Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego
dla II roku fizyki bis

Lista 4 2 III 2005

1. Niech $D = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \langle e, h\rangle$. Mamy funkcję $f : D \to \mathbb{R}$ o zmiennych rozdzielonych, tzn. $f(x, y, z) = \phi_1(x)\phi_2(y)\phi_3(z)$. Wykazać, że całka po prostopadłościanie D rozkłada się na iloczyn trzech całek:

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^h f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \phi_1(x) dx \int_c^d \phi_2(y) dy \int_e^h \phi_3(z) dz.$$

2. Niech krzywa K będzie zadana przez parametryzację $\boldsymbol{\sigma} : \langle -\pi/\omega, 3\pi/\omega\rangle \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\sigma}(t) = (a \sin \omega t, -a \cos \omega t, vt)$. Omówić kształt tej krzywej i znaleźć jej długość. Wyliczyć całki krzywolinowe $\int\limits_K f\, dl$ następujących funkcyj skalarnych:

a) $f(x, y, z) = x + y + z$; b) $f(x, y, z) = \cos az$.

3. Niech $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadane wzorem $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$. Wyliczyć całkę tego pola wektorowego po następujących krzywych

a) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t,\, t,\, t)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$; b) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t^2,\, 3t,\, 2t^3)$, $t \in \langle -1, 2\rangle$.

4. Wyliczyć następujące całki krzywoliniowe:

a) $\int\limits_K (x\, dy - y\, dx)$, $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$;

b) $\int\limits_K (yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz)$, gdzie K składa się z dwóch prostoliniowych odcinków łączących punkty $(-1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ oraz $(0, 0, 1)$.

Bernard Jancewicz