# Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego
dla II roku fizyki bis

**Lista 10** 13 IV 2005

1. Wśród następujących ciągów wskazać ciągi ograniczone. Stwierdzić z uzasadnieniami, które są zbieżne, a dla zbieżnych znaleźć granice.

$$\frac{n^2-1}{4n(n-1)}, \quad \frac{\cos(n\pi)}{n}, \quad \frac{n^2+n-2}{2n^2-3n}\cos(n\pi),$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n, \quad (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \quad \left(\cos\frac{2\pi n}{3}\right)^n.$$

2. Wykazać, że ciągi określone w zadaniach 1 i 2 z listy 8 są zbieżne. Znaleźć ich granice.

3. Udowodnić, że ciąg $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$ jest zbieżny. Wskazówka: Oszacować ten ciąg z góry przez ciąg zbieżny do zera oraz skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

4. Udowodnić, ze dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p^n}{n!} = 0$.

5. Wykazać, że ciąg $a_n = \frac{n^2+2n-2}{n+1}$ jest rosnący. Czy jest on rozbieżny do plus nieskończoności?

6. Znaleźć granicę ciągu $\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}$. Wskazówka: Wykorzystać tożsamość

$$1-\frac{1}{n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}.$$

7. Jeśli wiadomo, że ciąg $\{\frac{1}{n}\}$ jest zbieżny, to jak wykazać, że ciąg $\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^k\right\}$ dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$ jest zbieżny?

*Bernard Jancewicz*