Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego
dla II roku fizyki bis

Lista 16 7 VI 2005

1. Mamy funkcję $f : \langle -\pi, \pi \rangle \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x) = \sin^2 x$. Znaleźć współczynniki jej rozwinięcia w szereg Fouriera.

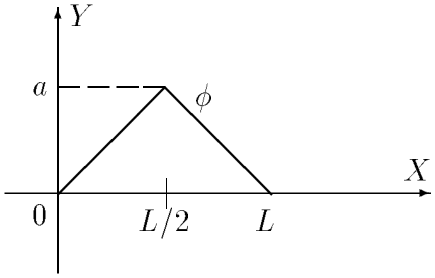
2. Niech g będzie transformatą Fouriera funkcji f. Wykazać, że transformatą Fouriera funkcji $f_a(x) = f(x - a)$ jest funkcja $g_a(k) = \mathrm{e}^{-iak} g(k)$, a funkcji $f'(x)$ funkcja $ikg(k)$.

3. Znaleźć transformatę Fouriera przesuniętej delty Diraca.

4. Znaleźć rozwiązanie $u(x,t)$ równania falowego dla struny umocowanej punktach 0, L z następującymi warunkami początkowymi:

$$u(x,0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

z funkcją ϕ przedstawioną na wykresie. Wskazówka: porównać funkcję ϕ z Przykładem 3 z § 7.6 o szeregach Fouriera i znaleźć współczynniki A_n, B_n potrzebne we wzorze (8.11).



5. Niech $f, g \in C[0,1]$. Pokazać, że wyrażenie

$$(f,g) = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x)\, dx$$

ma wszystkie własności iloczynu skalarnego.

6. Mamy funkcję dwóch zmiennych $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daną wzorem $u(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$. Jaki powinien być związek między stałymi k i ω, aby ta funkcja spełniała równanie falowe w jednym wymiarze przestrzennym? Wskazać poziomice tej funkcji. Co te poziomice mają wspólnego w przesuwaniem się punktów stałej fazy fali u?

7. Pokazać, że suma trzech identycznych, lecz parami przesuniętych względem siebie w fazie o kąt $2\pi/3$ fal harmonicznych jest równa zeru.

Bernard Jancewicz