Rozdział 8

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE

Istniejące podręczniki

H. Margenau i G.M. Murphy: *Matematyka w fizyce i chemii*, rozdział 7, PWN, Warszawa 1962;
W.I. Smirnow: *Matematyka wyższa*, tom II, rozdział 7, PWN, Warszawa 1966;
Charles Alfred Coulson, Alan Jeffrey: *Fale. Modele matematyczne*, WNT, Warszawa 1982;
Lawrence C. Evans: *Równania różniczkowe cząstkowe*, PWN, Warszawa 2002;
Samuel S. Holland: *Applied analysis by the Hilbert space method*, Marcel Dekker Inc., New York 1990.

8.1 Wiadomości ogólne

Równaniem różniczkowym cząstkowym nazywamy równanie, w którym występuje funkcja niewiadoma u dwóch lub więcej zmiennych x, $y \ldots$ i jej pochodne cząstkowe, czyli równanie postaci

$$F\left(x, y, \ldots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots\right) = 0.$$

Rzędem równania różniczkowego cząstkowego nazywamy najwyższy rząd pochodnej funkcji niewiadomej występujący w równaniu. Niech u będzie funkcją n zmiennych. *Rozwiązaniem cząstkowego równania różniczkowego m-go rzędu* w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy taką funkcję u klasy C^m z dziedziną Ω, która po podstawieniu wraz ze swymi pochodnymi do danego równania zamienia je w tożsamość w obszarze Ω.

PRZYKŁAD 1. Rozważmy równanie

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Jest ono liniowe jednorodne pierwszego rzędu o stałych współczynnikach. Dla jego rozwiązania wprowadza się zamianę zmiennych $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. Z reguł różniczkowania funkcji złożonej mamy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Wstawiamy to do równania różniczkowego otrzymując

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

a to oznacza, że funkcja u nie zależy od zmiennej η, natomiast zależność od ξ może być dowolna. Rozwiązanie ogólne jest więc postaci

$$u(x, y) = f(\xi) = f(x + y)$$

z dowolną różniczkowalną funkcją f jednej zmiennej. Cechą równań różniczkowych cząstkowych jest to, że rozwiązanie ogólne zawiera dowolną funkcję, a nie dowolną stałą, jak to było dla równań zwyczajnych.

PRZYKŁAD 2. Dane jest równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 - y^2.$$

Jest ono łatwe do scałkowania, bo nie ma innych pochodnych. Najpierw znajdujemy funkcję pierwotną względem x:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^3}{3} - xy^2 + \phi(y)$$

z dowolną funkcją ϕ. Następnie całkujemy względem y:

$$u(x, y) = \frac{x^3}{3}y - x\frac{y^3}{3} + g(y) + f(x) = \frac{xy}{3}(x^2 - y^2) + f(x) + g(y).$$

Dowolna funkcja $\phi(y)$ po scałkowaniu względem y zamieniła się w dowolną funkcję $g(y)$. Poza tym pojawiła się dowolna funkcja $f(x)$. Jeszcze raz zauważamy, że stałe dowolne występujące w rozwiązaniu równania różniczkowego zwyczajnego zamieniają się na funkcje dowolne.

Jeśli w funkcji u od $(n+1)$ zmiennych niezależnych wyróżnimy jedną ze zmiennych jako czas t pisząc $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, to mówimy, że u jest *funkcją punktu* $\mathbf{r}$ *i czasu* t, co zapisuje się też $u(\mathbf{r}, t)$. *Warunkami początkowymi* nazywamy warunki stawiane funkcji u dla wybranej chwili $t = t_0$, np. $u(\mathbf{r}, t)|_{t=t_0} = \phi(\mathbf{r})$. *Warunkami brzegowymi* nazywamy warunki stawiane funkcji u na brzegu $\partial\Omega$ pewnego obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, np. $u(\mathbf{r}, t)|_{\mathbf{r}\in\partial\Omega} = f(\mathbf{r}, t)$. Można jeszcze stawiać warunki określającezachowanie się funkcji u przy jednej ze zmiennych dążącej do $-\infty$ lub$+\infty$. Zespół wymienionych warunków nazywamy *warunkami granicznymi.*

Poszukiwanie funkcji spełniającej dane równanie różniczkowe oraz określone warunki graniczne nazywamy *zagadnieniem granicznym.* W szczególności może to być *zagadnienie brzegowe* lub *zagadnienie początkowe.*

8.1.1 Równania drugiego rzędu

Liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu nazywamy równanie

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_1, x_2, ..., x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{8.1}$$

Funkcja F może zależeć od funkcji u i jej pochodnych nawet w sposób nieliniowy. Rozważane równanie jest więc liniowe wyłącznie względem drugich pochodnych.

Dla przeprowadzenia klasyfikacji takich równań rozważa się formę kwadratową zmiennych pomocniczych ξ_i:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(\mathbf{r})\, \xi_i \xi_k.$$

Jeśli ustalimy wartości zmiennych niezależnych $x_l = x_l^0$, czyli ustalimy punkt $\mathbf{r} = \mathbf{r}^0 \in \mathbb{R}^n$, to powstaje forma kwadratowa o stałych współczynnikach. Tę formę przez liniową zamianę zmiennych można doprowadzić do postaci kanonicznej, w której występują jedynie kwadraty zmiennych ξ_i: $\sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{r}^0)\, {\xi_i}^2$; przy tym liczba współczynników dodatnich i ujemnych dla danej formy nie zależy od sposobu przejścia do postaci kanonicznej. To samo przejście pozwala zapisać równanie (8.1) bez pochodnych mieszanych:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(x_1, x_2, ..., x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} + F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{8.2}$$

Mówimy, że równanie (8.1) jest *typu eliptycznego w punkcie* $\mathbf{r}^0$, jeśli równanie (8.2) ma współczynniki $b_i(\mathbf{r}^0)$ tylko dodatnie albo tylko ujemne i żaden nie jest zerem. Mówimy, że równanie jest *typu eliptycznego w obszarze* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jeśli jest typu eliptycznego w każdym punkcie tego obszaru. Podobnie mówimy, że równanie (8.1) jest *typu hiperbolicznego*, jeśli po sprowadzeniu do postaci kanonicznej wszystkie współczynniki poza jednym są tego samego znaku, a jeden współczynnik ma znak przeciwny. Jeśli forma kwadratowa w postaci kanonicznej ma chociaż jeden współczynnik równy zeru, to równanie (8.1) jest typu *parabolicznego*. Jeśli współczynniki a_{ik} są stałe, to typ równania nie zależy od wyboru punktu $\mathbf{r} \in \Omega$.

PRZYKŁAD 3. Rozważmy równanie

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + F\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = 0. \tag{8.3}$$

Pomocnicza forma kwadratowa ma postać

$$0 \cdot {\xi_1}^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_1 + 0 \cdot {\xi_2}^2. \tag{8.4}$$

Szukamy takiego przekształcenia linowego do nowych zmiennych y_1, y_2:

$$\xi_1 = y_1 + a y_2, \qquad \xi_2 = y_1 + b y_2, \tag{8.5}$$

żeby po podstawieniu do (8.4) wystąpiły tylko kwadraty zmiennych y_i. Liczymy:

$$\xi_1 \xi_2 = (y_1 + a y_2)(y_1 + b y_2) = {y_1}^2 + a b {y_2}^2 + (a + b) y_1 y_2.$$

Żądamy znikania nawiasu zwykłego: $a + b = 0$, stąd $b = -a$, a forma kwadratowa (8.4) przyjmuje postać:

$$2\xi_1\xi_2 = 2\left({y_1}^2 - a^2{y_2}^2\right).$$

Widzimy, że w kombinacji kwadratów jest jeden współczynnik dodatni i jeden ujemny. Według podanej klasyfikacji równanie różniczkowe (8.3) jest typu hiperbolicznego.

Oto równania rzędu drugiego występujące w fizyce. Są one już w postaci kanonicznej, tzn. bez pochodnych mieszanych.
Równanie Poissona

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho(x, y, z)$$

jest typu eliptycznego. [Simeon Denis Poisson (1781–1840) – francuski matematyk i fizyk; zajmował się m.in. elektrostatyką i teorią sprężystości.] Szczególnym przypadkiem tego równania jest *równanie Laplace'a*

$$\Delta u = 0.$$

Jeszcze jednym równaniem typu eliptycznego jest *równanie Helmholtza*:

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

ze stałą $k \in \mathbb{R}$. *Równanie falowe*

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;$$

jest typu hiperbolicznego; tutaj v jest prędkością fazową fali, operator $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ nazywa się *dalambercjanem. Równanie przewodnictwa cieplnego*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0.$$

jest typu parabolicznego. W tym przypadku forma kwadratowa ma postać $-k\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2\right)$ i jest już doprowadzona do postaci kanonicznej. Skoro nie ma drugiej pochodnej względem czasu t, to można powiedzieć, że współczynnik przy ξ_4^2 jest zerem.

Warunki Cauchy'ego dla równania (8.1) polegają na podaniu funkcji u na $(n-1)$-wymiarowym podzbiorze $S \subset \Omega$:

$$\forall \mathbf{r} \in S: \quad u(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r})$$

oraz jej pochodnej kierunkowej w kierunku $\mathbf{m}$ nie stycznym do S:

$$\forall \mathbf{r} \in S: \quad (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nabla})u(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})$$

z zadanymi funkcjami $\phi, \psi : S \to \mathbb{R}$ oraz $\mathbf{m} : S \to \mathbb{R}^n$. Pochodne w kierunkach stycznych do S można wyliczyć z funkcji ϕ. Jeśli warunki początkowe są dane na powierzchni S o równaniu $x_n = a$, czyli na hiperpłaszczyźnie, to mamy taką postać warunków Cauchy'ego:

$$u\big|_{x_n=a} = \phi(x_1, ..., x_{n-1}), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=a} = \psi(x_1, ..., x_{n-1}).$$

8.2 Fale stojące w jednym wymiarze przestrzennym

Rozważmy równanie falowe w jednym wymiarze przestrzennym:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{8.6}$$

Tutaj u można interpretować jako poprzeczne wychylenie struny, która początkowo rozciągała się wzdłuż osi X. Przyjmijmy, że długość spoczywającej struny wynosi L, wtedy $u : \langle 0, L\rangle \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jeśli założymy, że struna jest zamocowana na obu końcach, to mamy warunki brzegowe

$$\forall\, t \in \mathbb{R}: \quad u(0,t) = u(L,t) = 0. \tag{8.7}$$

Zastosujemy *metodę rozdzielenia zmiennych* zakładając, że rozwiązanie szczególne $u(x,t)$ jest iloczynem dwóch funkcyj różnych zmiennych:

$$u(x,t) = f(x)\,g(t). \tag{8.8}$$

Fizycznie oznacza to, że szukamy *fali stojącej*, co oznacza, że wszystkie punkty struny mają taki sam rytm zmian czasowych. Po podstawieniu tego do równania (8.6) otrzymujemy

$$f''(x)\,g(t) = \frac{f(x)\,g''(t)}{v^2},$$

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{v^2}\frac{g''(t)}{g(t)}.$$

Lewa strona nie zależy od t, prawa strona nie zależy od x, więc obie strony nie mogą zależeć ani od x, ani od t. W takim razie równe są pewnej stałej $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f''}{f} = \frac{1}{v^2}\frac{g''}{g} = \lambda. \tag{8.9}$$

W ten sposób dostajemy dwa równania:

$$f''(x) = \lambda\, f(x), \quad g''(t) = v^2\lambda\, g(t).$$

Warunek brzegowy (8.7) działa tylko na funkcję f:

$$f(0) = f(L) = 0. \tag{8.10}$$

Zajmujemy się więc zagadnieniem brzegowym pierwszego równania

$$f'' - \lambda f = 0, \quad f(0) = f(L) = 0.$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Nauczyliśmy się je rozwiązywać w Rozdziale 4, ale tam były inne warunki nakładane na rozwiązanie – zadawaliśmy wartość funkcji i jej pochodnej w tym samym punkcie, a nie wartości funkcji w dwóch różnych punktach. Zobaczmy, czy te nowe warunki da się spełnić. Rozważmy trzy możliwości dla stałej λ.

I. $\lambda > 0$. Ogólne rozwiązanie ma postać

$$f(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Warunki brzegowe dają $C_1 + C_2 = 0$, $C_1 e^{\sqrt{\lambda}L} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0$. Jest to układ dwóch równań na dwie niewiadome C_1, C_2. Rozwiązanie niezerowe istnieje wtedy, gdy wyznacznik macierzy tego równania jest zerem. My tymczasem otrzymujemy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}L} & e^{-\sqrt{\lambda}L} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda}L} - e^{\sqrt{\lambda}L} \neq 0,$$

czyli $e^{2\sqrt{\lambda}L} \neq 1$. Tego warunku nie da się spełnić dla $\lambda > 0$ i $L \neq 0$. W takim razie pozostaje $C_1 = C_2 = 0$, więc nie da się spełnić warunków brzegowych przez znalezione rozwiązanie ogólne.

II. $\lambda = 0$. Rozwiązanie ogólne

$$f(x) = C_1 x + C_2$$

także nie może spełnić warunków brzegowych (8.10).

III. $\lambda < 0$. Dla rozwiązania ogólnego

$$f(x) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}x$$

warunek $f(0) = 0$ daje $C_1 = 0$. Drugi warunek daje

$$f(L) = C_2 \sin\sqrt{-\lambda}L = 0, \quad \text{czyli} \quad \sqrt{-\lambda}L = n\pi, \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Wartość $n = 0$ powinniśmy wykluczyć, bo ona daje rozwiązanie zerowe, zaś n ujemne dają rozwiązania liniowo zależne od tych dla n dodatniego.

Doszliśmy do tego, że nasze zagadnienie Cauchy'ego ma niezerowe rozwiązanie tylko wtedy, gdy w równaniu (8.9) występuje stała

$$\lambda = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Funkcje zależne od położenia trzeba ponumerować tym samym wskaźnikiem n, który numeruje wartości λ:

$$f_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Równanie różniczkowe dla funkcji zależnej od czasu:

$$g''(t) = -v^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2} g(t)$$

ma rozwiązania

$$g_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi vt}{L} + B_n \sin\frac{n\pi vt}{L}.$$

W ten sposób udowodniliśmy

Wniosek 1. Równanie falowe (8.6) z warunkami brzegowymi $u(0,t) = u(L,t) = 0$ ma nieskończoną rodzinę rozwiązań

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi vt}{L} + B_n \sin\frac{n\pi vt}{L}\right) \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Stała C_n w tym wzorze staje się niepotrzebna, bo można ją włączyć do A_n i B_n.

W argumentach funkcyj trygonometrycznych stoi wyrażenie $\omega_n t$, gdzie $\omega_n = n\pi v/L$. Z tego wniosku wynika więc, że struna z umocowanymi końcami może drgać harmonicznie z różnymi częstościami, z których najniższa dla $n = 1$ wynosi $\nu = v/2L$, a pozostałe są jej wielokrotnościami $n\nu$. Drgania odpowiadające większym częstościom nazywają się *wyższymi harmonicznymi.*

Teraz odchodzimy od ograniczenia (8.8), którep255x daje rozwiązania szczególne. Rozwiązanie ogólne jest kombinacją liniowąrozwiązań szczególnych, więc jest dane przez szereg

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi v t}{L} + B_n \sin \frac{n\pi v t}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{8.11}$$

To rozwiązanie nie jest już falą stojącą.

Jeśli chcemy wyznaczyć stałe A_n, B_n, to oprócz warunków brzegowych musimy wziąć pod uwagę warunki początkowe, tzn ustalić $u(x,0)$ oraz $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$. Wybierając $u(x,0) = \phi(x)$ dostajemy warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \phi(x), \tag{8.12}$$

natomiast dla $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$ otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{L} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \psi(x). \tag{8.13}$$

Powołując się na teorię szeregów Fouriera poznaną w § 7.7, możemy znaleźć współczynniki tych rozwinięć. Przypomnijmy, że dla szeregu postaci

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

określonego w przedziale $\langle -L, L \rangle$ współczynniki wylicza się według wzorów

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dy. \tag{8.14}$$

Obecnie rozważamy rozwiązania w przedziale $\langle 0, L \rangle$, więc można funkcje ϕ i ψ określić dla ujemnych wartości przez antysymetrię, tzn.

$$\phi(-x) = -\phi(x), \;\; \psi(-x) = -\psi(x), \tag{8.15}$$

bo taką własność mają szeregi po lewej stronie wzorów(8.12) i (8.13). Robimy to po to, żeby móc skorzystać z wzorów (8.14).

W ten sposób dostajemy

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx,$$

a po wykorzystaniu (8.15)

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{8.16}$$

Podobnie z (8.13) po wykorzystaniu (8.15) dostajemy

$$\frac{n\pi v}{L}B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,$$

czyli

$$B_n = \frac{2}{n\pi v}\int_0^L \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx. \tag{8.17}$$

Twierdzenie 1. Istnieje co najwyżej jedno rozwiązanie zagadnienia granicznego (tzn. brzegowo-początkowego) dla równania falowego (8.6).

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją dwa rozwiązania u_1 i u_2 spełniające te same warunki graniczne. Wtedy ich różnica $u = u_1 - u_2$ jest rozwiązaniem równania falowego z zerowymi warunkami granicznymi. Pokażemy, że $u(x,t) = 0$ tożsamościowo.

Rozważmy funkcję

$$F(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[v^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2\right]dx. \tag{8.18}$$

Wtedy

$$\frac{dF}{dt} = \int_0^L \left(v^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx. \tag{8.19}$$

Pierwszy z tych wyrazów całkujemy przez części:

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\,dx = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx.$$

Zerowe warunki brzegowe oznaczają $u(0,t) = 0$ i $u(L,t) = 0$ dla wszech t, skąd $\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(L,t) = 0$, więc

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\,dx = -\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx.$$

Wstawiamy to do (8.19):

$$\frac{dF}{dt} = \int_0^L \left(-v^2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dx.$$

Na mocy równania falowego to wynosi zero, więc mamy $\frac{dF}{dt} = 0$, $F(t) = \text{const}$, czyli

$$F(t) = F(0) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[v^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,0)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right)^2\right]dx.$$

Zerowy warunek początkowy oznacza $u(x,0) = 0$ i $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ dla wszech x, stąd $\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = 0$, dla wszech x, więc

$$F(t) = 0 \quad \text{tożsamościowo.}$$

Patrząc na wyrażenie wyjściowe (8.18) stwierdzamy, że nieujemna funkcja podcałkowa musi być zerem, co jest możliwe tylko wtedy, gdy $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ tożsamościowo, czyli gdy $u(x,t) = \text{const}$. Ale z warunku początkowego $u(x,0) = 0$ więc $u(x,t) = 0$ tożsamościowo. Wtedy $u_1 = u_2$, więc rozwiązanie jest jedyne. ■

8.3 Liniowe przestrzenie funkcyjne z iloczynem skalarnym

Zbiór funkcyj V nazywamy *przestrzenią liniową* albo *lineałem nad ciałem* $\mathbb{C}$ (inna nazwa: *zespolona przestrzeń liniowa* lub *lineał zespolony*), jeśli

a) w zbiorze V jest określone dodawanie $+$ w taki sposób, że $(V,+)$ jest grupą przemienną (abelową);

b) w zbiorze V jest określone mnożenie przez liczby $\alpha \in \mathbb{C}$ w taki sposób, że spełnione są własności znane z kursu algebry (łączność mnożenia, istnienie jedynki, rozdzielność mnożenia względem dodawania).

Elementy lineału będziemy nazywać *funkcjami* lub *wektorami*.

PRZYKŁAD 1. Zbiór $C[0,1]$ wszystkich funkcyj ciągłych na przedziale domkniętym $\langle 0,1\rangle$. Dodawanie dwóch funkcyj $f,g : \langle a,b\rangle \to \mathbb{C}$ określamy jako $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, co się nazywa *dodawaniem punktowym*, bo odbywa się w każdym punkcie dziedziny osobno. Najważniejsze jest sprawdzenie, czy oba działania nie wyprowadzają poza zbiór. Tak jest w istocie, gdyż suma funkcyj ciągłych jest ciągła, a pomnożenie przez stały skalar z funkcji ciągłej daje funkcję ciągłą. Własności a,b należy sprawdzić samodzielnie.

Wektory $f_1, f_2, \ldots, f_n$ są *liniowo niezależne*, jeśli z równości

$$\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n = 0$$

wynika

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Jeśli w lineale V istnieje taki układ wektorów liniowo niezależnych $e_1, \ldots, e_n$, że każdy wektor $f \in V$ da się przedstawić jako kombinacja liniowa

$$f = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

to lineał V *jest n-wymiarowy* albo *ma wymiar n*, a układ $\{e_k\}$ nazywa się *bazą* tego lineału. Jeśli natomiast dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ w lineale V istnieje n liniowo niezależnych wektorów, to mówimy, że V jest *nieskończenie wymiarowy*.

PRZYKŁAD 1a. W lineale $C[0,1]$ układ jednomianów $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n$ jest liniowo niezależny dla każdego $n \in \mathbb{N}$, czyli można znaleźć dowolnie wiele elementów liniowo niezależnych, zatem ten lineał jest nieskończenie wymiarowy.

Niech V będzie lineałem zespolonym; *iloczynem skalarnym* lub *skaloczynem* w V nazywamy odwzorowanie $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ spełniające warunki zwane *aksjomatami*:

1. $(f,g) = (g,f)^*$ – *hermitowska symetria*;
2. $(f+g,h) = (f,h) + (g,h)$ – *addytywność względem pierwszego czynnika*;
3. $(\alpha f,g) = \alpha^*(f,g)$ – *sprzężona jednorodność względem pierwszego czynnika*;

4a. $(f,f) \geq 0$ – *nieujemna określoność*;

4b. $(f,f) = 0 \iff f = 0$ – *niezwyrodniałość*.

Dwie ostatnie własności razem nazywają się *dodatnią określonością*. Można sprawdzić, że z własności 1 i 2 wynika addytywność względem drugiego czynnika: $(f,g+h) = (f,g) + (f,h)$, a z 1 i 3 wynika jednorodność względem drugiego czynnika: $(f,\alpha g) = \alpha\,(f,g)$. Należy dodać, że warunek 3 jest zapisany w wersji, jaką wolą fizycy; matematycy zakładają jednorodność (nie sprzężoną) względem pierwszego czynnika.

PRZYKŁAD 1b. Zbiór $C[-\pi,\pi]$ funkcyj ciągłych na przedziale $\langle -\pi,\pi\rangle$ jest zamknięty względem mnożenia, bo iloczyn funkcyj ciągłych jest funkcją ciągłą. Ponadto zespolone sprzężenie funkcji ciągłej jest funkcją ciągłą, więc dla dwóch funkcyj $f,g \in C[-\pi,\pi]$ mamy $f^*g \in C[-\pi,\pi]$. W książce Kuratowskiego na str. 153 jest twierdzenie mówiące, że każda funkcja ciągła w przedziale domkniętym ma funkcję pierwotną. To oznacza, że dla $f,g \in C[-\pi,\pi]$ istnieje całka oznaczona

$$(f,g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^* g(x)\,dx. \tag{8.20}$$

To wyrażenie ma wszystkie potrzebne własności skaloczynu. Oznaczywszy $e_n(x) = \cos nx$ oraz $f_n(x) = \sin nx$ za pomocą tego skaloczynu możemy wzory (8.14) zapisać

$$a_n = (e_n, F), \quad b_n = (f_n, F).$$

Twierdzenie 1. Dla dowolnych $f,g \in V$ zachodzi nierówność

$$|(f,g)|^2 \leq (f,f)\,(g,g)$$

zwana *nierównością Schwarza*.

Dowód. Mieliśmy podobne Twierdzenie 1 z § 8.1 dotyczące skaloczynu w $\mathbb{R}^n$, ale potrzebny jest nowy dowód. Z własności 4a mamy

$$(f+\lambda g, f+\lambda g) \geq 0$$

dla dowolnej liczby $\lambda \in \mathbb{C}$. Z własności 2 i 3 dostajemy

$$(f,f) + \lambda^*(g,f) + \lambda(f,g) + \lambda^*\lambda(g,g) \geq 0.$$

Dzięki 1 możemy to zapisać

$$(f,f) + [\lambda(f,g)]^* + \lambda(f,g) + |\lambda|^2(g,g) \geq 0.$$

Podstawiamy teraz $\lambda = -(g,f)/(g,g)$:

$$(f,f) - \frac{[(g,f)(f,g)]^*}{(g,g)} - \frac{(g,f)(f,g)}{(g,g)} + \frac{|(g,f)|^2}{(g,g)^2}\,(g,g) \geq 0.$$

Znowu korzystamy z własności 1:

$$(f,f) - 2\frac{|(g,f)|^2}{(g,g)} + \frac{|(g,f)|^2}{(g,g)} \geq 0,$$

$$(f,f) - \frac{|(f,g)|^2}{(g,g)} \geq 0,$$

$$(f,f)(g,g) \geq |(f,g)|^2. \quad \blacksquare$$

Twierdzenie 2. Wyrażenie

$$||f|| = \sqrt{(f,f)} \tag{8.21}$$

ma następujące własności

1. $||\alpha f|| = |\alpha|\,||f||$,
2. $||f+g|| \leq ||f|| + ||g||$,

3a. $||f|| \geq 0$

3b. $||f|| = 0 \iff f = 0$.

Dowód. Dla udowodnienia 1 policzmy

$$||\alpha f||^2 = (\alpha f, \alpha f) = \alpha^* \alpha (f,f) = |\alpha|^2 ||f||^2,$$

co po spierwiastkowaniu daje potrzebną równość. Dla wykazania 2 liczymy

$$||f+g||^2 = (f+g, f+g) = (f,f) + (g,f) + (f,g) + (g,g) = (f,f) + (f,g)^* + (f,g) + (g,g)$$

$$= ||f||^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(f,g) + ||g||^2 \leq ||f||^2 + 2\,|\mathrm{Re}\,(f,g)| + ||g||^2 \leq ||f||^2 + 2\,|(f,g)| + ||g||^2.$$

Teraz korzystamy z poprzedniego twierdzenia

$$||f+g||^2 \leq ||f||^2 + 2||f||\,||g|| + ||g||^2 = (||f|| + ||g||)^2.$$

Po spierwiastkowaniu dostaniemy nierówność trójkąta. Własność 3a wynika z (8.21) i z własności 4a skaloczynu, a własność 3b również poprzez (8.21) z własności 4b skaloczynu. $\blacksquare$

Własności wymienione w tym twierdzeniu pozwalają nazwać wyrażenie (8.21) *normą*. Używając tej normy możemy wprowadzić *odległość* między funkcjami:

$$d\,(f,g) = ||f-g||.$$

W przypadku funkcyj o dziedzinie $\langle -\pi, \pi \rangle$ ze skaloczynem (8.20) kwadrat normy jest całką z kwadratu modułu:

$$||f||^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^* f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx,$$

a odległość między funkcjami jest odległością w sensie średniej kwadratowej z różnicy:

$$d\,(f,g) = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx}.$$

Skoro już mamy normę i odległość, jak w zwykłej przestrzeni, to można rozważać ciągi jej elementów albo wektorów $\{f_n\}$. Ciąg elementów lineału V spełnia *warunek Cauchy'ego*, jeśli

$$\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ N \in \mathbb{N}:\ \forall\ n, m > N\ \ d(f_n, f_m) < \epsilon. \tag{8.22}$$

Lineał ze skaloczynem $(V, (\cdot, \cdot))$, w którym każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny w tym lineale (tzn. granica ciągu należy do lineału), nazywamy *przestrzenią Hilberta* lub *lineałem Hilberta*. [David Hilbert (1862–1943) – matematyk niemiecki, zajmował się niemal wszystkimi działami matematyki, uważany za najwybitniejszego matematyka XX wieku.]

Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ niech $w : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^+$. Określamy zbiór funkcyj $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$:

$$L^2(a, b; w) = \{f : \int_a^b |f(x)|^2 w(x)\, dx < \infty\}. \tag{8.23}$$

Ostatni warunek w nawiasie klamrowym mówi, że całka z kwadratu modułu jest zbieżna. Górny wskaźnik 2 w L^2 oznacza, że chodzi o funkcje całkowalne z kwadratem (modułu). Uwaga: w tym zbiorze nie zakładamy, że funkcje są ciągłe.

Twierdzenie 3. Zbiór $L^2(a, b; w)$ jest lineałem zespolonym.

Dowód. Jeśli $f \in L^2(a, b; w)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$, to $\lambda f \in L^2(a, b; w)$, bo stałą $|\lambda|^2$ można wyciągnąć przed znak całki. Teraz sprawdzimy, czy zbiór jest zamknięty względem dodawania. Niech $f, g \in L^2(a, b; w)$. Dla dowolnych liczb zespolonych u, z zachodzi

$$0 \le (|u| - |z|)^2 = |u|^2 - 2|u|\,|z| + |z|^2,$$

skąd

$$2|u|\,|z| \le |u|^2 + |z|^2, \tag{8.24}$$

$$|u|^2 + 2|u|\,|z| + |z|^2 \le 2\left(|u|^2 + |z|^2\right). \tag{8.25}$$

Z drugiej strony

$$|u+z|^2 = (u+z)^*(u+z) = \overline{u}u + u^*z + z^*u + z^*z = |u|^2 + 2\,\mathrm{Re}(u^*z) + |z|^2 \le |u|^2 + 2|u|\,|z| + |z|^2.$$

Łącząc to z (8.25) dostajemy

$$|u + z|^2 \le 2\left(|u|^2 + |z|^2\right).$$

Wykorzystujemy to w następujących całkach

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 w(x)\, dx \le 2\int_a^b |f(x)|^2 w(x)\, dx + 2\int_a^b |g(x)|^2 w(x)\, dx < \infty,$$

bo obie całki z osobna są mniejsze od nieskończoności. To oznacza, że $f + g \in L^2(a, b; w)$ Sprawdziliśmy, że zbiór jest zamknięty względem obu działań linowych. Pozostałe aksjomaty lineału o własnościach działań liniowych są spełnione jak dla dowolnych funkcyj zespolonych. ■

Całka stojąca we wzorze (8.23) będzie kandydatem na kwadrat normy w lineale $L^2(a,b;w)$:

$$||f||^2 = \int_a^b |f(x)|^2 w(x)\,dx. \tag{8.26}$$

Własności normy wymienione w Twierdzeniu 2 są łatwe do sprawdzenia poza ostatnią. Całka z kwadratu modułu dowolnej funkcji f pomnożonej przez nieujemną funkcję w jest nieujemna, więc własność 3a jest spełniona. Dla sprawdzenia własności 3b przyrównajmy całkę z kwadratu modułu do zera:

$$||f||^2 = \int_a^b |f(x)|^2 w(x)\,dx = 0.$$

Jest to całka z funkcji nieujemnej. Jej znikanie nie oznacza niestety znikania funkcji podcałkowej na całej dziedzinie. Teraz już nie ma założenia, że funkcja f jest ciągła. Może się zdarzyć, że f jest zerem poza skończonym zbiorem punktów – wtedy całka też jest zerem, bo na wartość całki nie ma wpływu zmiana funkcji w skończenie wielu punktach. Mamy więc nieskończenie wiele funkcyj niezerowych, dla których wyrażenie (8.26) jest zerem. Warunek 3b nie jest spełniony. Matematycy znaleźli wyjście z tego kłopotu – wszystkie funkcje f, dla których wzór (8.26) daje zero, trzeba uznać za ten sam zerowy element lineału. Podobnie dwie różne funkcje f, g, dla których zachodzi

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 w(x)\,dx = 0,$$

uznamy za reprezentanty tego samego elementu lineału $L^2(a,b;w)$. Takie funkcje są „niemal" równe, to znaczy równe poza „niewieloma" punktami dziedziny. To wszystko jest mało ścisłe; z braku czasu mogę jedynie podać wyrażenie, jakim posługują się matematycy: funkcje f i g są sobie równe *prawie wszędzie*, a po definicję tego pojęcia odesłać do rozdziału VI książki Witolda Kołodzieja *Analiza matematyczna*. Tak więc za element lineału trzeba uznać klasę równoważności funkcyj, które są sobie równe prawie wszędzie na przedziale $\langle a,b\rangle$.

Twierdzenie 4. Wzór

$$(f,g) = \int_a^b f(x)^* g(x) w(x)\,dx$$

określa iloczyn skalarny w $L^2(a,b;w)$.

Dowód. Należy pokazać, że dla dowolnych funkcyj z lineału podany wzór daje skończoną liczbę zespoloną. Niech $f,g \in L^2(a,b;w)$; wykorzystujemy wzór (8.24):

$$\left|\int_a^b f^* g\, w\,dx\right| \le \int_a^b |f|\,|g| w\,dx \le \frac{1}{2}\left(\int_a^b |f|^2 w\,dx + \int_a^b |g|^2 w\,dx\right) < \infty.$$

Pozostałe własności są łatwe do sprawdzenia jak w Przykładzie 1b, a kłopot z niezwyrodniałością zostaje rozwiązany przez klasy równoważności funkcyj. ■

Twierdzenie 5. Zbiór $L^2(a,b;w)$ jest lineałem Hilberta.

Dowodu nie będzie.

Dwie funkcje $f,g \in L^2(a,b;w)$ nazywają się *ortogonalne*, jeśli $(f,g)=0$. *Układem ortogonalnym* nazywamy każdy zbiór elementów $L^2(a,b;w)$, które są parami ortogonalne. Jeśli wszystkie elementy takiego układu mają normę 1, to układ nazywa się *ortonormalny*.

PRZYKŁAD 2. Zajmijmy się funkcjami $f_n(x)=\mathrm{e}^{inx}$ dla $n\in\mathbb{Z}$. Policzmy ich skaloczyny w $L^2(-\pi,\pi;1/2\pi)$:

$$(f_m,f_n)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-imx}\mathrm{e}^{inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(n-m)x}\,dx. \tag{8.27}$$

Teraz trzeba rozważyć dwie możliwości: najpierw $m\neq m$

$$(f_m,f_n)=\frac{1}{2\pi i(n-m)}\mathrm{e}^{i(n-m)x}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

bo występująca tu funkcja wykładnicza jest okresowa z okresem 2π. Druga możliwość $m=n$ w całce (8.27) daje w wykładniku zero, więc

$$(f_n,f_n)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}dx=\frac{1}{2\pi}\,x\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\,2\pi=1.$$

Dwa ostatnie wyniki można zawrzeć w jednym wzorze

$$(f_m,f_n)=\delta_{mn}\quad\text{dla}\quad m,n\in\mathbb{Z}.$$

To znacza, że układ funkcyj $\{f_n\}$ jest ortonormalny.

Przed sformułowaniem następnego twierdzenia warto przypomnieć wzór na przedstawienie wektora $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$ w bazie ortonormalnej: $\mathbf{r}=\sum\limits_{i=1}^{3}x_i\mathbf{e}_i$. Wiadomo przy tym, że współrzędne x_i tego wektora można wyrazić przez iloczyny skalarne: $x_i=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{r}$. Po wstawieniu tego do poprzedniego wzoru dostajemy

$$\mathbf{r}=\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{e}_i \tag{8.28}$$

Twierdzenie 5. Jeśli $e_1,\,e_2,\,\ldots,e_n,\,\ldots$ jest układem ortonormalnym w lineale Hilberta V, to dla dowolnego $f\in V$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(e_n,f)|^2$ jest zbieżny i zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(e_n,f)|^2\le||f||^2, \tag{8.29}$$

która przechodzi w równość

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(e_n,f)|^2=||f||^2 \tag{8.30}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(e_n, f)e_n = f. \tag{8.31}$$

Dowód. Liczymy

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{m}(e_k, f)e_k\right\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{m}(e_k, f)e_k,\ f - \sum_{l=1}^{m}(e_l, f)e_l\right)$$

$$= (f, f) - \sum_{l=1}^{m}(f, (e_l, f)e_l) - \sum_{k=1}^{m}((e_k, f)e_k, f) + \sum_{k,l=1}^{m}((e_k, f)e_k, (e_l, f)e_l)$$

$$= (f, f) - \sum_{k=1}^{m}(e_k, f)(f, e_k) - \sum_{k=1}^{m}(e_k, f)^*(e_k, f) + \sum_{k,l=1}^{m}(e_k, f)^*(e_l, f)\delta_{kl}$$

$$= (f, f) - 2\sum_{k=1}^{m}|(e_k, f)|^2 + \sum_{k=1}^{m}|(e_k, f)|^2 = ||f||^2 - \sum_{k=1}^{m}|(e_k, f)|^2 \geq 0. \tag{8.32}$$

Wobec tego $\sum\limits_{k=1}^{m}|(e_k, f)|^2 \leq ||f||^2$, a po przejściu do granicy $m \to \infty$ otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(e_k, f)|^2 \leq ||f||^2,$$

więc mamy udowodnioną nierówność (8.29).

Gdyby zamiast tego była równość, to z rachunków prowadzących do (8.32) otrzymujemy

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{\infty}(e_k, f)e_k\right\|^2 = ||f||^2 - \sum_{k=1}^{\infty}|(e_k, f)|^2 = 0.$$

Z niezwyrodniałości normy wynika $f - \sum\limits_{k=0}^{\infty}(e_k, f)e_k = 0$ czyli równość (8.30). ■

Wzór (8.29) nazywa się *nierównością Bessela*, a wzór (8.30) *równością Parsevala*. [Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) – astronom i geodeta niemiecki, w wieku 20 lat wyliczył orbitę komety Halleya, Marc Antoin Parseval (1755–1836) – matematyk francuski.] Równość Parsevala oznacza, że każdy wektor z lineału Hilberta V da się rozwinąć na nieskończoną kombinację wektorów układu $\{e_n\}$. To oznacza, że ten układ jest *bazą* lineału V. Z (8.31) mamy od razu współczynniki rozwinięcia na wektory bazy ortonormalnej. Wzór (8.31) jest podobny do wzoru (8.28), dlatego mówimy, że liczby $\alpha_k = (e_k, f)$ są *współrzędnymi* wektora f w bazie ortonormalnej $\{e_n\}$.

Twierdzenie 6. Niech V będzie lineałem Hilberta i niech $\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ będzie układem ortonormalnym w V. Jeśli $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2 < \infty$, to szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ jest zbieżny w V oraz zachodzi równość

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2.$$

Dowód. Wobec zbieżności szeregu $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2$ dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbf{IN}$ takie, że dla $m > n \geq N$ zachodzi

$$\sum_{k=n}^{m}|\alpha_k|^2 < \epsilon^2.$$

Z ortonormalności układu $\{e_n\}$ mamy

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} \alpha_k e_k\right\|^2 = \left(\sum_{k=n}^{m} \alpha_k e_k, \sum_{l=n}^{m} \alpha_l e_l\right) = \sum_{k,l=n}^{m} \alpha_k^* \alpha_l \delta_{kl} = \sum_{k=n}^{m} |\alpha_k|^2 < \epsilon^2.$$

Po spierwiastkowaniu dostajemy $\left\|\sum_{k=n}^{m} \alpha_k e_k\right\| < \epsilon$. To oznacza spełnienie warunku Cauchy'ego z § 7.3. Na mocy Twierdzenia 1 z tamtego paragrafu i ponieważ V jest przestrzenią Hilberta, szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ jest zbieżny, a potrzebną równość dowodzi się tak samo, jak równość Parsevala. ■

W Przykładzie 2 pokazaliśmy, że układ $\{\ldots f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ jest ortonormalny w $L^2(-\pi, \pi; (2\pi)^{-1})$. Można pokazać, że jest on bazą. To oznacza, że dowolną funkcję $f \in L^2(-\pi, \pi; (2\pi)^{-1})$ można przedstawić w postaci szeregu

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f_n, f) f_n.$$

Warto teraz wpisać jawną postać funkcyj bazowych

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f_n, f) \mathrm{e}^{inx}. \tag{8.33}$$

W tej postaci rozpoznajemy zespolony szereg Fouriera.

Twierdzenia 5 i 6 mówią, że każdemu elementowi lineału $L^2(-\pi, \pi; (2\pi)^{-1})$ odpowiada jeden nieskończony ciąg współczynników $c_n = (f_n, f)$ w zwanych *współczynnikami Fouriera*, a z kolei każdy ciąg tych współczynników zadaje element $f \in L^2(-\pi, \pi; (2\pi)^{-1})$ jako szereg z Twierdzenia 6.

8.4 Fale bieżące

Rozważymy teraz jeszcze inne rozwiązania równania falowego, które interpretowane są jako fale bieżące. Na początek wybierzemy równanie falowe w jednym wymiarze przestrzennym:

$$v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{8.34}$$

gdzie u jest funkcją dwóch zmiennych $u(x, t)$. Wprowadzamy dwie nowe zmienne

$$\eta = x + \alpha t, \qquad \xi = x + \beta t,$$

przy czym α i β są dowolnymi stałymi; skonkretyzujemy je później. Liczymy pochodne cząstkowe funkcji złożonej $u(\eta(x, t), \xi(x, t))$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \alpha\frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \beta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

Liczymy odpowiednią różnicę

$$v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(v^2 - \alpha^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\left(v^2 - \alpha\beta\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \left(v^2 - \beta^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Wybierzmy $\beta^2 = v^2$, wtedy ostatni wyraz znika. Mamy dwie możliwości:

$$\text{I.}\ \ \beta = -v, \qquad \text{II.}\ \ \beta = v.$$

W pierwszym przypadku zostaje

$$v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(v^2 - \alpha^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\left(v^2 + \alpha v\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = \left(v^2 - \alpha^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2v(v+\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}.$$

Gdybyśmy teraz wybrali $\alpha = -v$, to oba nawiasy znikłyby i nie byłoby równania do rozwiązania, przy tym zmienne η i ξ stałyby się identyczne: $\eta = x - vt$, $\xi = x - vt$. Jest to sytuacja niepożądana. W takim razie wybieramy $\alpha = v$, wtedy $\alpha^2 = v^2$, pierwszy nawias się zeruje i z równania falowego zostaje

$$v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,v^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0,$$

co oznacza takie równanie różniczkowe w nowych zmiennych

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0. \tag{8.35}$$

Pierwsze całkowanie tego równania daje

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = h(\xi)$$

z dowolną funkcją h. Drugie całkowanie daje

$$u(\xi,\eta) = \int h(\xi)\,d\xi + g(\eta)$$

z nową dowolną funkcją g. Skoro h była funkcją dowolną, to jej funkcja pierwotna $\int h(\xi)\,d\xi$ też jest dowolna, oznaczmy ją $f(\xi)$. W ten sposób otrzymujemy następujące rozwiązanie równania (8.35)

$$u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

z dwiema dowolnymi funkcjami swoich zmiennych, tzn $\eta = x + vt$, $\xi = x - vt$. Wracając do wyjściowych zmiennych x i t możemy zapisać ogólne rozwiązanie równania falowego (8.34) w postaci

$$u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt), \tag{8.36}$$

gdzie f i g są funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi.

Przyjrzyjmy się pierwszemu składnikowi tej sumy, czyli wyrażeniu $f(x-vt)$. W chwili $t=0$ fala ma kształt przestrzenny opisany przez funkcję $f(x)$. Wiemy, że funkcja $f(x-a)$ ma wykres przesunięty w prawo o a, więc wyrażenie $f(x-vt)$ ma wykres przesunięty w prawo o vt względem wykresu funkcji $f(x)$. To oznacza, że w miarę upływu czasu zaburzenie opisane przez funkcję f przesuwa się bez zmiany kształtu w prawo z szybkością v. Zatem pierwszy składnik sumy (8.36) oznacza falę bieżącą biegnącą w prawo, a opisane przez nią zaburzenie jest stałe w punktach i czasach spełniających warunek $x-vt=a=\text{const}$, czyli $x=vt+a$, co oznacza przesuwanie się ku dodatniej stronie osi X.

Drugi składnik sumy (8.36) oznacza falę bieżącą biegnącą w lewo, bo jest ona stała w punktach i chwilach spełniających warunek $x=-vt+b$ z pewną stałą b. Możemy powiedzieć, że rozwiązanie (8.36) jest superpozycją dwóch fal bieżących biegnących w przeciwne strony.

Druga możliwość $\beta=v$ doprowadza do takiego samego wyniku, jedynie z funkcjami g i f zamienionymi miejscami. Trzeba dodać że są to fale bardzo ogólnej postaci, wcale nie okresowej w zależności od czasu. Dopiero podstawienie $f(\xi)=A\cos k\xi$ dla $g=0$ daje tzw. *falę harmoniczną* nazwaną tak z powodu harmonicznej zależności od czasu:

$$u(x,t)=A\cos[k(x-vt)]=A\cos(kx-kvt)=A\cos(kx-\omega t), \tag{8.37}$$

gdzie $\omega=kv$. Bezwymiarowy argument okresowej funkcji o okresie 2π zadającej falę bieżącą nazywa się *fazą*. W przypadku rozwiązania (8.37) jest to argument cosinusa, czyli $\varphi=kx-\omega t$. Maksymalny moduł zaburzenia u wynosi $|A|$ i nosi nazwę *amplitudy*. Zaburzenie (8.37) powtarza się dla przyrostów Δx spełniających warunek $k\Delta x=2\pi$. Odległość $\Delta x=\lambda=2\pi/k$ nazywa się *długością fali*, a wielkość $k=2\pi/\lambda$ – *liczbą falową*.[1] Rozwiązanie (8.37) można więc zapisać w postaci

$$u(x,t)=A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt).$$

Czas T potrzebny na to, aby zaburzenie powtórzyło się w ustalonym punkcie spełnia warunek $\omega T=2\pi$, stąd

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{kv}=\frac{\lambda}{v}.$$

Wielkość $\omega=2\pi/T$ nazywa się *częstością kołową*. Wyrażenie (8.37) można zapisać w jeszcze innej postaci

$$u(x,t)=A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right).$$

Definicje fazy, długości fali, okresu, liczby falowej i częstości kołowej pozostają słuszne także wtedy, gdy zaburzenie nie jest falą harmoniczną, lecz jej wykres jest profilem okresowym.

Warto jeszcze wspomnieć, że szczególna kombinacja bieżących fal harmonicznych daje falę stojącą. Weźmy mianowicie sumę fal bieżących o jednakowych amplitudach biegnących w przeciwne strony:

$$h(x,t)=A\cos(kx-\omega t)+A\cos(kx+\omega t)=A[\cos(kx-\omega t)+\cos(kx+\omega t)].$$

[1] Istnieje jeszcze wielkość $\kappa=1/\lambda$, która też nazywa się liczbą falową. Dla odróżnienia wielkość k powinna chyba nazywać się *kołową liczbą falową*. Między k i κ jest taki zam związek $k=2\pi\kappa$ jak związek $\omega=2\pi\nu$ między częstością kołową ω a częstotliwością $\nu=1/T$.

Korzystamy z tożsamości trygonometrycznej $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$:

$$h(x,t) = 2A\cos\frac{kx-\omega t+kx+\omega t}{2}\cos\frac{kx-\omega t-(kx+\omega t)}{2} = 2A\cos kx\,\cos\omega t.$$

Otrzymaliśmy iloczyn dwóch funkcyj od różnych argumentów jedna od x druga od t, czyli rozwiązanie postaci (8.8) – zatem jest to fala stojąca.

8.4.1 Zagadnienie początkowe

Rozważymy teraz równanie falowe

$$v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{8.38}$$

z warunkami początkowymi

$$u(x,0) = h(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = k(x), \tag{8.39}$$

gdzie $h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są zadanymi funkcjami różniczkowalnymi, przy czym h jest klasy C^2 zaś k klasy C^1. Równości (8.39) są zwane *warunkami początkowymi Cauchy'ego*. Jak wiemy z wzoru (8.36), ogólne rozwiązanie równania falowego bez uwzględnienia warunków (8.39) ma postać

$$u(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt), \tag{8.40}$$

gdzie f i g są funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi. Podstawiając w tym wzorze $t = 0$ z pierwszego z warunków (8.39) otrzymujemy

$$f(x) + g(x) = h(x). \tag{8.41}$$

Różniczkując (8.40) względem czasu, kładąc $t = 0$ i uwzględniając drugi z warunków (8.39) dostajemy

$$\begin{aligned} -vf'(x) + vg'(x) &= k(x), \\ -f'(x) + g'(x) &= v^{-1}k(x). \end{aligned} \tag{8.42}$$

Całkujemy tę równość poczynając od dowolnego punktu a:

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{v}\int_a^x k(s)ds + g(a) - f(a).$$

Po prawej stronie pojawiły się dwie stałe po to, aby obie strony dały to samo dla $x = a$. To równanie wraz z (8.41) stanowią układ dwóch równań algebraicznych na dwie niewiadome $f(x)$, $g(x)$ – ma on rozwiązanie

$$f(x) = \frac{1}{2}h(x) - \frac{1}{2v}\int_a^x k(s)ds - \frac{1}{2}[g(a) - f(a)] \tag{8.43}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}h(x) + \frac{1}{2v}\int_a^x k(s)ds + \frac{1}{2}[g(a) - f(a)] \tag{8.44}$$

Zastąpiwszy w (8.43) zmienną x przez $x - vt$, a w (8.44) przez $x + vt$ wstawiamy to do (8.40):

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[h(x-vt) + h(x+vt) - \frac{1}{v}\int_a^{x-vt} k(s)ds + \frac{1}{v}\int_a^{x+vt} k(s)ds\right].$$

W trzecim wyrazie po prawej stronie zmieniamy znak przez zamianę granic całkowania:

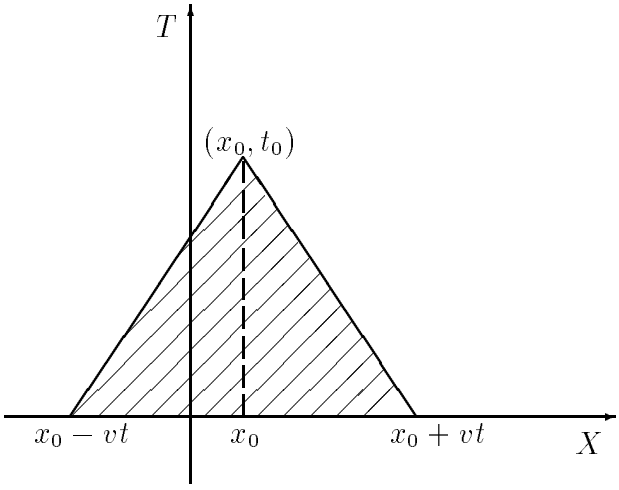
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[h(x-vt) + h(x+vt) + \frac{1}{v}\int_{x-vt}^{a} k(s)ds + \frac{1}{v}\int_a^{x+vt} k(s)ds\right].$$

Dwa ostatnie wyrazy łączymy w jedną całkę:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[h(x-vt) + h(x+vt) + \frac{1}{v}\int_{x-vt}^{x+vt} k(s)ds\right]. \tag{8.45}$$

Ta równość nazywa się *wzorem d'Alemberta* i pokazuje zależność rozwiązania od warunków początkowych (8.39) Widać z niej, że warunki początkowe (8.39) określają jednoznacznie rozwiązanie równania falowego.

Warto jeszcze zbadać bliżej zależność rozwiązania od warunków początkowych. Rozpatrzmy je w pewnym dowolnie wybranym punkcie (x_0, t_0) płaszczyzny $X \times T$ dla $t_0 > 0$. Ze wzoru (8.45) wynika, że rozwiązanie w punkcie (x_0, t_0) określone jest przez wartości funkcji k w przedziale $\langle x_0 - vt_0,\ x_0 + vt_0\rangle$ oraz wartości funkcji h tylko na końcach tego przedziału. W związku z tym zbiór $\langle x_0 - vt_0,\ x_0 + vt_0\rangle$ na prostej początkowej $t = 0$ można nazwać *przedziałem wpływu* na punkt (x_0, t_0). Trójkąt o wierzchołku w punkcie (x_0, t_0) i podstawie jako przedziale wpływu nazywa się *obszarem określoności* punktu (x_0, t_0), patrz Rys. 8.1. Ta nazwa bierze się stąd, że w każdym punkcie tego obszaru rozwiązanie jest w pełni określone przez warunki początkowe z przedziału wpływu.



Rysunek 8.1

Ze wzoru (8.45) wynika również, że dwa zestawy różnych warunków początkowych, które pokrywają się tylko na pewnym przedziale D prostej początkowej określają dwa

różne rozwiązania, które są jednak identyczne we wspólnym obszarze określoności związanym z D.

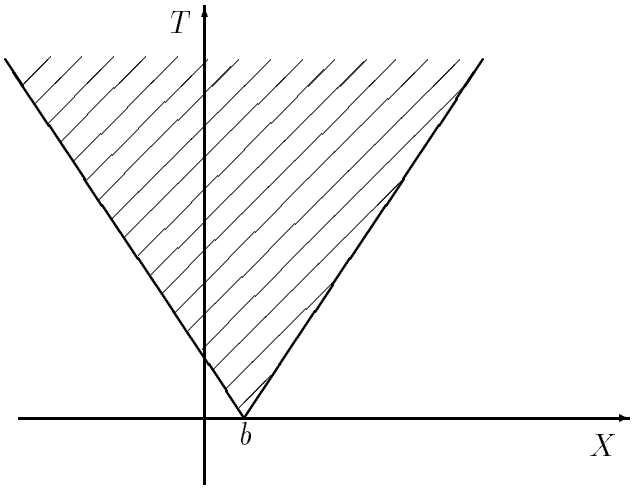
Linia prosta poprowadzona przez punkt $(b, 0)$ prostej początkowej, ograniczająca z jednej ze stron obszar określoności ma równanie postaci

$$x - vt = b \quad \text{lub} \quad x + vt = b,$$

zob. Rys. 8.2. Proste te należą do jednej z dwóch rodzin prostych równoległych $\xi = \text{const}$ lub $\eta = \text{const}$, przy czym

$$\xi = x - vt, \qquad \eta = x + vt,$$

które określa się mianem *krzywych charakterystycznych* równania falowego (8.38). Używa się tu określenia „krzywa", a nie „prosta", ponieważ w sytuacjach bardziej ogólnych – gdy prędkość v nie jest stała – charakterystyki są krzywymi, a nie jak w rozważanym przypadku prostymi równoległymi.



Rysunek 8.2

8.4.2 Fale płaskie

Przechodzimy do równania falowego w trzech wymiarach przestrzennych:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{8.46}$$

Poznamy sposób jego sprowadzenia do rozważanego zagadnienia w jednym wymiarze przestrzennym. Otóż trzeba rozważać funkcję dwóch zmiennych $u(\zeta, t)$, gdzie pierwsza zmienna następująco zależy od współrzędnych przestrzennych:

$$\zeta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = n_1 x + n_2 y + n_3 z.$$

Występuje tu ustalony wektor jednostkowy $\mathbf{n}$. W takiej sytuacji

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = n_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} = n_2 \frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} = n_3 \frac{\partial u}{\partial \zeta}.$$

Podobnie liczymy drugie pochodne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = n_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = n_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = n_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = n_3 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = n_3^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}.$$

Wstawiamy to do równania (8.46)

$$n_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + n_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + n_3^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - v^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - v^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - v^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Pomnóżmy to stronami przez v^2

$$v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Rozpoznajemy w tym równanie (8.34) ze zmienną ζ w miejsce x. W takim razie korzystamy z gotowego rozwiązania (8.36), które teaz zapiszemy

$$u(\zeta, t) = f(\zeta - vt) + g(\zeta + vt).$$

$$u(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - vt) + g(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} + vt). \tag{8.47}$$

Przy ustalonym czasie to rozwiązanie jest stałe na podzbiorach spełniających równanie $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = \text{const}$. Z rozdziału 5 wiemy, że takie równanie opisuje płaszczyznę prostopadłą do wektora $\mathbf{n}$. Skoro rozwiązanie (8.47) jest stałe na płaszczyznach, to nazywa się *falą płaską*. Dla fali bieżącej trzeba wziąć jeden składnik sumy (8.47), na przykład:

$$u(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - vt). \tag{8.48}$$

Opisane przez nią zaburzenie jest stałe w punktach i czasach spełniających warunek $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - vt = a = \text{const}$, czyli

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = vt + a,$$

co oznacza, że w miarę upływu czasu wspomniane płaszczyzny przesuwają się w kierunku wektora $\mathbf{n}$, dlatego $\mathbf{n}$ wyznacza kierunek rozchodzenia się fali (8.48).

Jak znaleźć prędkość tego rozchodzenia się? Możemy położenie $\mathbf{r}$ uczynić funkcją czasu – to oznacza, że wprowadzamy ruch $\mathbf{r}(t)$ fikcyjnej cząstki. Wprowadźmy więc ruch (oczywiście jednostajny) taki, że owa fikcyjna cząstka jest ciągle na powierzchni tej samej wartości a:

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t) - vt = a.$$

Zróżniczkujmy tę równość względem czasu:

$$\frac{d\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)}{dt} - v = 0.$$

Stąd dostajemy związek

$$\frac{d\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)}{dt} = v.$$

Skoro $\mathbf{n}$ jest wektorem stałym, to z pochodną możemy wejść do iloczynu skalarnego:

$$\mathbf{n}\cdot\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = v,$$

czyli wprowadziwszy prędkość $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ fikcyjnej cząstki mamy

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{w} = v.$$

Od początku stała v była dodatnia, więc ten skaloczyn musi być dodatni. Naturalnym jest wybrać wektor $\mathbf{w}$ prostopadły do rozważanych płaszczyzn, czyli zgodnie równoległy do $\mathbf{n}$. Wtedy iloczyn skalarny zamienia się w iloczyn wartości wektorów: $nw = v$. Ale wektor $\mathbf{n}$ jest jednostkowy, więc zostaje

$$w = v$$

i widzimy, że powierzchnie stałej wartości funkcji u przesuwają się z prędkością $\mathbf{w} = v\mathbf{n}$.

W szczególnym przypadku harmonicznej fali bieżącej f powinna być funkcją sinus lub cosinus, np. $f(\xi) = A\cos k\xi$, wówczas rozwiązanie (8.48) przyjmuje postać

$$u(\zeta, t) = A\cos[k(\zeta - vt)] = A\cos(k\zeta - \omega t).$$

Pamiętamy, czym jest ζ, więc otrzymujemy

$$u(\mathbf{r}, t) = A\cos[k(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) - \omega t].$$

Jest to wzór na bieżącą harmoniczną falę płaską rozchodzącą się w kierunku $\mathbf{n}$. Po wprowadzeniu *wektora falowego* $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ można tę funkcję zapisać inaczej:

$$u(\mathbf{r}, t) = A\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t).$$

Można jeszcze wprowadzić *przesunięcie fazowe* ε, wtedy funkcja u przyjmuje postać

$$u(\mathbf{r}, t) = A\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \varepsilon). \tag{8.49}$$

W szczególności dla $\varepsilon = -\pi/2$ otrzymujemy sinus:

$$u(\mathbf{r}, t) = A\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t).$$

Przy rozpatrywaniu fal harmonicznych stosuje się pewien zapis, który czasem bywa przydatny i odgrywa istotną rolę w elektromagnetycznej teorii fal świetlnych. Mianowicie funkcję (8.49) można uważać za część rzeczywistą wyrażenia zespolonego

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \varepsilon)}. \tag{8.50}$$

Po rozłożeniu na czynniki

$$\psi(\mathbf{r},t) = A\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\mathrm{e}^{i\varepsilon}$$

możemy wprowadzić amplitudę zespoloną $Z = A\mathrm{e}^{i\varepsilon}$ i napisać

$$\psi(\mathbf{r},t) = Z\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}. \tag{8.51}$$

Ta funkcja zespolona jako całość też jest rozwiązaniem równania falowego, co można sprawdzić przez policzenie. W związku z tym zarówno jej część rzeczywista, jak i urojona również są rozwiązaniami. Możemy więc całą funkcję (8.51) uważać za falę płaską, ale interpreatację fizyczną przypisać tylko części rzeczywistej. W mechanice kwantowej ważna jest pełna funkcja zespolona ψ, gdyż wyrażnienie $|\psi|^2$ ma interpretację gęstości prawdopodobieństwa.

Za pomocą omawianej funkcji można też opisać fale poruszające się w kierunku przeciwnym biorąc

$$\varphi(\mathbf{r},t) = Z\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}. \tag{8.52}$$

Zespoloną harmoniczną falę płaską (8.51) można rozłożyć na czynniki:

$$\psi(\mathbf{r},t) = Z\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\cdot\mathrm{e}^{-i\omega t},$$

przy tym pierwszy czynnik jest wyłącznie funkcją położenia, a drugi – funkcją czasu. Jednak nie jest to fala stojąca, jak to się dzieje przy rozkładzie na czynniki dla fal rzeczywistych.