Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego
dla I roku fizyki bis

Lista 3 19 III 2004

1. Określić dziedziny podanych funkcyj:

$$f_1(x) = \frac{3x^4 - 6x^2 + 3}{x^4 - 16}, \quad f_2(x) = \sqrt{7x-3} + \sqrt{4-3x},$$

$$f_3(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x^2 + 4x + 1}}, \quad f_4(x) = \log_a\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

$$f_5(x) = \log_a \sin x, \qquad f_6(x) = \log_a \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

2. Określić dziedziny i obrazy podanych funkcyj:

$$g_1(x) = x^3 + 1, \quad g_2(x) = (x-2)^2 + 3, \quad g_3(x) = 3 - 7\sqrt{2-x},$$

$$g_4(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}, \quad g_5(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x} - x}, \quad g_6(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

3. Znaleźć $\sup D_f$ oraz $\inf D_f$ dla dziedzin funkcyj f z zadania 1.

4. Znaleźć $\sup R_g$ oraz $\inf R_g$ dla obrazów funkcyj g z zadania 2.

5. W 2 wskazać funkcje nakładające (suriektywne) jako odwzorowania D_g w $\mathbb{R}$.

6. W 2 wskazać funkcje wzajemnie jednoznaczne (iniektywne).

7. Niech będzie dana funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pokazać, że jeśli jest ona ściśle monotoniczna, to jest różnowartościowa.

8. Zakładając, że funkcje $f, g : D \to \mathbb{R}$ są monotoniczne, zbadać monotoniczność funkcyj $f + g$ oraz $f \cdot g$.

9. Niech funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posiada funkcję odwrotną f^{-1}. Udowodnić, że jeśli f jest rosnąca to f^{-1} jest rosnąca, a jeśli f jest malejąca, to f^{-1} jest malejąca.

10. Dla jakich podstaw $a > 0$ funkcja wykładnicza $x \mapsto a^x$ jest rosnąca, a dla jakich malejąca?

11. Dla jakich podstaw $a > 0$ funkcja logarytmiczna $x \mapsto \log_a x$ o dziedzinie $(0, \infty)$ jest rosnąca, a dla jakich malejąca?

12. Podać przykład pary funkcyj, których złożenie jest przemienne, oraz przykład pary funkcyj, których złożenie nie jest przemienne.

13. Czy wśród funkcyj linowych można znaleźć takie, które są odwrotne same do siebie? Ile ich jest?

13. Naszkicować wykresy dwóch możliwych złożeń funkcji entier (część całkowita) z funkcją $f(x) = x^2$.

14. Jakie wielomiany są funkcjami symetrycznymi (parzystymi), a jakie antysymetrycznymi (nieparzystymi)? Znaleźć część symetryczną i antysymetryczną dowolnego wielomianu.

15. Jakie pod względem symetrii jest złożenie funkcji antysymetrycznej f z funkcją symetryczną g? (Funkcja g jest zewnętrzna.)

16. Czy funkcja symetryczna może być różnowartościowa?

Bernard Jancewicz