Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego

dla I roku fizyki bis

Lista 5 30 III 2004

1. Pokazać z definicji, że

$$\lim_{x\to a} 2x = 2a, \quad \lim_{x\to a} x^2 = a^2, \quad \lim_{x\to a} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a.$$

2. Wykazać, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

3. Sporządzić wykres funkcji *entier*. Wyliczyć granice jednostronne tej funkcji w dowolnym punkcie całkowitym. W jakich punktach ta funkcja jest ciągła? W jakich punktach jest ciągła prawostronnie?

4. Niech $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f : D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$. Znaleźć z definicji lewostronną (niewłaściwą) granicę tej funkcji w zerze.

5. Znaleźć granice

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}, \quad \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^5+32}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^k-1}{x^2-1}, \ k \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}, \quad \lim_{x\to \pi/4} \frac{\cos x - \cos(\pi/4)}{\sin x - \sin(\pi/4)}, \quad \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(-1)^{[x]}}{x},$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-3)(-1)^{[x]}}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}.$$

6. Niech $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f : D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$. Pokazać, że ta funkcja nie ma jednostronnych granic w zerze ani właściwych, ani niewłaściwych. [Patrz: K. Kuratowski *Rachunek różniczkowy i całkowy*, str. 67.] Naszkicować wykres tej funkcji.

7. Sporządzić wykresy funkcyj

$$\frac{x}{x+1}, \quad x-[x], \quad x\sin\frac{1}{x}, \quad x^2\sin\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$$

i omówić ich granice w punkcie 0.

Bernard Jancewicz