f_k,$$

albo po przegrupowaniu $f = (e_0, f)e_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[(e_k, f)e_k + (f_k, f)f_k]$. Warto teraz wpisać jawną postać funkcyj bazowych

$$f = (e_0, f)\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty}[(e_k, f)\cos kx + (f_k, f)\sin kx]. \tag{9.52}$$

W tej postaci rozpoznajemy szereg Fouriera. Współczynniki przy funkcjach trygonometrycznych są skaloczynami, co zauważyliśmy już poprzednio w Przykładzie 1b. Należy dopuścić, że funkcja f stojąca po lewej stronie wzoru (9.52) od funkcji f występującej w skaloczynach może się różnić w punktach nieciągłości, ale i tak obie są uważane za ten sam element lineału Hilberta $L^2(-\pi,\pi;\pi^{-1})$.

Twierdzenia 6 i 7 mówią, że każdemu elementowi lineału $L^2(-\pi,\pi;\pi^{-1})$ odpowiada jeden nieskończony ciąg współczynników a_n, b_n w oznaczeniach Przykładu 1b zwanych *współczynnikami Fouriera*, a z kolei każdy ciąg tych współczynników zadaje element $f \in L^2(-\pi,\pi;\pi^{-1})$ jako szereg z Twierdzenia 7.

9.5 Operatory różniczkowe na przestrzeniach funkcyjnych

Do tej pory mówiliśmy o funkcjach, czy odwzorowaniach liczb w liczby lub wektorów w wektory. Terazx przejdziemy piętro wyżej i będziemy mówić o odwzorowaniach funkcyj w funkcje, czyli o operatorach.

Operatorem liniowym A o dziedzinie D_A w lineale Hilberta $\mathcal{H} = L^2(a, b; w)$ nazywamy odwzorowanie $A : D_A \to \mathcal{H}$ o własności

$$\forall\, f, g \in D_A,\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}: \quad A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g).$$

Operator liniowy A jest *operatorem różniczkowym*, jeśli jest zadany przez pewne wyrażenie różniczkowe R, a jego dziedzina D_A zawiera funkcje f, które muszą spełniać:
1. warunki zgodności z R, tzn. $R(f) \in \mathcal{H}$,
2. warunki brzegowe.

Powinniśmy zwrócić uwagę na następujące sprawy:
a) jeśli funkcja f należy do dziedziny D_A, to operator A działa zgodnie z przepisem $A(f) = -\frac{d^2f}{dx^2}$,
b) kiedy f nie należy do D_A, wtedy zapis $A(f)$ nie jest określony nawet wtedy, gdy $R(f)$ istnieje.

PRZYKŁAD 1. Niech $\mathcal{H} = L^2(0,1)$ i niech $R(f) = -\frac{d^2f}{dx^2}$. Określmy operator A opowiadający wyrażeniu różniczkowemu R przez zadanie jego dziedziny:

$$D_A := \{\text{funkcje z } L^2(0,1) \text{ zgodne z } R \text{ i spełniające warunki } f(0) = 0,\ f(1) = 1\}.$$

Weźmy $f(x) = \sqrt{x}$. Czy f należy do $\mathcal{H}$? Sprawdźmy, czy f jest całkowalna z kwadratem modułu:

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Owszem, mamy $f \in \mathcal{H}$. Sprawdźmy, czy f jest zgodna z R. Mamy

$$R(f)(x) = -\frac{d^2\, x^{1/2}}{dx^2} = -\frac{1}{2}\frac{d\, x^{-1/2}}{dx} = \frac{1}{4}x^{-3/2}.$$

Czy po zróżniczkowaniu wynik jest całkowalny z kwadratem modułu:

$$\int_0^1 |R(f)(x)|^2 dx = \frac{1}{16}\int_0^1 x^{-3} dx = -\frac{1}{32}\, x^{-2}\Big|_0^1 = \infty.$$

Widzimy, że $R(f) \notin L^2(0,1)$, zatem $f \notin D_A$.

Niech A będzie operatorem liniowym z dziedziną $D_A \subset \mathcal{H}$. Liczba $\lambda \in \mathbb{C}$ nazywa się *wartością własną* operatora A, jeśli istnieje taka niezerowa funkcja $f \in D_A$, że

$$A(f) = \lambda f. \tag{9.53}$$

Ta równość nazywa się *równaniem na wartości własne*, a funkcja f spełniająca je nazywa się *funkcją własną należącą do wartości własnej* λ. Czy jedna funkcja może należeć do wielu wartości własnych? Odpowiedź brzmi nie, gdyż przeczyłoby to jednoznaczności operatora. Czy do danej wartości wartości własnej może należeć wiele funkcyj własnych? Opowiedź jest twierdząca, bo wystarczy pomnożyć funkcję własną f przez liczbę $\alpha \in \mathbb{C}$, a dzięki liniowości operatora A iloczyn αf jest też funkcją własną należącą do tej samej wartości własnej λ. Ponadto, jeśli f_1 i f_2 są funkcjami własnymi do tej samej wartości własnej, to ich kombinacja liniowa $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ też należy do tej samej wartości własnej. W ten sposób widzimy, że zbiór wszystkich funkcyj własnych należących do jednej wartości własnej λ jest lineałem *należącym do wartości własnej* λ. – nazywa się on *podprzestrzenią własną*. Wymiar tego lineału nazywa się *krotnością* wartości własnej λ. Wartość własna o krotności jeden nazywa się *niezwyrodniała* lub *niezdegenerowana*.

PRZYKŁAD 2. Niech $\mathcal{H} = L^2(-1,1)$, $R(f) = -\frac{d^2 f}{dx^2}$ oraz

$$D_A = \{\text{funkcje zgodne z } R \text{ i spełniające warunki } f(-1) = f(1) = 0\}.$$

Operator A odpowiada wyrażeniu różniczkowemu R i ma dziedzinę D_A. Szukamy rozwiązań równania

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} = \lambda f \quad \text{dla} \quad \lambda > 0$$

w dziedzinie D_A. Takie równanie rozwiązywaliśmy już po rozdzieleniu zmiennych przy równaniu falowym i dowiedzieliśmy, że funkcje znikające na końcach przedziału mogą być tylko trygonometryczne:

$$f(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x \quad \text{dla} \quad \lambda > 0.$$

Tym razem przedział jest inny, więc dalsze rachunki powtórzymy:

$$f(-1) = C_1 \cos\sqrt{\lambda} - C_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0,$$
$$f(+1) = C_1 \cos\sqrt{\lambda} + C_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0. \tag{9.54}$$

Jest to jednorodny liniowy układ równań dla niewiadomych C_1, C_2. Ma on niezerowe rozwiązanie wtedy, gdy jego wyznacznik jest zerem:

$$\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda} & -\sin\sqrt{\lambda} \\ \cos\sqrt{\lambda} & \sin\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = 2\sin\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = \sin 2\sqrt{\lambda} = 0.$$

To prowadzi do wniosku, że $2\sqrt{\lambda} = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$, czyli

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Znaleźliśmy wartości własne. Teraz szukamy funkcyj własnych. Równania (9.54) są liniowo zależne, więc wystarczy zająć się jednym z nich po wstawieniu do niego znalezionego λ_n:

$$C_1 \cos\frac{n\pi}{2} - C_2 \sin\frac{n\pi}{2} = 0.$$

Dla n parzystego znika sinus, a $\cos\frac{n\pi}{2} = \pm 1$, więc $C_1 = 0$ a C_2 jest dowolne, np. $C_2 = 1$. Mamy wtedy rozwiązania

$$f_n(x) = C_2 \sin\frac{n\pi x}{2} \quad \text{dla} \;\; n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dla n nieparzystego znika cosinus, a $\sin\frac{n\pi}{2} = \pm 1$, stąd $C_2 = 0$ i wybieramy $C_1 = 1$ otrzymując

$$f_n(x) = C_1 \cos\frac{n\pi x}{2} \;\; \text{dla} \;\; n = 2k-1, \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Każda wartość własna ma jednowymiarowy lineał własny, więc jest niezwyrodniała.

Operator liniowy A w lineale Hilberta $\mathcal{H}$ z dziedziną D_A nazywa się
1. *hermitowski*, jeśli
$$\forall\, f, g \in D_A: \quad (A(f), g) = (f, A(g));$$
2. *dodatnio określony*, jeśli jest hermitowski oraz
$$\forall\, f \in D_A: \; (A(f), f) \geq 0;$$
3. *dodatni*, jeśli jest dodatnio określony oraz
$$(A(f), f) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0.$$

Twierdzenie 1. Jeśli A jest operatorem hermitowskim, to
1. wszystkie jego wartości własne są rzeczywiste,
2. funkcje własne należące do różnych wartości własnych są ortogonalne.

Dowód. Niech $A(f) = \lambda f$. Skoro A jest hermitowski, to $(A(f), f) = (f, A(f))$, czyli

$$(\lambda f, f) = (f, \lambda f).$$

Korzystamy z własności skaloczynu:

$$\lambda^*(f, f) = \lambda\,(f, f).$$

Z definicji funkcji własnej mamy $f \neq 0$, a z niezwyrodniałości skaloczynu $(f, f) \neq 0$, więc $\lambda^* = \lambda$, wartość własna jest rzeczywista. Własność 1 jest udowodniona.

Niech $A(f_1) = \lambda_1 f_1$, $A(f_2) = \lambda_2 f_2$. Z hermitowskości A mamy $(A(f_1), f_2) = (f_1, A(f_2))$, czyli

$$(\lambda_1 f_1, f_2) = (f_1, \lambda_2 f_2).$$

Obie λ_i są rzeczywiste, więc

$$\lambda_1\,(f_1, f_2) = \lambda_2\,(f_1, f_2),$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(f_1, f_2) = 0.$$

Ponieważ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, to musi być $(f_1, f_2) = 0$, więc te dwie funkcje własne są ortogonalne. Własność 2 jest udowodniona. ■

Lemat 1. Jeśli operator A jest dodatnio określony, to jego wartości własne są nieujemne, jeśli zaś jest dodatni, to wszystkie jego wartości własne są dodatnie.

Dowód. Niech $A(f) = \lambda f$. Wtedy $f \neq 0$ i z definicji dodatniej określoności operatora

$$(A(f), f) = (\lambda f, f) = \lambda\,(f, f) \geq 0.$$

Drugi czynnik jest dodatni, więc pierwszy jest nieujemny. Natomiast dla operatora dodatniego

$$(A(f), f) = \lambda\,(f, f) > 0.$$

Drugi czynnik jest dodatni, więc pierwszy też musi być dodatni: $\lambda > 0$ ■

Chcemy teraz zbadać hermitowskość operatora zadanego przez wyrażenie różniczkowe $-\frac{d^2}{dx^2}$. Następne twierdzenie charakteryzuje funkcje zgodne z tym wyrażeniem w przypadku przedziału skończonego.

Twierdzenie 2. Jeśli funkcja $f \in L^2(a, b)$ jest zgodna z $-\frac{d^2}{dx^2}$, to granice

$$f(a) = \lim_{x\to a+} f(x), \quad f(b) = \lim_{x\to b-} f(x), \quad f'(a) = \lim_{x\to a+} f'(x), \quad f'(b) = \lim_{x\to b-} f'(x)$$

istnieją i są skończone.

Dowodu nie będzie.

PRZYKŁAD 3. Niech operator A określony w $L^2(a, b)$ odpowiada wyrażeniu różniczkowemu $R = -\frac{d^2}{dx^2}$. Niech jego dziedzina zawiera funkcje zgodne z R i spełniające warunki brzegowe $f(a) = f(b) = 0$. Pokażemy, że jest on hermitowski. Weźmy $f, g \in D_A$; wtedy przy całkowaniu przez części

$$(A(f), g) = -\int_a^b \frac{d^2 f(x)^*}{dx^2}\, g(x)\, dx = -\left(\frac{df^*}{dx}\, g(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{df^*}{dx}\,\frac{dg}{dx}\, dx \right).$$

Skoro $f, g \in D_A$, to $\frac{df(a)}{dx}$, $\frac{df(b)}{dx}$ są skończone, zaś $g(a) = g(b) = 0$, więc pierwszy wyraz w nawiasie jest zerem i otrzymaliśmy

$$(A(f), g) = (f', g'). \tag{9.55}$$

Z drugiej strony

$$(f, A(g)) = (A(g), f)^* = (g', f')^* = (f', g').$$

Po porównaniu tego z (9.55) otrzymujemy

$$\forall\ f, g \in D_A : \quad (A(f), g) = (f, A(g)).$$

Operator A jest hermitowski. W Przykładzie 2 nieprzypadkowo wartości własne były rzeczywiste. Ponadto na podstawie (9.55) i własności skaloczynu

$$(A(f), f) = (f', f') \geq 0;$$

operator A jest dodatnio określony. Jeśli założymy $(A(f), f) = 0$, to

$$\int_a^b |f'(x)|^2 dx = 0,$$

skąd $f' = 0$ oraz $f(x) = \text{const}$. Ale $f \in D_A$, więc $f(a) = 0$, czyli $f = 0$. Zobaczyliśmy, że operator A jest dodatni. W Przykładzie 2 nieprzypadkowo wartości własne były dodatnie. Teraz widać, dlaczego przed drugą pochodną od początku pisaliśmy minus.

9.5.1 Operator Laplace'a

Będziemy rozważać laplasjan Δ w jednym wymiarze jako operator liniowy zadany przez wyrażenie różniczkowe $-\frac{d^2}{dx^2}$. Rozważymy dwa przypadki lineału Hilberta: $L^2(a, b)$ dla skończonego przedziału $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ lub $L^2(S)$, gdzie S jest okręgiem powstałym przez utożsamienie punktów a i b. Warunki zgodności wymagają, aby funkcje $f \in D_\Delta$ były ciągłe wraz z pochodną w każdym punkcie. W drugim przypadku $f \in D_\Delta$ musi dodatkowo spełniać $f(a) = f(b),\ f'(a) = f'(b)$.

Przez *jednowymiarowy operator Laplace'a* Δ rozumiemy jeden z następujących operatorów różniczkowych:

1. $\mathcal{H} = L^2(S)$, a dziedzina D_Δ zawiera wszystkie funkcje zgodne z $-\frac{d^2}{dx^2}$;

2. $\mathcal{H} = L^2(a, b)$, a dziedzina D_Δ zawiera wszystkie funkcje f zgodne z $-\frac{d^2}{dx^2}$ oraz spełniające alternatywnie:

a) *warunki brzegowe Dirichleta*: $f(a) = f(b) = 0$,

b) *warunki brzegowe Neumanna*: $f'(a) = f'(b) = 0$,

c) *mieszane warunki brzegowe*: $f(a) = f'(b) = 0$ lub $f'(a) = f(b) = 0$.

[Karl Gottfried Neumann (1832–1925) – matematyk niemiecki, zajmował się głównie teorią potencjału.]

Własności operatora Laplace'a są zebrane w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 3. a) Operator Laplace'a Δ jest hermitowski i dodatnio określony. Przy warunkach brzegowych Dirichleta i mieszanych jest również dodatni.

b) Operator Δ ma nieskończony ciąg wartości własnych:

$$(\lambda_0 = 0) < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \ldots$$

takich, że $\lambda_n \to \infty$ dla $n \to \infty$. Wartość $\lambda_0 = 0$ ma krotność jeden w przypadku $L^2(S)$ i $L^2(a, b)$ z warunkami Neumanna. Przy warunkach Dirichleta i mieszanych 0 nie jest wartością własną. W $L^2(S)$ wartości λ_n dla $n \geq 1$ mają krotność 2, we wszystkich innych przypadkach mają krotność 1.

c) Ortogonalne funkcje własne operatora Δ tworzą bazę odpowiedniego lineału $\mathcal{H}$.

D o w ó d można znaleźć w książce Samuela Hollanda *Applied Analysis by the Hilbert Space Method*, Marcel Dekker, New York 1990, § 4.5. Warto może wspomnieć, że przy warunkach Neumanna funkcja $f(x) = \text{const}$ należy do dziedziny i jest funkcją własną należącą do wartości własnej 0. Inne funkcje należące do zerowej wartości własnej są jej wielokrotnością, więc ta wartość własna jest niezwyrodniała.

Twierdzenie 4. Niech A będzie operatorem hermitowskim w lineale Hilberta $\mathcal{H}$. Niech A posiada nieskończony ciąg funkcyj własnych $\{\phi_n\}$, które tworzą bazę ortonormalną lineału $\mathcal{H}$. Wtedy dla $f \in D_A$ zachodzi

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n, \quad \text{gdzie} \quad c_n = (\phi_n, f) \tag{9.56}$$

oraz

$$A(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n \phi_n, \tag{9.57}$$

gdzie λ_n są wartościami własnymi operatora A.

D o w ó d . Równość (9.56) wynika stąd, że $D_A \subset \mathcal{H}$, a układ wektorów $\{\phi_n\}$ jest bazą w $\mathcal{H}$. Skoro dla $f \in D_A$ zachodzi $A(f) \in \mathcal{H}$, a układ $\{\phi_n\}$ jest bazą w $\mathcal{H}$, to dzięki Twierdzeniu 6 w § 10.3 można napisać

$$A(f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n, \quad \text{gdzie} \quad a_n = (\phi_n, A(f)). \tag{9.58}$$

Z hermitowskości A mamy

$$(\phi_n, A(f)) = (A(\phi_n), f) = (\lambda_n \phi_n, f) = \lambda_n (\phi_n, f).$$

Przypomniawszy oznaczenie $c_n = (\phi_n, f)$ możemy ten wynik zapisać $a_n = \lambda_n c_n$. Po wstawieniu tego do (9.58) otrzymujemy $A(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n \phi_n$. Równość (9.57) jest udowodniona. ■

Zbiór wartości własnych operatora liniowego A nazywa się *widmem* (*spektrum*) *dyskretnym* lub *punktowym* tego operatora. Istnieje jeszcze *widmo ciągłe*, ale nie mamy czasu na wprowadzanie jego definicji. Powiemy tylko, że funkcje własne odpowiadające wartościom z widma ciągłego nie mieszczą się w lineale Hilberta.

Znając język przestrzeni Hilberta i operatorów w nich określonych, możemy teraz powiedzieć, że rozważane w § 9.3 równanie falowe w jednym wymiarze przestrzennym po rozdzieleniu zmiennych doprowadziło nas do równania $f''(x) = \lambda f(x)$, czyli szukania wartości własnych operatora drugiej pochodnej. Już wiemy, że taki operator jest hermitowski ale nie jest dodatnio określony. Nie dziwnego, że otrzymaliśmy wtedy ujemne wartości λ. My teraz zamienimy to na zagadnienie wartości własnych jednowymiarowego operatora Laplace'a Δ w lineale Hilberta $\mathcal{H} = L^2(0, L)$ działającego jako różniczkowanie z minusem:

$$\Delta(f) = -f''.$$

Warunki brzegowe struny umocowanej na końcach są warunkami Dirichleta. Przy tych warunkach znaleźliśmy ciąg wartości własnych $\epsilon_n = n^2\pi^2/L^2$ i funkcyj własnych

$$f_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

tworzących układ ortogonalny. Nie sprawdzaliśmy wtedy unormowania tych funkcyj; zróbmy to teraz.

$$(f_n, f_n) = |C_n|^2 \int_0^L \sin^2\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{|C_n|^2}{2}\int_0^L \left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \frac{|C_n|^2}{2}\left(x - \frac{L}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L = \frac{|C_n|^2 L}{2} = 1.$$

Stąd $|C_n|^2 = 2/L$, a po wyborze rzeczywistego i nieujemnego C_n dostajemy $C_n = \sqrt{2/L}$. W takim razie funkcje

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\frac{n\pi x}{L}$$

tworzą układ ortonormalny. Rozwiązanie ogólne (9.30) ze str. 261 możemy zapisać w postaci

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(\sqrt{\epsilon_n}vt) + B_n\sin(\sqrt{\epsilon_n}vt)\right]\sqrt{L/2}\,f_n(x), \tag{9.59}$$

Wzory (9.35) i (9.36) na współczynniki A_n i B_n możemy zapisać za pomocą skaloczynu w $\mathcal{H}$

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\,(f_n, \phi), \quad B_n = \sqrt{\frac{2}{L\epsilon_n}}\,\frac{1}{v}\,(f_n, \psi).$$

Po wstawieniu tego do (9.59) otrzymujemy wzór

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(f_n, \phi)\,\cos(\sqrt{\epsilon_n}vt) + (\sqrt{\epsilon_n}v)^{-1}(f_n, \psi)\,\sin(\sqrt{\epsilon_n}vt)\right] f_n(x),$$

który przypomina (9.56), z tym że współczynniki rozwinięcia tym razem zależą od czasu, bo lewa strona ma dodatkową zależność od czasu. Otrzymaliśmy wektor z lineału Hilberta, który oprócz tego jet funkcją czasu: $u(t) \in \mathcal{H}$. W każdej chwili t jest on rozwijany w szereg względem elementów bazy ortonormalnej $\{f_n\}$.

9.5.2 Operator Legendre'a

Niech $\mathcal{H} = L^2(-1,1)$. *Operatorem Legendre'a* w $\mathcal{H}$ nazywamy operator różniczkowy zadany przez wyrażenie różniczkowe

$$R(f) = -\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{df}{dx}\right]$$

z dziedziną D_A zawierającą funkcje zgodne z R i spełniające warunek

$$\text{istnieją} \quad \lim_{x\to 1-} f(x) \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to -1+} f(x) \quad \text{i są skończone.}$$

Można wykazać, że dla funkcyj f z D_A zachodzi

$$\lim_{x\to\pm 1}\left(1-x^2\right)f'(x) = 0. \tag{9.60}$$

Zauważmy, że wielomiany należą do $\mathcal{H}$. Pochodne wielomianów są wielomianami, więc wyrażenie różniczkowe R w wyniku działania na wielomian daje wielomian. Wobec tego wielomiany są zgodne z R i należą do D_A.

Twierdzenie 5. Operator Legendre'a jest hermitowski i dodatnio określony.

D o w ó d . Liczymy całkując przez części

$$(A(f),g) = -\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{df}{dx}\right]^* g(x)\,dx$$

$$= -\left[\left((1-x^2)f'(x)\right)^* g(x)\right]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)(f'(x))^* g'(x)\,dx.$$

Korzystamy z (9.60):

$$(A(f),g) = \left((1-x^2)^{1/2}f',(1-x^2)^{1/2}g'\right).$$

Z drugiej strony

$$(f,A(g)) = (A(g),f)^* = \left((1-x^2)^{1/2}g',(1-x^2)^{1/2}f'\right) = \left((1-x^2)^{1/2}f',(1-x^2)^{1/2}g'\right).$$

Mamy więc równość potrzebną do hermitowskości. Ponadto mamy

$$(A(f),f) = \left((1-x^2)^{1/2}f',(1-x^2)^{1/2}f'\right) \geq 0$$

jako kwadrat skalarny pewnej funkcji. ■

Dzięki dodatniej określoności z Lematu 1 wynika, że wartości własne operatora Legendre'a są nieujemne.

Twierdzenie 6. Operator Legendre'a ma wartości własne $l(l+1)$ dla $l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Wielomiany Legendre'a P_n tworzą układ ortogonalny w lineale $L^2(-1,1)$.

D o w ó d . Równanie na wartości własne operatora Legendre'a można zapisać

$$[A(f)](x) = -\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{df}{dx}\right] = 2x\,f' - (1-x^2)\,f'' = \lambda\,f(x).$$

W ostatniej równości przenieśmy wszystko na jedną stronę:

$$(1-x^2)\,f''-2x\,f'+\lambda\,f=0. \tag{9.61}$$

Przypomnijmy równanie Legendre'a (6.91):

$$\left(1-x^2\right)f''-2x\,f'+l(l+1)f=0 \quad \text{dla} \quad l\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Wiemy, że dla każdego l ma ono rozwiązanie, które jest wielomianem Legendre'a P_l. Widzimy, że jest ono postaci (9.61), więc możemy powiedzieć, że wielomian Legendre'a P_l jest funkcją własną operatora Legendre'a do wartości własnej $\lambda_l=l(l+1)$.

Skoro przy różnych l wartości własne λ_l są różne, to na mocy Twierdzeń 1 i 5 wielomiany Legendre'a odpowiadające różnym l są ortogonalne. ■

Twierdzenie 7. Wielomiany Legendre'a tworzą bazę ortogonalną w lineale Hilberta $L^2(-1,1)$.

D o w o d u nie będzie.

Z tego twierdzenia wynika, że operator Legendre'a nie ma wartości własnych innych, niż postaci $l(l+1)$ dla $l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ i te wartości własne mają krotność jeden.

9.5.3 Operator Hermite'a

Niech $\mathcal{H}=L^2(-\infty,\infty;\mathrm{e}^{-x^2})=L^2(\mathbb{R};\mathrm{e}^{-x^2})$. To oznacza, że iloczyn skalarny jest dany wzorem

$$(f,g)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)^* g(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx.$$

Lemat 2. Wielomiany należą do $\mathcal{H}$.

D o w ó d . Najpierw pokażemy tezę dla jednomianów. Oznaczmy $j_n(x)=x^n$; liczymy kwadrat skalarny:

$$(j_n,j_n)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\,dx.$$

Funkcja podcałkowa jest symetryczna, więc

$$(j_n,j_n)=2\int\limits_0^{\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\,dx=2\int\limits_0^{1} x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\,dx+2\int\limits_1^{\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\,dx.$$

Pierwszy składnik jest całką z funkcji ciągłej na przedziale domkniętym, więc jest skończony. Drugi składnik oszacujemy przez coś większego:

$$x^2\geq x \quad \text{dla} \quad x\geq 1, \qquad -x^2\leq -x, \qquad \mathrm{e}^{-x^2}\leq \mathrm{e}^{-x},$$

więc

$$\int\limits_1^{\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\,dx\leq\int\limits_1^{\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

Całkujemy przez części

$$\int_1^\infty x^{2n}\mathrm{e}^{-x}dx = -x^{2n}\mathrm{e}^{-x}\Big|_1^\infty + 2n\int_1^\infty x^{2n-1}\mathrm{e}^{-x}dx$$

$$= \mathrm{e}^{-1} - 2nx^{2n-1}\mathrm{e}^{-x}\Big|_1^\infty + 2n(2n-1)\int_1^\infty x^{2n-2}\mathrm{e}^{-x}dx$$

$$= \mathrm{e}^{-1} + 2n\mathrm{e}^{-1} - 2n(2n-1)x^{2n-2}\mathrm{e}^{-x}\Big|_1^\infty + 2n(2n-1)(2n-2)\int_1^\infty x^{2n-3}\mathrm{e}^{-x}dx.$$

Widzimy, że w kolejnych krokach maleje wykładnik przy x pod całką, a przybywa składników sumy z czynnikami przed e^{-1}. Na końcu będzie całka z samej funkcji wykładniczej:

$$= \mathrm{e}^{-1} + 2n\mathrm{e}^{-1} + 2n(2n-1)\mathrm{e}^{-1} + \ldots + 2n(2n-1)(2n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\mathrm{e}^{-1} + (2n)!\int_1^\infty \mathrm{e}^{-x}dx$$

$$= \mathrm{e}^{-1}\left[1 + 2n + 2n(2n-1) + \ldots + 2n(2n-1)(2n-2)\cdots 2 + (2n)!\right] = \mathrm{e}^{-1}\sum_{j=0}^{2n}\frac{(2n)!}{(2n-j)!}.$$

A to jest liczba skończona. W ten sposób pokazaliśmy, że $(j_n, j_n) = 2\int_0^\infty x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}dx < \infty$, czyli jednomiany należą do $\mathcal{H}$. Wielomiany jako ich kombinacje liniowe też należą do $\mathcal{H}$ dzięki wykorzystywanemu w dowodzie Twierdzenia 3 z poprzedniego paragrafu rozumowaniu o tym, że dany zbiór jest zamknięty względem dodawania. ■

Operatorem Hermite'a B nazywamy operator różniczkowy na $\mathcal{H}$ zadany przez wyrażenie różniczkowe

$$[R(f)](x) = -\mathrm{e}^{x^2}\frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\frac{df}{dx}\right) \tag{9.62}$$

oraz dziedzinę D_B zawierającą funkcje zgodne z R.

Lemat 3. Dziedzina D_B zawiera wszystkie wielomiany.

Dowód. Należy sprawdzić, czy wielomiany są zgodne z wyrażeniem różniczkowym (9.62). Zróbmy to dla jednomianu $j_n(x) = x^n$:

$$[R(j_n)](x) = -\mathrm{e}^{x^2}\frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\frac{dx^n}{dx}\right) = -\mathrm{e}^{x^2}\frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{-x^2}nx^{n-1}\right)$$

$$= -\mathrm{e}^{x^2}\left[-2x\mathrm{e}^{-x^2}nx^{n-1} + \mathrm{e}^{-x^2}n(n-1)x^{n-2}\right] = 2nx^n - n(n-1)x^{n-2}.$$

Stwierdzamy, że $R(j_n)$ jest wielomianem, a on na mocy poprzedniego Lematu należy do $\mathcal{H}$, w takim razie jednomian $j_n \in D_B$, a stąd dzięki liniowości wyrażenia różniczkowego R wielomiany też należą do D_B. ■

Lemat 4. Jeśli $f, g \in D_B$, to $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\frac{df^*}{dx}g = 0$.

Dowód jest w książce S.S. Hollanda *Applied analysis by the Hilbert space method*, str. 264.

Twierdzenie 8. Operator B jest hermitowski i dodatnio określony.

D o w ó d . Liczymy

$$(B(f), g) = \lim_{r,s\to\infty} \int_{-r}^{s} B(f)(x)^* g(x) \mathrm{e}^{-x^2} dx$$

$$= - \lim_{r,s\to\infty} \int_{-r}^{s} \mathrm{e}^{x^2} \left(\mathrm{e}^{-x^2} f'\right)'^* g(x) \mathrm{e}^{-x^2} dx = - \lim_{r,s\to\infty} \int_{-r}^{s} \left[\mathrm{e}^{-x^2} f'(x)\right]'^* g(x)\, dx$$

$$= \lim_{r,s\to\infty} \left[-\mathrm{e}^{-x^2} \frac{df^*}{dx} g \Big|_{-r}^{s} + \int_{-r}^{s} f'(x)^* g'(x) \mathrm{e}^{-x^2} dx \right] = (f', g').$$

w ostatnim przejściu skorzystaliśmy z Lematu 4. Z drugiej strony

$$(f, B(g)) = (B(g), f)^* = (g', f')^* = (f', g'),$$

więc $(B(f), g) = (f, B(g))$, co oznacza hermitowskość operatora B. Ponadto $(B(f), f) = (f', f') \geq 0$, więc B jest dodatnio określony. ■

Z tego Twierdzenia mamy wniosek, że wartości własne operatora B są nieujemne.

Twierdzenie 9. Operator Hermite'a ma wartości własne $2l$ dla $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wielomiany Hermite'a H_l tworzą układ ortogonalny w lineale$L^2(\mathbb{R}; \mathrm{e}^{-x^2})$.

D o w ó d . Równanie na wartości własne operatora Hermite'a można zapisać

$$[B(f)](x) = -\mathrm{e}^{x^2} \frac{d}{dx} \left(\mathrm{e}^{-x^2} \frac{df}{dx} \right) = 2xf' - f'' = \lambda f(x)$$

lub

$$f'' - 2xf' + \lambda f = 0.$$

Porównajmy to z równaniem Hermite'a (6.99):

$$f'' - 2xf' + 2lf = 0 \quad \text{dla} \quad l \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Wiemy, że dla każdego l ma ono rozwiązanie, które jest wielomianem Hermite'a H_l. W takim razie wartości własne wynoszą $\lambda = 2l$. Na mocy Twierdzeń 8 i 1 wielomiany Hermite'a odpowiadające różnym l są ortogonalne. ■

Twierdzenie 10. Wielomiany Hermite'a tworzą bazę ortogonalną w lineale Hilberta $L^2(\mathbb{R}; \mathrm{e}^{-x^2})$.

D o w o d u nie będzie.

9.6 Fale stojące w dwóch wymiarach przestrzennych

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Wprowadzamy lineał Hilbeta $L^2(\Omega)$ jako zbiór (klas równoważności) funkcyj $f : \Omega \to \mathbb{C}$ o własności

$$\int_{\Omega} |f(\mathbf{r})|^2 ds < \infty$$

z pasującym do tego wzoru skaloczynem

$$(f,g)=\int_{\Omega} f(\mathbf{r})^* g(\mathbf{r})\,ds.$$

Niech brzeg $\partial\Omega$ obszaru Ω będzie *kawałkami gładką* (tzn. klasy C^1 poza skończoną liczbą punktów) krzywą zamkniętą. Mówimy, że funkcja f spełnia na Ω

1. *warunki brzegowe Dirichleta*, jeśli $f(\mathbf{r})=0$ dla $\mathbf{r}\in\partial\Omega$;
2. *warunki brzegowe Neumanna*, jeśli $(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})f(\mathbf{r})=0$ dla $\mathbf{r}\in\partial\Omega$, gdzie $\mathbf{n}$ jest wektorem prostopadłym do $\partial\Omega$;
3. *warunki brzegowe mieszane*, jeśli na pewnej części brzegu spełnia warunki Dirichleta, a na innej warunki Neumanna.

Określamy *operator Laplace'a* Δ w $L^2(\Omega)$ jako operator zadany przez wyrażenie różniczkowe

$$\delta(f)=-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

a jego dziedzina D_Δ zawiera funkcje z $L^(\Omega)$ zgodne z δ i spełniające warunki brzegowe 1, 2 lub 3.

Lemat 1. Jeśli $f,g\in D_\Delta$ z warunkami brzegowymi Dirichleta, to

$$(\Delta f,g)=(f'_x,g'_x)+(f'_y,g'_y).$$

D o w ó d . Z udowodnionej na ćwiczeniach tożsamości

$$\mathrm{rot}(g\mathbf{F})=(\mathrm{grad}\,g)\times\mathbf{F}+g\,\mathrm{rot}\mathbf{F}$$

mamy

$$g\,\mathrm{rot}\mathbf{F}=\mathrm{rot}(g\mathbf{F})-(\mathrm{grad}\,g)\times\mathbf{F}.$$

Scałkujmy obie strony po obszarze Ω na płaszczyźnie X,Y:

$$\int_{\Omega} g\,\mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int_{\Omega}[\mathrm{rot}(g\mathbf{F})]\cdot d\mathbf{s}-\int_{\Omega}[(\mathrm{grad}\,g)\times\mathbf{F}]\cdot d\mathbf{s}.$$

Jedną z całek przekształcamy według twierdzenia Stokesa

$$\int_{\Omega}(g\,\mathrm{rot}\mathbf{F})\cdot d\mathbf{s}=\int_{\partial\Omega} g\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}-\int_{\Omega}[(\mathrm{grad}\,g)\times\mathbf{F}]\cdot d\mathbf{s}.$$

Skoro obszar całkowania Ω leży w płaszczyźnie X,Y, to $d\mathbf{s}=\mathbf{e}_3dx\,dy$ i otrzymujemy

$$\int\int_{\Omega} g(\mathrm{rot}\mathbf{F})_3dx\,dy=\int_{\partial\Omega} g\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}-\int\int_{\Omega}[(\mathrm{grad}\,g)\times\mathbf{F}]_3\,dx\,dy,$$

$$\int\int_{\Omega} g\,(\partial_x F_2-\partial_y F_1)\,dx\,dy=\int_{\partial\Omega} g\mathbf{F}\cdot r\mathbf{r}-\int\int_{\Omega}[(\partial_x g)F_2-(\partial_y g)F_1]dx\,dy. \tag{9.63}$$

Wybierzmy $\mathbf{F}=(\partial f^*/\partial y)\mathbf{e}_1-(\partial f^*/\partial x)\mathbf{e}_2$, wówczas

$$\partial_x F_2-\partial_y F_1=-\frac{\partial^2 f^*}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f^*}{\partial y^2},$$

a wzór (9.63) przyjmuje postać

$$\int\!\!\int_{\Omega} g\left(-\frac{\partial^2 f^*}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f^*}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\int_{\partial\Omega} g\left(\frac{\partial f^*}{\partial y}dx-\frac{\partial f^*}{\partial x}dy\right)+\int\!\!\int_{\Omega}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f^*}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f^*}{\partial y}\right)dx\,dy. \tag{9.64}$$

Jeśli $g\in D_\Delta$, to $g=0$ na $\partial\Omega$, pierwsza całka po prawej stronie znika i zostaje nam

$$(\Delta f, g)=(f'_x, g'_x)+(f'_y, g'_y).\ \blacksquare$$

Lemat 2. Jeśli $f, g\in D_\Delta$ z warunkami brzegowymi Neumanna, to

$$(\Delta f, g)=(f'_x, g'_x)+(f'_y, g'_y). \tag{9.65}$$

D o w ó d . Niech brzeg $\partial\Omega$ będzie opisany krzywą o parametryzacji $x(\tau)$, $y(\tau)$. Wektor $\mathbf{n}(\tau)=(-y'(\tau), x'(\tau))$ jest prostopadły do tej krzywej. Skoro

$$(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})f=-\frac{dy}{d\tau}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{dx}{d\tau}\frac{\partial f}{\partial y},$$

to dla funkcji f spełniającej warunek brzegowy Neumanna możemy napisać

$$\frac{\partial f}{\partial y}dx-\frac{\partial f}{\partial x}dy=0\quad\text{na}\quad\partial\Omega.$$

To oznacza znikanie pierwszej całki po prawej stronie wzoru (9.64), więc zostaje nam równość, jaką należało udowodnić. $\blacksquare$

Twierdzenie 1. Operator Laplace'a Δ w $L^2(\Omega)$ jest hermitowski i dodatnio określony przy warunkach brzegowych Dirichleta, Neumanna i mieszanych.

D o w ó d . Przy wszystkich wymienionych warunkach brzegowych spełniona jest równość (9.65), z której wynika

$$(f,\Delta(g))=(\Delta(g), f)^*=(g'_x, f'_x)^*+(g'_y, f'_y)^*=(f'_x, g'_x)+(f'_y, g'_y),$$

a stąd

$$(\Delta(f), g)=(f,\Delta(g)),$$

czyli hermitowskość operatora Δ. Z wzoru (9.65) otrzymujemy

$$(\Delta(f), f)=(f'_x, f'_x)+(f'_y, f'_y).$$

Skoro po prawej stronie są kwadraty skalarne, czyli wyrażenia nieujemne, to operator Δ jest dodatnio określony. $\blacksquare$

Własności operatora Laplace'a są zebrane w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 2. a) Operator Laplace'a Δ w $L^2(\Omega)$ ma nieskończony ciąg wartości własnych:

$$(\lambda_0=0)<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\lambda_{n+1}<\ldots$$

takich, że $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$. Każda wartość własna ma skończoną krotność.

b) Ortogonalne funkcje własne operatora Δ tworzą bazę lineału $L^2(\Omega)$.

D o w ó d można znaleźć w cytowanej książce Hollanda.

Niech teraz $\Omega=\langle 0, a\rangle\times\langle 0, b\rangle$. Szukamy wartości własnych operatora Δ określonego w $L^2(\Omega)$ z warunkami brzegowymi Dirichleta. Rozdzielamy zmienne:

$$f(x, y)=g(x)\,h(y).$$

Skoro

$$\int_\Omega |f(x,y)|^2 ds = \int_0^a |g(x)|^2 dx \int_0^b |h(y)|^2 dy,$$

to $f \in L^2(\Omega)$ w.t.w. gdy $g \in L^2(0,a)$, $h \in L^2(0,b)$. Podstawiamy iloczyn gh do równania na wartości własne:

$$-(gh)''_{xx} - (gh)''_{yy} = \lambda gh,$$
$$-g''h - gh'' = \lambda gh,$$
$$-\frac{g''}{g} - \frac{h''}{h} = \lambda,$$
$$-\frac{g''}{g} = \frac{h''}{h} + \lambda.$$

Lewa strona nie zależy od y, prawa nie zależy od x, więc obie nie zależą ani od x, ani od y – są więc równe pewnej stałej ϵ:

$$-\frac{g''}{g} = \frac{h''}{h} + \lambda = \epsilon,$$

czyli

$$-g'' = \epsilon g, \quad -h'' = (\lambda - \epsilon)h.$$

Warunki Dichichleta na brzegu $\partial\Omega$ prostokąta Ω są równoważne warunkom

$$g(0) = g(a) = 0 \quad \text{oraz} \quad h(0) = h(b) = 0,$$

czyli warunkom Dirichleta dla obu funkcyj jednej zmiennej. Mamy więc dwukrotnie przypadek jednowymiarowego operatora Laplace'a z warunkami Dirichleta. Wykorzystujemy więc wyniki poprzedniego paragrafu. Funkcja własna g należy do pewnej wartości własnej

$$\epsilon_m = \frac{m^2\pi^2}{a^2}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Funkcja własna h może należeć do innej wartości własnej:

$$\lambda - \epsilon_m = \lambda - \frac{m^2\pi^2}{a^2} = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

W takim razie funkcja własna $f(x,y) = g(x)h(y)$ należy do wartości własnej

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2, \qquad m,n \in \mathbb{N},$$

a ma postać

$$f_{mn}(x,y) = C_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Sprawdźmy ortogonalność różnych funkcyj własnych:

$$(f_{mn}, f_{pq}) = C^*_{mn} C_{pq} \int_0^a \int_0^b \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{p\pi x}{a} \sin\frac{q\pi y}{b}\, dx\, dy$$

$$= C^*_{mn} C_{pq} \int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{p\pi x}{a}\, dx \int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{q\pi y}{b}\, dy.$$

Wykorzystujemy znikanie całek pojedynczych dla dla różnych liczb m, p i różnych n, q oraz wzór ze strony 268 dla par jednakowych liczb, co daje

$$(f_{mn}, f_{pq}) = C^*_{mn} C_{pq} \frac{a}{2}\delta_{mp} \frac{b}{2}\delta_{nq}.$$

Wynik jest niezerowy tylko dla $m = p$ i $n = q$, więc możemy napisać

$$(f_{mn}, f_{pq}) = |C_{mn}|^2 \frac{ab}{4}\delta_{mp}\delta_{nq}.$$

Jeśli chcemy unormowania, to wystarczy przyjąć $C_{mn} = 2/\sqrt{ab}$, co oznacza

$$f_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}.$$

W ten sposób otrzymujemy taką ortonormalność

$$(f_{mn}, f_{pq}) = \delta_{mp}\delta_{nq}.$$

Weźmy szczególny przypadek prostokąta, czyli kwadrat $b = a$. Wtedy każdej parze (m, n) liczb naturalnych odpowiada funkcja własna

$$f_{mn}(x, y) = \frac{2}{a} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a}.$$

Interesuje nas krotność wartości własnych

$$\lambda_{mn} = \frac{m^2 + n^2}{a^2}\pi^2.$$

Ten wzór pozwala nam sformułować następujące spostrzeżenie. Wartość własna $\lambda = r\pi^2/a^2$ ma krotność równą ilości sposobów przedstawienia liczby r jako sumy

$$r = m^2 + n^2 \quad \text{dla } m, n \in \mathbb{N}.$$

Na przykład wartość własna $\lambda = 8\pi^2/a^2$ ma krotność jeden, bo można napisać tylko $8 = 2^2 + 2^2$, wartość własna $\lambda = 5\pi^2/a^2$ ma krotność dwa, bo można napisać $5 = 2^2 + 1^2 = 1^2 + 2^2$, wartość własna $50\pi^2/a^2$ ma krotność trzy, bo można napisać $50 = 7^2 + 1^2 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$, a wartość własna $65\pi^2/a^2$ ma krotność cztery, bo $65 = 7^2 + 4^2 = 4^2 + 7^2 = 8^2 + 1^2 = 1^2 + 8^2$. Oto kilka początkowych wartości własnych:

m	n	$a^2\lambda_{mn}$	m	n	$a^2\lambda_{mn}$
1	1	$2\pi^2$	3	1	$10\pi^2$
1	2	$5\pi^2$	2	3	$13\pi^2$
2	1	$5\pi^2$	3	2	$13\pi^2$
2	2	$8\pi^2$	1	4	$17\pi^2$
1	3	$10\pi^2$	4	1	$17\pi^2$

Najniższa wartość własna wynosi $2\pi^2/a^2$, wśród wyższych występują wielokrotności jej połowy i to wcale nie wszystkie wielokrotności.

Rozważmy równanie falowe w dwóch wymiarach przestrzennych:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{9.66}$$

Rozdzielamy zmienne

$$u(\mathbf{r},t)=T(t)f(\mathbf{r}), \tag{9.67}$$

co oznacza falę stojącą. Po wstawieniu tego do (9.66) dostajemy

$$T(t)\Delta f(\mathbf{r})=-\frac{1}{v^2}T''(t)f(\mathbf{r}),$$

$$\frac{\Delta f(\mathbf{r})}{f(\mathbf{r})}=-\frac{1}{v^2}\frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Lewa strona nie zależy od t, prawa od $\mathbf{r}$, więc obie strony muszą być równe pewnej stałej $\lambda\in\mathbb{R}$. Stąd dostajemy dwa równania:

$$\Delta f(\mathbf{r})=\lambda f(\mathbf{r}), \qquad -T''(t)=\lambda v^2 T(t).$$

Warunek brzegowy Dirichleta na kwadracie $\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$ nakładamy tylko na pierwsze równanie i wtedy wykorzystujemy znalezione wcześniej rozwiązania $\lambda=\lambda_{mn}$, $f(\mathbf{r})=f_{mn}(x,y)$. Ta sama stała musi wystąpić w drugim równaniu:

$$-T''=\lambda_{mn}v^2T,$$

którego rozwiązanie jest nam znane:

$$T(t)=A\cos\sqrt{\lambda_{mn}}vt+B\sin\sqrt{\lambda_{mn}}vt.$$

W ten sposób dostajemy rozwiązanie ogólne równania (9.66):

$$u(\mathbf{r},t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(A_{mn}\cos\sqrt{\lambda_{mn}}vt+B_{mn}\sin\sqrt{\lambda_{mn}}vt\right)\sin m\pi x\sin n\pi y.$$

Jeśli warunek początkowy przykładowo ma postać

$$u(\mathbf{r},0)=2\sin\pi x\,\sin 2\pi y+\sin 2\pi x\sin\pi y, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{r},t)\right|_{t=0}=0,$$

to występuje dwa razy wartość własna $\lambda_{12}=\lambda_{21}=5\pi^2$, a rozwiązaniem jest funkcja

$$u(\mathbf{r},t)=2\cos\sqrt{5}\pi vt\sin\pi x\sin 2\pi y+\cos\sqrt{5}\pi vt\sin 2\pi x\sin\pi y.$$

Skoro wartość własna w obu składnikach jest taka sama, to funkcję cosinus można wyciągnąć przed nawias:

$$u(\mathbf{r},t)=\cos\sqrt{5}\pi vt\,(2\sin\pi x\sin 2\pi y+\sin 2\pi x\sin\pi y)$$

i nadal rozwiązanie jest falą stojącą. Wszytkie punkty spełniające równanie

$$2\sin\pi x\sin 2\pi y+\sin 2\pi x\sin\pi y=0$$

pozostają nieruchome przez cały czas drgania. Punkty o tej własności tworzą linię zwaną *krzywą węzłów* funkcji własnej operatora Δ. Dla kwadratu krzywe węzłów mogą być bardzo skomplikowane.

9.7 Fale bieżące

Rozważymy teraz jeszcze inne rozwiązania równania falowego, które interpretowane są jako fale bieżące. Na początek wybierzemy równanie falowe w jednym wymiarze przestrzennym:

$$v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{9.68}$$

gdzie u jest funkcją dwóch zmiennych $u(x,t)$. Wprowadzamy dwie nowe zmienne

$$\eta = x + \alpha t, \qquad \xi = x + \beta t,$$

przy czym α i β są dowolnymi stałymi; skonkretyzujemy je później. Liczymy pochodne cząstkowe funkcji złożonej $u(\eta(x,t), \xi(x,t))$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \alpha\frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \beta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

Liczymy odpowiednią różnicę

$$v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(v^2 - \alpha^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\left(v^2 - \alpha\beta\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \left(v^2 - \beta^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Wybierzmy $v^2 = \beta^2$, wtedy ostatni wyraz znika. Mamy dwie możliwości:

$$\text{I.}\ \ \beta = -v, \qquad \text{II.}\ \ \beta = v.$$

W pierwszym przypadku zostaje

$$v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(v^2 - \alpha^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\left(v^2 + \alpha v\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = \left(v^2 - \alpha^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2v(v+\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}.$$

Gdybyśmy teraz wybrali $\alpha = -v$, to oba nawiasy znikłyby i nie byłoby równania do rozwiązania, przy tym zmienne η i ξ stałyby się identyczne: $\eta = x - vt$, $\xi = x - vt$. Jest to sytuacja niepożądana. W takim razie wybieramy $\alpha = v$, wtedy $\alpha^2 = v^2$, pierwszy nawias się zeruje i z równania falowego zostaje

$$v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,v^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0,$$

co oznacza takie równanie różniczkowe w nowych zmiennych

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0. \tag{9.69}$$

Pierwsze całkowanie tego równania daje

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = h(\xi)$$

z dowolną funkcją h. Drugie całkowanie daje

$$u(\xi, \eta) = \int h(\xi)\, d\xi + g(\eta)$$

z nową dowolną funkcją g. Skoro h była funkcją dowolną, to jej funkcja pierwotna $\int h(\xi)\, d\xi$ też jest dowolna, oznaczmy ją $f(\xi)$. W ten sposób otrzymujemy następujące rozwiązanie równania (9.69)

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

z dwiema dowolnymi funkcjami swoich zmiennych, tzn

$$\eta = x + vt, \qquad \xi = x - vt.$$

Wracając do wyjściowych zmiennych x i t możemy zapisać ogólne rozwiązanie równania falowego (9.68) w postaci

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt), \tag{9.70}$$

gdzie f i g są funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi.

Przyjrzyjmy się pierwszemu składnikowi tej sumy, czyli wyrażeniu $f(x - vt)$. W chwili $t = 0$ fala ma kształt przestrzenny opisany przez funkcję $f(x)$. Wiemy, że funkcja $f(x - a)$ ma wykres przesunięty w prawo o a, więc wyrażenie $f(x - vt)$ ma wykres przesunięty w prawo o vt względem wykresu funkcji $f(x)$. To oznacza, że w miarę upływu czasu zaburzenie opisane przez funkcję f przesuwa się bez zmiany kształtu w prawo z szybkością v. Zatem pierwszy składnik sumy (9.70) oznacza falę bieżącą biegnącą w prawo, a opisane przez nią zaburzenie jest stałe w punktach i czasach spełniających warunek $x - vt = a =$const, czyli $x = vt + a$, co oznacza przesuwanie się ku dodatniej stronie osi X.

Drugi składnik sumy (9.70) oznacza falę bieżącą biegnącą w lewo, bo jest ona stała w punktach i chwilach spełniających warunek $x = -vt + b$ z pewną stałą b. Możemy powiedzieć, że rozwiązanie (9.70) jest superpozycją dwóch fal bieżących biegnących w przeciwne strony.

Druga możliwość $\beta = v$ doprowadza do takiego samego wyniku, jedynie z funkcjami g i f zamienionymi miejscami. Trzeba dodać że są to fale bardzo ogólnej postaci, wcale nie okresowej w zależności od czasu. Dopiero podstawienie $f(\xi) = A \cos k\xi$ dla $g = 0$ daje tzw. *falę harmoniczną* nazwaną tak z powodu harmonicznej zależności od czasu:

$$u(x, t) = A \cos[k(x - vt)] = A \cos(kx - kvt) = A \cos(kx - \omega t), \tag{9.71}$$

gdzie $\omega = kv$. Bezwymiarowy argument okresowej funkcji o okresie 2π zadającej falę bieżącą nazywa się *fazą*. W przypadku rozwiązania (9.71) jest to argument cosinusa, czyli $\varphi = kx - \omega t$. Maksymalny moduł zaburzenia u wynosi $|A|$ i nosi nazwę *amplitudy*. Zaburzenie (9.71) powtarza się dla przyrostów Δx spełniających warunek $k\Delta x = 2\pi$. Odległość $\Delta x = \lambda = 2\pi/k$ nazywa się *długością fali*, a wielkość $k = 2\pi/\lambda$ – *liczbą falową*.[1]

[1]Istnieje jeszcze wielkość $\kappa = 1/\lambda$, która też nazywa się liczbą falową. Dla odróżnienia wielkość k powinna chyba nazywać się *kołową liczbą falową*. Między k i κ jest taki zam związek $k = 2\pi\kappa$ jak związek $\omega = 2\pi\nu$ między częstością kołową ω a częstotliwością $\nu = 1/T$.

Rozwiązanie (9.71) można więc zapisać w postaci

$$u(x,t) = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt).$$

Czas T potrzebny na to, aby zaburzenie powtórzyło się w ustalonym punkcie spełnia warunek $\omega T = 2\pi$, stąd

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kv} = \frac{\lambda}{v}.$$

Wielkość $\omega = 2\pi/T$ nazywa się *częstością kołową*. Wyrażenie (9.71) można zapisać w jeszcze innej postaci

$$u(x,t) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right).$$

Definicje fazy, długości fali, okresu, liczby falowej i częstości kołowej pozostają słuszne także wtedy, gdy zaburzenie nie jest falą harmoniczną, lecz jej wykres jest profilem okresowym.

9.7.1 Zagadnienie początkowe

Rozważymy teraz równanie falowe

$$v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{9.72}$$

z warunkami początkowymi

$$u(x,0) = h(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = k(x), \tag{9.73}$$

gdzie $h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są zadanymi funkcjami różniczkowalnymi, przy czym h jest klasy C^2 zaś k klasy C^1. Równości (9.73) są zwane *warunkami początkowymi Cauchy'ego*. Jak wiemy z wzoru (9.70), ogólne rozwiązanie równania falowego bez uwzględnienia warunków (9.73) ma postać

$$u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt), \tag{9.74}$$

gdzie f i g są funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi. Podstawiając w tym wzorze $t = 0$ z pierwszego z warunków (9.73) otrzymujemy

$$f(x) + g(x) = h(x). \tag{9.75}$$

Różniczkując (9.74) względem czasu, kładąc $t = 0$ i uwzględniając drugi z warunków (9.73) dostajemy

$$\begin{aligned} -vf'(x) + vg'(x) &= k(x), \\ -f'(x) + g'(x) &= v^{-1}k(x). \end{aligned} \tag{9.76}$$

Całkujemy tę równość poczynając od dowolnego punktu a:

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{v}\int_a^x k(s)ds + g(a) - f(a).$$

Po prawej stronie pojawiły się dwie stałe po to, aby obie strony dały to samo dla $x = a$. To równanie wraz z (9.75) stanowią układ dwóch równań algebraicznych na dwie niewiadome $f(x)$, $g(x)$ – ma on rozwiązanie

$$f(x) = \frac{1}{2}h(x) - \frac{1}{2v}\int\limits_a^x k(s)ds - \frac{1}{2}[g(a) - f(a)] \tag{9.77}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}h(x) + \frac{1}{2v}\int\limits_a^x k(s)ds + \frac{1}{2}[g(a) - f(a)] \tag{9.78}$$

Zastąpiwszy w (9.77) zmienną x przez $x - vt$, a w (9.78) przez $x + vt$ wstawiamy to do (9.74):

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[h(x - vt) + h(x + vt) - \frac{1}{v}\int\limits_a^{x-vt} k(s)ds + \frac{1}{v}\int\limits_a^{x+vt} k(s)ds\right].$$

W trzecim wyrazie po prawej stronie zmieniamy znak przez zamianę granic całkowania:

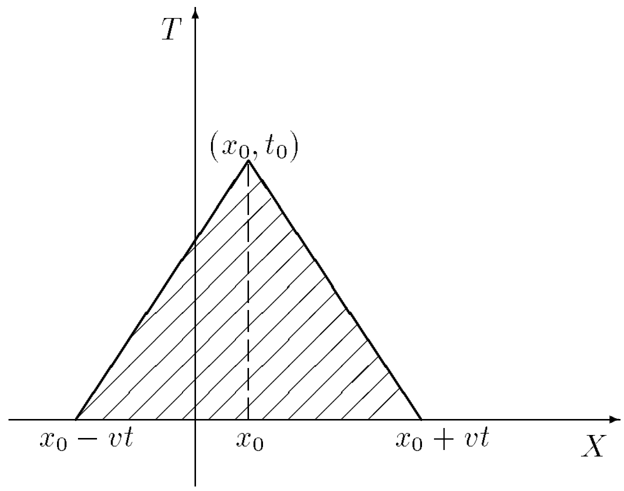
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[h(x - vt) + h(x + vt) + \frac{1}{v}\int\limits_{x-vt}^{a} k(s)ds + \frac{1}{v}\int\limits_a^{x+vt} k(s)ds\right].$$

Dwa ostatnie wyrazy łączymy w jedną całkę:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[h(x - vt) + h(x + vt) + \frac{1}{v}\int\limits_{x-vt}^{x+vt} k(s)ds\right]. \tag{9.79}$$

Ta równość nazywa się *wzorem d'Alemberta* i pokazuje zależność rozwiązania od warunków początkowych (9.73) Widać z niej, że warunki początkowe (9.73) określają jednoznacznie rozwiązanie równania falowego.

Warto jeszcze zbadać bliżej zależność rozwiązania od warunków początkowych. Rozpatrzmy je w pewnym dowolnie wybranym punkcie (x_0, t_0) płaszczyzny $X \times T$ dla $t_0 > 0$. Ze wzoru (9.79) wynika, że rozwiązanie w punkcie (x_0, t_0) określone jest przez wartości funkcji k w przedziale $\langle x_0 - vt_0,\, x_0 + vt_0\rangle$ oraz wartości funkcji h tylko na końcach tego przedziału. W związku z tym zbiór $\langle x_0 - vt_0,\, x_0 + vt_0\rangle$ na prostej początkowej $t = 0$ można nazwać *przedziałem wpływu* na punkt (x_0, t_0). Trójkąt o wierzchołku w punkcie (x_0, t_0) i podstawie jako przedziale wpływu nazywa się *obszarem określoności* punktu (x_0, t_0), patrz Rys. 9.1. Ta nazwa bierze się stąd, że w każdym punkcie tego obszaru rozwiązanie jest w pełni określone przez warunki początkowe z przedziału wpływu.



Rysunek 9.1

Ze wzoru (9.79) wynika również, że dwa zestawy różnych warunków początkowych, które pokrywają się tylko na pewnym przedziale D prostej początkowej określają dwa różne rozwiązania, które są jednak identyczne we wspólnym obszarze określoności związanym z D.

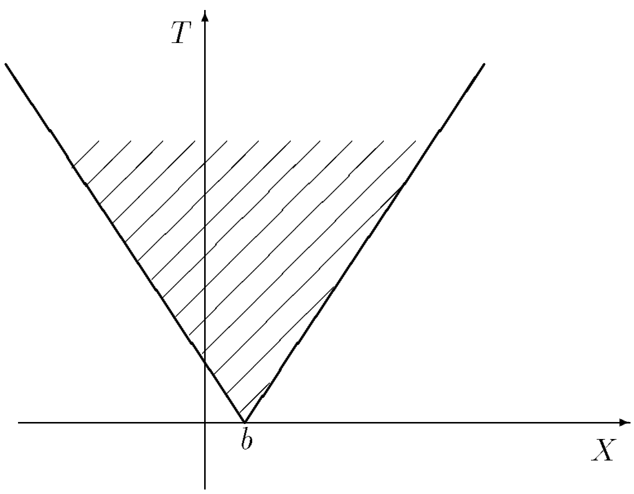
Linia prosta poprowadzona przez punkt $(b, 0)$ prostej początkowej, ograniczająca z jednej ze stron obszar określoności ma równanie postaci

$$x - vt = b \quad \text{lub} \quad x + vt = b,$$

zob. Rys. 9.2. Proste te należą do jednej z dwóch rodzin prostych równoległych $\xi = \text{const}$ lub $\eta = \text{const}$, przy czym

$$\xi = x - vt, \qquad \eta = x + vt,$$

które określa się mianem *krzywych charakterystycznych* równania falowego (9.72). Używa się tu określenia „krzywa", a nie „prosta", ponieważ w sytuacjach bardziej ogólnych – gdy prędkość v nie jest stała – charakterystyki są krzywymi, a nie jak w rozważanym przypadku prostymi równoległymi.



Rysunek 9.2

9.7.2 Fale płaskie

Przechodzimy do równania falowego w trzech wymiarach przestrzennych:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{9.80}$$

Poznamy sposób jego sprowadzenia do rozważanego zagadnienia w jednym wymiarze przestrzennym. Otóż trzeba rozważać funkcję dwóch zmiennych $u(\zeta, t)$, gdzie pierwsza zmienna następująco zależy od współrzędnych przestrzennych:

$$\zeta = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = n_1 x + n_2 y + n_3 z.$$

Występuje tu ustalony wektor jednostkowy $\mathbf{n}$. W takiej sytuacji

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = n_1\frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} = n_2\frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} = n_3\frac{\partial u}{\partial \zeta}.$$

Podobnie liczymy drugie pochodne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = n_1\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = n_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n_2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = n_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = n_3\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = n_3^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}.$$

Wstawiamy to do równania (9.80)

$$n_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + n_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + n_3^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - v^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - v^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - v^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Pomnóżmy to stronami przez v^2

$$v^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Rozpoznajemy w tym równanie (9.68) ze zmienną ζ w miejsce x. W takim razie korzystamy z gotowego rozwiązania (9.70), które teaz zapiszemy

$$u(\zeta, t) = f(\zeta - vt) + g(\zeta + vt).$$

$$u(\zeta, t) = f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - vt) + g(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} + vt). \tag{9.81}$$

To rozwiązanie nazywa się *falą płaską*, a nazwa bierze się stąd, że opisane przez nią zaburzenie jest stałe na płaszczyznach spełniających równanie $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = \text{const}$. Płaszczyzny te są prostopadłe do wektora $\mathbf{n}$. Dla fali bieżącej trzeba wziąć jeden składnik sumy (9.81), na przykład:

$$u(\zeta, t) = f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt). \tag{9.82}$$

Opisane przez nią zaburzenie jest stałe w punktach i czasach spełniających warunek $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt = a =$const, czyli

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = vt + a,$$

co oznacza, że w miarę upływu czasu wspomniane płaszczyzny przesuwają się w kierunku wektora $\mathbf{n}$, dlatego $\mathbf{n}$ wyznacza kierunek rozchodzenia się fali (9.82).

Jak znaleźć prędkość tego rozchodzenia się? Możemy położenie $\mathbf{r}$ uczynić funkcją czasu – to oznacza, że wprowadzamy ruch $\mathbf{r}(t)$ fikcyjnej cząstki. Wprowadźmy więc ruch (oczywiście jednostajny) taki, że owa fikcyjna cząstka jest ciągle na powierzchni tej samej wartości a:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t) - vt = a.$$

Zróżniczkujmy tę równość względem czasu:

$$\frac{d\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)}{dt} - v = 0.$$

Stąd dostajemy związek

$$\frac{d\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)}{dt} = v.$$

Skoro $\mathbf{n}$ jest wektorem stałym, to z pochodną możemy wejść do iloczynu skalarnego:

$$\mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = v,$$

czyli wprowadziwszy prędkość $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ fikcyjnej cząstki mamy

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = v.$$

Od początku stała v była dodatnia, więc ten skaloczyn musi być dodatni. Naturalnym jest wybrać wektor $\mathbf{w}$ prostopadły do rozważanych płaszczyzn, czyli zgodnie równoległy do $\mathbf{n}$. Wtedy iloczyn skalarny zamienia się w iloczyn wartości wektorów: $nw = v$. Ale wektor $\mathbf{n}$ jest jednostkowy, więc zostaje

$$w = v$$

i widzimy, że powierzchnie stałej wartości funkcji u przesuwają się z prędkością $\mathbf{w} = v\mathbf{n}$.

W szczególnym przypadku harmonicznej fali bieżącej f powinna być funkcją sinus lub cosinus, np. $f(\xi) = A \cos k\xi$, wówczas rozwiązanie (9.82) przyjmuje postać

$$u(\zeta, t) = A \cos[k(\zeta - vt)] = A \cos(k\zeta - \omega t).$$

Pamiętamy, czym jest ζ, więc otrzymujemy

$$u(\mathbf{r}, t) = A \cos[k(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) - \omega t].$$

Jest to wzór na bieżącą harmoniczną falę płaską rozchodzącą się w kierunku $\mathbf{n}$. Po wprowadzeniu *wektora falowego* $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ można tę funkcję zapisać inaczej:

$$u(\mathbf{r}, t) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t).$$

Można jeszcze wprowadzić *przesunięcie fazowe* ε, wtedy funkcja u przyjmuje postać

$$u(\mathbf{r}, t) = A\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \varepsilon). \tag{9.83}$$

W szczególności dla $\varepsilon = -\pi/2$ otrzymujemy sinus:

$$u(\mathbf{r}, t) = A\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t).$$

Przy rozpatrywaniu fal harmonicznych stosuje się pewien zapis, który czasem bywa przydatny i odgrywa istotną rolę w elektromagnetycznej teorii fal świetlnych. Mianowicie funkcję (9.83) można uważać za część rzeczywistą wyrażenia zespolonego

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \varepsilon)}. \tag{9.84}$$

Po rozłożeniu na czynniki

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}\mathrm{e}^{i\varepsilon}$$

możemy wprowadzić amplitudę zespoloną $Z = A\mathrm{e}^{i\varepsilon}$ i napisać

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Z\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \tag{9.85}$$

Ta funkcja zespolona jako całość też jest rozwiązaniem równania falowego, co można sprawdzić przez policzenie. W związku z tym zarówno jej część rzeczywista, jak i urojona również są rozwiązaniami. Możemy więc całą funkcję (9.85) uważać za falę płaską, ale interpreatację fizyczną przypisać tylko części rzeczywistej. W mechanice kwantowej ważna jest pełna funkcja zespolona ψ, gdyż wyrażnienie $|\psi|^2$ ma interpretację gęstości prawdopodobieństwa.

Za pomocą omawianej funkcji można też opisać fale poruszające się w kierunku przeciwnym biorąc

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = Z\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \omega t)}. \tag{9.86}$$

Zespoloną harmoniczną falę płaską (9.85) można rozłożyć na czynniki:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Z\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\cdot\mathrm{e}^{-i\omega t},$$

przy tym pierwszy czynnik jest wyłącznie funkcją położenia, a drugi – funkcją czasu. Jednak nie jest to fala stojąca, jak to się dzieje przy rozkładzie na czynniki dla fal rzeczywistych.

9.7.3 Fale kuliste

Warto jeszcze rozważyć fale, dla których powierzchniami stałej fazy byłyby sfery lub cylindry. Aby objąć przypadki o różnej liczbie wymiarów, rozważmy równanie falowe w przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1}$ o współrzędnych $x_1,\, x_2,\, \ldots, x_n,\, t$, przy czym stosujemy oznaczenia $\mathbf{r} = (x_1,\, x_2,\, \ldots, x_n)$, $\ r = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2}$. Równanie falowe ma postać

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{9.87}$$

Rozwiązań szukamy w postaci

$$u(\mathbf{r}, t) = g(r, t) = f(r)\,\varphi(r + \beta t), \quad \text{gdzie } \beta = \pm v. \tag{9.88}$$

Przy tym funkcja g zależy od położenia poprzez długość r wektora wodzącego, a obie funkcje f i φ są funkcjami zmiennych skalarnych. Fakt, że obie te funkcje zależą tylko od długości wektora wodzącego, oznacza, że rozwiązanie ma symetrię kulistą, czyli względem dowolnych obrotów wokół początku układu współrzędnych.

Liczymy pochodne względem współrzędnych przestrzennych:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} g_r'(r,t) = \frac{x_i}{r} g_r',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}\right) g_r' + \frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial x_i} g_r' = \frac{r - x_i \frac{x_i}{r}}{r^2} g_r' + \frac{x_i}{r}\frac{x_i}{r} g_{rr}'' = \frac{r^2 - {x_i}^2}{r^3} g_r' + \frac{{x_i}^2}{r^2} g_{rr}''.$$

Skoro $\sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2 = r^2$, to po wysumowaniu otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} = \frac{nr^2 - r^2}{r^3} g_r' + \frac{r^2}{r^2} g_{rr}'' = \frac{n-1}{r} g_r' + g_{rr}''.$$

Liczymy pochodne względem zmiennej czasowej:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta f(r)\,\varphi'(r+\beta t); \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta^2 f(r)\,\varphi''(r+\beta t) = v^2 f\,\varphi''.$$

Wstawiamy te wyliczenia do równania falowego (9.87):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{n-1}{r} g_r' + g_{rr}'' - \frac{1}{v^2} v^2 f\,\varphi''$$

$$= \frac{n-1}{r}(f'\varphi + f\varphi') + f''\varphi + 2f'\varphi' + f\varphi'' - f\varphi'' = 0.$$

Porządkujemy wyrazy według pochodnych funkcji φ:

$$\left(\frac{n-1}{r} f' + f''\right)\varphi + \left(\frac{n-1}{r} f + 2f'\right)\varphi' = 0. \tag{9.89}$$

Zastanówmy się, czy jest możliwe, aby wyrażenia w obu nawiasach były zerami. Wtedy równanie falowe byłoby spełnione dla dowolnej funkcji φ. Przyrównujemy oba nawiasy do zera:

$$\frac{n-1}{r} f' + f'' = 0, \qquad \frac{n-1}{r} f + 2f' = 0$$

i otrzymujemy dwa równania różniczkowe

$$(n-1)f' + rf'' = 0, \qquad (n-1)f + 2rf' = 0. \tag{9.90}$$

Jeśli $f' = 0$, to pierwsze równanie jest spełnione, a drugie wymaga $n = 1$. Natomiast przy $n \neq 1$ pierwsze równanie mnożymy przez 2, drugie różniczkujemy względem r:

$$2(n-1)f' + 2rf'' = 0, \qquad (n-1)f' + 2f' + 2rf'' = 0$$

i odejmujemy stronami;

$$(n-1)f' - 2f' = 0,$$

$$(n-3)f' = 0.$$

To wyrażenie może być zerem tylko dla $n = 3$. Przypadek $n = 1$ daje $f(r) = \text{const}$ i odpowiada znalezionemu wcześniej rozwiązaniu jednowymiarowemu.

Przypadek $n = 3$ według drugiego równania (9.90) prowadzi do równania różniczkowego

$$2f + 2rf' = 0,$$

$$f' = -\frac{f}{r}$$

i daje rozwiązanie

$$f(r) = \frac{C}{r}$$

co według (9.88) stanowi rozwiązanie w postaci

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{\varphi(r + \beta t)}{r},$$

gdzie stałą C włączyliśmy do dowolnej funkcji φ. Skoro przyjęliśmy $\beta = \pm v$, to mamy dwa typy rozwiązań:

$$u_{out}(\mathbf{r}, t) = \frac{\varphi(r - vt)}{r}, \qquad u_{in}(\mathbf{r}, t) = \frac{\psi(r + vt)}{r}. \tag{9.91}$$

Pierwsze rozwiązanie u_{out} ma tę własność, że powierzchnie stałej fazy zadane równaniem $r - vt = \text{const}$ to sfery, które zwiększają swoje promienie r, więc u_{out} nazwiemy *falą kulistą wychodzącą* (ang. *outgoing spherical wave*). Można też powiedzieć, że ta fala rozchodzi się od początku układu wzdłuż wektora wodzącego. Natomiast dla drugiego rozwiązania sfery zmniejszają swoje promienie, więc u_{in} trzeba nazwać *falą kulistą wchodzącą* (ang. *incoming spherical wave*) Oba rozwiązania (9.91) są falami bieżącymi. Nie są one określone w zerze, co jest zrozumiałe fizycznie – w początku układu jest źródło całej fali, a źródło dokładnie punktowe jest idealizacją niemożliwą do wykonania.

Skoro równanie falowe jest jednorodne, to suma rozwiązań też jest rozwiązaniem, więc możemy napisać ogólniejsze rozwiązanie

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{\varphi(r - vt)}{r} + \frac{\psi(r + vt)}{r}, \tag{9.92}$$

dla którego przy ustalonym czasie poziomicami są sfery $r = \text{const}$. To rozwiązanie również można nazwać falą kulistą, ale już nie bieżącą.

Z przedstawionych rozważań można wyciągnąć ciekawy wniosek: fale bieżące z dowolną funkcją zawierającą fazę $r \pm vt$, rozchodzące się wzdłuż wektora wodzącego dla $n \neq 1$ są możliwe tylko w trzech wymiarach przestrzennych. To oznacza np., że nie ma bieżących fal walcowych z dowolną funkcją zawierającą fazę. Istnieją natomiast rozwiązania z konkretnymi funkcjami φ, które można nazwać falami walcowymi, zob. książkę: C.A. Coulson, A. Jeffrey *Fale. Modele matematyczne*, WNT, Warszawa 1982.

W szczególnym przypadku $\varphi(\xi) = A\cos k\xi$ wychodząca fala kulista staje się harmoniczna:

$$u_{out}(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{r}\cos(kr - kvt) = \frac{A}{r}\cos(kr - \omega t).$$

Jest to funkcja okresowa tylko w swojej zależności od czasu. Jako funkcja odległości r nie jest ona okresowa, gdyż zmienna r stoi nie tylko w argumencie cosinusa. Przyjęło się mówić, że ta funkcja ma zmienną amplitudę daną wzorem A/r.