Ćwiczenia z rachunku różniczkowego i całkowego
dla I roku fizyki i astronomii

Lista 1 2 X 2002

1. Niech $p \neq 1$ będzie liczbą pierwszą. Pokazać, że $\sqrt{p}$ jest liczbą niewymierną.

2. Niech $a \neq 0$ będzie liczbą wymierną, zaś b liczbą niewymierną. Pokazać, że: a) liczba $a+b$ jest niewymierna; b) liczba ab jest niewymierna.

3. Pokazać, że $\sqrt{8}$ jest liczbą niewymierną.

4. Uzasadnić zdanie: jeśli rozwinięcie dziesiętne jakiejś liczby się kończy, to przedstawia ono liczbę wymierną.

5. Przypomnijmy dwie własności relacji nierówności:
f) jeśli $a < b$ i $c > 0$, to $ac < bc$, tzn. nierówność zachowuje zwrot, jeśli ją pomnożyć stronami przez liczbę dodatnią;
g) jeśli $a < b$ i $c < 0$, to $ac > bc$ – nierówność zmienia zwrot na przeciwny, jeśli ją pomnożyć stronami przez liczbę ujemną.
Wyprowadzić z tych własności , że jeśli dwie liczby $a, b \in \mathbb{R}$ mają ten sam znak, to $ab > 0$, a jeśli mają różne znaki, to $ab < 0$.

6. Korzystając z poprzedniego zadania wykazać, że dla dwóch liczb $a, b \in \mathbb{R}$ iloczyn ab może być zerem tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z czynników jest zerem.

7. Korzystając z poprzednich zadań wykazać, że dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $a^2 \geq 0$.

8. Nie wykorzystując kalkulatora zapisać każdą z podanych liczb bez stosowania znaku modułu (wartości bezwzględnej):

$$\left|1 - \frac{5}{12} - \frac{3}{7} - \frac{1}{6}\right|, \quad \left|1 + \frac{5}{12} - \sqrt{2}\right|, \quad \left|\frac{5}{12} + \frac{3}{7} + \frac{1}{6} - 1\right|, \quad \left|(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\right|,$$

$$\left|\sqrt{3} - 2\right|, \quad \left|3 - 2\sqrt{2}\right|, \quad \left|3 - \sqrt{2} - \sqrt{3}\right|, \quad |5 - \sqrt{5} - \sqrt{8}|, \quad |x^2 + 3|, \quad |x^2 + 2x + 2|.$$

Bernard Jancewicz