Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego
dla I roku fizyki i astronomii

Lista 2 9 X 2002

1. Sprawdzając możliwe przypadki pokazać, że moduł iloczynu jest iloczynem modułów, a moduł ilorazu jest ilorazem modułów.

2. Pokazać, że moduł ma własnoćć $|-a| = |a|$.

3. Wykorzystując nierówność trójkąta udowodnić nierówność $|a-b| \geq |\,|a|-|b|\,|$. dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Wyrazić każdy z podanych zbiorów jako przedział albo sumę mnogościową przedziałów:

$$\{x:\ |x+3| < 1\}, \quad \{x:\ |4x+1| \leq 2\},$$
$$\{x:\ |2x+1| < 4 \wedge |x+3| \geq 1\} \quad \{x:\ |1-x^2| \geq 2\}.$$

5. Wyrazić każdy z podanych zbiorów przez przedziały:

$$\{x:\ x^2-2x<0\}, \quad \{x:\ x^2+2x \leq 8\}, \quad \{x:\ 0 < x^2+4x \leq 12\}$$

6. Niech $A \subset \mathbb{R}$. Wykazać, że jeśli zbiór A jest ograniczony z góry i z dołu, to jest ograniczony.

7. Czy każdy przedział jest zbiorem ograniczonym? Czy kresy (górny i dolny) przedziału (a,b) są takie same, jak przedziałów $\langle a,b)$, $(a,b\rangle$ i $\langle a,b\rangle$?

8. Określić dziedziny podanych funkcyj:

$$f_1(x) = \frac{3x^4-6x^2+3}{x^4-16}, \quad f_2(x) = \sqrt{7x-3}+\sqrt{4-3x},$$
$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x(x-4)}, \qquad f_4(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x^2+4x+1}},$$
$$f_5(x) = \log_a\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \qquad f_6(x) = \log_a \sin x, \qquad f_7(x) = \log_a \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}.$$

9. Określić dziedziny i obrazy podanych funkcyj:

$$g_1(x) = x^3+1, \qquad g_2(x) = (x-2)^2+3, \qquad g_3(x) = 3-7\sqrt{2-x},$$
$$g_4(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}, \quad g_5(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}-x}, \quad g_6(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

*10. Określamy *sumę algebraiczną* dwóch podzbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$:

$$A+B = \{x+y:\ x \in A,\ y \in B\}.$$

Znaleźć $A+B$, jeśli
a) $A = \langle 0,1\rangle$, $B = \langle 1,2\rangle$, b) $A = \langle -1,0\rangle$, $B = \langle 0,1\rangle$, c) $A = \langle 0,1\rangle$, $B = (0,1)$,
d) $A = (-1,1)$, $B = (10,12)$, e) $A = (-12,-10)$, $B = (-1,1)$,
f) $A = (-12,-10)$, $B = (10,12)$.

Bernard Jancewicz