RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

Wykład dla I roku fizyki bis

Bernard Jancewicz

Istniejące podręczniki

Franciszek Leja: *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN 1963 i później;
G.M. Fichtenholz: *Rachuek różniczkowy i całkowy*, tomy I–III, PWN 1963 i później;
Kazimierz Kuratowski: *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN 1967;
Walter Rudin: *Podstawy analizy matematycznej*, PWN 1969 i później;
Witold Kołodziej: *Analiza matematyczna*, PWN 1978;
Jan Mikusiński: *Wstęp do analizy matematycznej*, PWN 1990;
Ryszard Rudnicki: *Wykłady z analizy matematycznej*, PWN 2001;
Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas: *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wyd. GiS 2003 (istnieją też wcześniejsze wydania).

Istniejące zbiory zadań

W. Krysicki, L. Włodarski: *Analiza matematyczna w zadaniach*, PWN 1966;
W.P. Minorski: *Zbiór zadań z matematyki wyższej*, WNT 1974;
G.I. Zaporożec: *Metody rozwiązywania zadań z analizy matematycznej*, WNT 1974;
Ćwiczenia z analizy matematycznej z zastosowaniami, red. Lucjan Siewierski, PWN 1981;
Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas: *Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania*, Oficyna Wyd. GiS 2001 (istnieją też wcześniejsze wydania);
Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas: *Analiza matematyczna 1. Kolokwia i egzaminy*, Oficyna Wyd. GiS 2003 (istnieją też wcześniejsze wydania).

Rozdział 1

FUNKCJE JEDNEJ ZMIENNEJ

1.1 Zbiory liczbowe, nierówności, przedziały i moduł

Zbiór liczb naturalnych $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ oznaczamy literą $\mathbb{N}$ z jedną kreską podwójną. Bywają różne umowy – niektórzy włączają do tego zbioru zero, inni nie. Na tym wykładzie ten zbiór będzie bez zera:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Zapis $k \in \mathbb{N}$ czytamy: „k należy do zbioru liczb naturalnych", albo „k jest liczbą naturalną". Zbiór liczb naturalnych jest *zamknięty względem dodawania i mnożenia*, tzn. suma i iloczyn liczb naturalnych jest liczbą naturalną, podobnie jest *zamknięty względem potęgowania*, tzn. potęga, w której podstawie i wykładniku są liczby naturalne, też jest liczbą naturalną. Zbiór $\mathbb{N}$ natomiast nie jest zamknięty względem odejmowania.

Po dołączeniu zera i liczb ujemnych mamy **zbiór liczb całkowitych**:

$$\mathbb{Z} = \{... - 4, -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, ...\}.$$

Uwaga: w oznaczeniu nie ma litery „c" lecz „z". To prawdopodobnie wzięło się z niemieckiego słowa *Zahlen* = liczby. Zbiór liczb całkowitych jest zamknięty względem dodawania, odejmowania i mnożenia, ale nie względem dzielenia.

Dlatego rozważa się wszystkie liczby, które są ilorazami liczb całkowitych: $r = a/b$, gdzie a jest liczbą calkowitą, zaś b liczbą naturalną. Otrzymujemy w ten sposób **zbiór liczb wymiernych** oznaczany literą Q od łacińskiego *quotient* = ile razy:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} :\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \right\}.$$

Tę samą liczbę wymierną można zapisać jako iloraz na wiele różnych sposobów, na przykład

$$\frac{-5}{9} = \frac{-10}{18} = \frac{-15}{27}, \quad \text{itd.}$$

Iloraz a/b nazywa się **nieskracalny**, jesli liczby a i b nie mają wspólnego dzielnika naturalnego różnego od jedynki. W podanym przykładzie iloraz $-5/9$ jest nieskracalny. Zbiór liczb wymiernych jest zamknięty względem dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia – nie wolno jedynie dzielić przez zero.

Istnieją jednak liczby, które nie są wymierne, na przykład liczba π, która jest stosunkiem długości obwodu okręgu do jego średnicy. Nazywana jest ona czasem **stałą Ludolfa** albo **ludolfiną** od imienia matematyka holenderskiego, który w 1610 roku wyznaczył jej przybiżenie z dokładnością do 22 miejsc rozwinięcia dziesiętnego. [Ludolph van Ceulen (1540–1610) – profesor nauk matematycznych i fortyfikacyjnych uniwersytetu w Lejdzie.] Zbiór liczb wymiernych nie jest zamknięty względem potęgowania – jesliwykladnik potęgi jest ułamkiem nieskracalym do liczby całkowitej, tonależy liczyć pierwiastek, np. $3^{1/2} = \sqrt{3}$, a nie wszystkiepierwiastki z liczb wymiernych są wymierne.

PRZYKŁAD 1. Pokażemy, że liczba $\sqrt{3}$ nie jest wymierna.

D o w ó d nie wprost. Załóżmy, że istnieje jakaś liczba wymierna a/b taka, że $(a/b)^2 = 3$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, przy czym iloraz a/b jest nieskracalny. Mnożymy obie strony tej równości przez b^2:

$$a^2 = 3b^2. \tag{1.1}$$

Patrząc na tę równość uważnie spostrzegamy, że prawa strona jest liczbą podzielną przez 3. To samo musi dotyczyć lewej strony, a można to zapewnić tylko w jeden sposób – liczba a musi być podzielna przez 3. (Jeśli trójka jest raz w rozkładzie a^2 na czynniki, to musi być też dugi raz, bo wszystkie liczby pierwsze występują tam po dwa razy.) Zapiszmy to $a = 3k$, $k \in \mathbb{N}$ i wstawmy do (1.1):

$$9k^2 = 3b^2,$$

Stąd dostajemy

$$3k^2 = b^2.$$

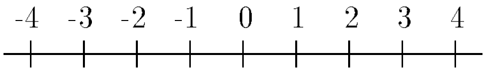
Teraz lewa strona jest podzielna przez 3, co można zapewnić tylko przyjmując, że b jest podzielne przez trzy: $b = 3l$, $l \in \mathbb{N}$.

W ten sposób pokazalismy, że a i b obie muszą być liczbami podzielnymi przez trzy, a na początku założyliśmy, że iloraz a/b jest nieskracalny. Ta sprzeczność pokazuje, że nasze założenie, iż istnieje liczba wymierna, której kwadrat wynosi 3, jest niemożliwe do spełnienia. To dowodzi, że $\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną. ■

Podobnie dowodzi się, że pierwiastek z każdej liczby pierwszej jest niewymierny. O tym, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną, wiedzieli już starożytni Grecy.

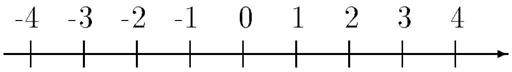
Na końcu dowodu pojawił się kwadracik, który nazywamy **znakiem Halmosa** od nazwiska współczesnego matematyka amerykańskiego Paula R. Halmosa. Ten znak zastępuje słowa „co należało pokazać”.

Jeśli chcemy znajdować pierwiastki kwadratowe przynajmniej dla liczb nieujemnych, to musimy rozszerzyć zbiór liczb. Rozwiązaniem tego i wielu innych problemów jest **zbiór liczb rzeczywistych** oznaczany literą $\mathbb{R}$ z jedną kreską podwójną. Ścisłą definicję tego zbioru można znaleźć w podręcznikach Kuratowskiego i Kołodzieja. Ważne jest to, że zbiór liczb rzeczywistych da się przedstawić przez rysowanie linii prostej zwanej **prostą rzeczywistą** albo **osią liczbową**. Zaznaczamy na niej punkt nazywany **zerem** 0, najczęściej na środku, ale nie zawsze. W równych odstępach na lewo i na prawo zaznaczamy inne punkty dopisując przy nich liczby całkowite – na prawo dodatnie, na lewo ujemne, patrz Rys. 1.1.



Rysunek 1.1

Często dopisuje się na prostej strzałkę, która ma wyróżniać stronę dodatnią osi liczbowej, patrz Rys. 1.2.



Rysunek 1.2

Liczba rzeczywista, której nie można przedstawić jako iloraz liczb całkowitych, nazywa się **niewymierna**. Między liczbami całkowitymi możemy zaznaczyć dowolny ułamek, np. $7/2$ jest w połowie między 3 i 4. Łatwo jest zaznaczyć liczbę niewymierną jak π czy $\sqrt{2}$ – w tym celu wykorzystujemy **rozwinięcie dziesiętne** takiej liczby. Każda liczba rzeczywista ma rozwinięcie dziesiętne, np. $\pi = 3,141\,592\,653\,589\,793...$ albo $\sqrt{2} = 1,414\,213\,56\ldots$. Wielokropek jest bardzo ważny – mówi on, że rozwinięcie nie kończy się tam, gdzie przerwaliśmy zapis. Gdyby rozwinięcie dziesiętne gdzieś się kończyło, to liczba byłaby wymierna. Przerwane rozwinięcie dziesiętne jest **przybliżeniem** danej liczby.

Liczby bardzo duże albo bardzo małe wygodnie jest zapisywać w **konwencji naukowej**, co oznacza zapisanie w postaci iloczynu liczby położonej między 1 a 10 oraz potęgi dziesieciu, tzn. jako $a \cdot 10^n$, gdzie $1 \leq a \leq 10$ i $n \in \mathbb{Z}$. Zaletą tej konwencji jest unikanie dużej liczby zer, na przykład 1 540 000 000 można zgrabniej zapisać jako $1,54 \cdot 10^9$ albo 0,000 000 000 003 7 jako $3,7 \cdot 10^{-12}$. Inną zaletą jest to, że liczba cyfr znaczących jest jasna z samego zapisu. Na przykład wynik pomiaru zapisany jako 2000 nie jest jasny, ale $2,00 \cdot 10^3$ mówi, że są tu trzy cyfry znaczące, a niepewność pomiarowa jest na ostatnim miejscu.

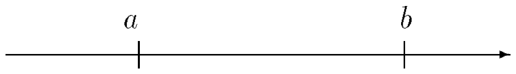
Zapis $A \subset B$ czytamy: A jest podzbiorem B. Dzięki temu zapisowi możemy krótko wyrazić to, że poznane kolejno zbiory liczbowe są coraz większe:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset Q \subset \mathbb{R},$$

czyli każdy następny jest rozszerzeniem poprzedniego. Zbiór $\mathbb{R}$, podobnie jak i Q, jest zamknięty względem dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia – nie wolno jedynie dzielić przez zero. Możliwe jest też potęgowanie z wykluczeniem podstaw ujemnych przy wykładnikach niecałkowitych.

Jedną ze szczególnych własności liczb rzeczywistych jest istnienie pojęcia **porządku** oznaczającego, że dla dowolnych dwóch różnych liczb rzeczywistych jedna z nich jest mniejsza od drugiej. Używamy konwencjonalnych symboli: $a < b$ czytamy: a jest mniejsze od b, $b > a$ czytamy: b jest większe od a. Oba zapisy znaczą to samo, a nazywamy je **nierównościami ostrymi**. Dalej, $a \leq b$ czytamy: a jest mniejsze lub równe b albo a jest nie większe od b; $b \geq a$ czytamy: b jest większe lub równe a albo b jest nie mniejsze od a. Oba zapisy znaczą to samo, a nazywamy je **nierównościami słabymi**.

Po umieszczeniu wspomnianych liczb a i $b > a$ na osi liczbowej powiemy, że liczba a jest na lewo od liczby b, patrz Rys. 1.3. Jeśli $a < 0$, to mówimy, że liczba a jest **ujemna**, jeśli $a > 0$, to a jest **dodatnia**. Zero nie jest liczbą ani dodatnią ani ujemną. Nie ma liczby, która byłaby zarazem dodatnia i ujemna. Jeśli $a \leq 0$, to mówimy, że liczba a jest **niedodatnia**, jeśli $a \geq 0$, to a jest **nieujemna**. Jedyną liczbą a, która jest zarazem niedodatnia i nieujemna, jest zero.



Rysunek 1.3

Będziemy wykorzystywać następujące własności nierówności:

Własności nierówności

a) jeśli $a < b$ i $b \leq c$, to $a < c$ – nierówność jest **przechodnia**, a zwycięża nierówność ostra;

b) jeśli $a \leq b$ i $b \leq a$, to $a = b$;

c) jeśli $a < b$ i $c \leq d$, to $a + c < b + d$ – zgodne nierówności można dodawać stronami, a „zwycięża" nierówność ostra;

d) jeśli $a \leq b$ i $c \leq d$, to $a + c \leq b + d$ – zgodne nierówności słabe można dodawać stronami;

e) jeśli $a < b$, to $a + c < b + c$ dla każdej liczby $c \in \mathbb{R}$ – do obu stron nierówności można dodać tę samą liczbę;

f) jeśli $a < b$ i $c > 0$, to $ac < bc$ – nierówność zachowuje zwrot, jeśli ją pomnożyć stronami przez liczbę dodatnią;

g) jeśli $a < b$ i $c < 0$, to $ac > bc$ – nierówność zmienia zwrot na przeciwny, jeśli ją pomnożyć stronami przez liczbę ujemną;

h) jeśli $0 < a < b$, to $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; jeśli $a < b < 0$, to $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ – odwrotności liczb tego samego znaku spełniają nierówność przeciwnego zwrotu, niż same liczby;

i) $a^2 \geq 0$ dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$.

Wykorzystując własności f) i g) możemy pokazać, że jeśli obie liczby a i b są tego samego znaku, to zachodzi $ab > 0$. Ponadto jeśli jedna z tych liczb jest dodatnia, a druga ujemna, to zachodzi $ab < 0$,. To z kolei oznacza, że iloczyn ab może być zerem tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z czynników jest zerem.

Jeśli mamy dwie nierówności o tym samym zwrocie z jedną liczbą powtarzającą się: $a < b$ oraz $b < c$, to zapisujemy je w jednym ciągu: $a < b < c$.

Liczby rzeczywiste mają ciekawą własność: między każdymi dwiema różnymi liczbami rzeczywistymi a, b – niech będzie $a < b$ - znajdzie się liczba wymierna r: $a < r < b$ oraz niewymierna c: $a < c < b$¿.

Bardzo pożyteczna jest pewna nierówność znana pod nazwą **nierówności Bernoullego** zawarta w następującym Lemacie. [Jacob Bernoulli (1654–1705) – matematyk szwajcarski, jeden z siedmiu o tym samym nazwisku.]

Lemat 1. Dla $x > -1$, $x \neq 0$, $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ zachodzi

$$(1 + x)^n > 1 + nx. \tag{1.2}$$

D o w ó d przez indukcję względem n. Pierwszy krok: podstawiamy najmniejszą wartość n, czyli 2:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2.$$

Skoro dla $n \neq 0$ mamy $x^2 > 0$, to po opuszczeniu wyrazu x^2 wyrażenie staje się mniejsze:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x.$$

Nierówność (1.2) jest udowodniona dla $n = 2$.

Drugi krok: zakładamy prawdziwość wzoru dla $n = k$ i dowodzimy go dla $k + 1$:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x).$$

Korzystamy z założonej prawdziwości wzoru dla $n = k$:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) > (1+kx)(1+x).$$

Dla zachowania zwrotu nierówności przy mnożeniu przez $(1+x)$ potrzebne jest założenie $x > -1$, czyli $(1+x) > 0$. Mamy więc

$$(1+x)^{k+1} > 1 + kx + x + kx^2 = 1 + (k+1)x + kx^2.$$

Skoro $x^2 > 0$ i $k > 0$, to opuszczenie wyrazu kx^2 zmniejsza całe wyrażenie:

$$(1+x)^{k+1} > 1 + (k+1)x.$$

Wykazaliśmy prawdziwość nierówności (1.2) dla $n = k + 1$. ■

Gdybyśmy dołączyli $n = 1$ lub $x = 0$, wtedy nierówność byłaby słaba.

Ważnym pojęciem jest **wartość bezwzględna** albo **moduł** liczby a zapisywany $|a|$. Jest on „rozmiarem” liczby i zawsze jest **nieujemny**. W symbolach zapisujemy

$$|a| = \begin{cases} a & \text{gdy} \quad a \geq 0, \\ -a & \text{gdy} \quad a < 0. \end{cases}$$

Tak więc $|3| = 3$, $|-3| = 3$ oraz $|0| = 0$. Jest mniej jasnym, co zrobić z $|\sqrt{12} - 4|$, ale jeśli zauważymy, że $4^2 = 16 > 12$, to zobaczymy, że $4 > \sqrt{12}$. Jeśli odejmiemy 4 od obu stron tej nierówności, to otrzymamy $0 > \sqrt{12} - 4$, więc liczba $\sqrt{12} - 4$ jest ujemna, stąd jej moduł wynosi

$$|\sqrt{12} - 4| = -(\sqrt{12} - 4) = 4 - \sqrt{12}.$$

Często będziemy napotykać nierówności zawierające wartość bezwzględną. Jednym z najczęstszych typów takich nierówności jest $|x| < c$.

Lemat 2. Nierówność $|x| < c$ oznacza dokładnie to samo, co dwie nierówności $-c < x < c$.

D o w ó d. W tym lemacie liczba c musi być dodatnia: $c > 0$. Jeśli $x \geq 0$, to wiemy, że $|x| = x$, więc wtedy nierówność $|x| < c$ oznacza

$$x < c. \tag{1.3}$$

Poza tym dla $c > 0$ mamy $-c < 0$, więc liczba ujemna c jest mniejsza od nieujemnej x:

$$-c < x. \tag{1.4}$$

Łącząc (1.3) z (1.4) możemy napisać

$$-c < x < c. \tag{1.5}$$

Jeśli $x < 0$, to wiemy, że $|x| = -x$, więc wtedy nierówność $|x| < c$ oznacza $-x < c$ albo $x > -c$, czyli

$$-c < x. \tag{1.6}$$

Poza tym liczba ujemna x jest mniejsza od dodatniej c:

$$x < c. \tag{1.7}$$

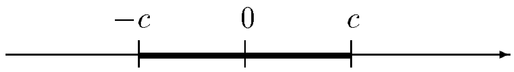
Łącząc (1.6) z (1.7) możemy napisać

$$-c < x < c. \tag{1.8}$$

Razem wziąwszy znajdujemy, że

$$|x| < c \quad \Leftrightarrow \quad -c < x < c. \quad \blacksquare \tag{1.9}$$

Zbiór wszystkich liczb x spełniających ten warunek można zaznaczyć na osi liczbowej jako odcinek między $-c$ a c, patrz Rys. 1.4.



Rysunek 1.4

Istnieje wyjątkowo ważna nierówność zawierająca moduły – nazywa się ona **nierównością trójkąta**.

Twierdzenie 1 o nierówności trójkąta.
Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

D o w ó d. Skoro liczba a jest równa $|a|$ lub $-|a|$, to spełnia takie dwie nierówności: $-|a| \leq a \leq |a|$. Podobnie zachodzi $-|b| \leq b \leq |b|$. Dodajemy te dwie pary nierówności stronami:

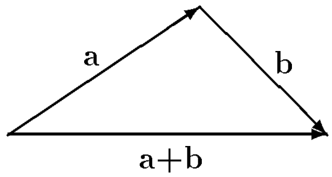
$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Można to zapisać inaczej

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Powołując się na zdanie (1.9) możemy więc napisać nierówność $|a + b| \leq |a| + |b|$. $\blacksquare$

Nazwa tej nierówności wzięła się stąd, że w przypadku wektorów na płaszczyźnie wektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ oraz $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ można uważać za trzy boki jednego trójkąta i wtedy owa nierówność mówi, że długość jednego boku $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ jest nie większa od sumy długości $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ pozostałych dwóch boków, patrz Rys. 1.5.



Rysunek 1.5

Można wyprowadzić następujący wniosek z nierówności trójkąta:

Lemat 3. Dla dowolnych liczb rzeczywistych zachodzi

$$|a-b| \geq |\,|a|-|b|\,|. \tag{1.10}$$

D o w ó d na ćwiczeniach.

Zbiór liczb rzeczywistych dodatnich oznaczamy $\mathbb{R}^+$:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\};$$

zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych oznaczamy $\mathbb{R}_+$:

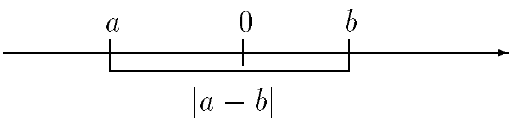
$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\}.$$

Przypomnę teraz pewne ustalenia terminologiczne. **Pierwiastkiem n-go stopnia** z liczby $a \in \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ nazywamy każde rozwiązanie równania $x^n = a$. Dla n parzystych oraz $a > 0$ istnieją po dwa pierwiastki o przeciwnych znakach. **Pierwiastkiem arytmetycznym n-go stopnia** z liczby $a \in \mathbb{R}_+$ dla $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ nazywamy nieujemne rozwiązanie równania $x^n = a$; oznaczamy je symbolem bardzo zniekształconej litery V: $x = \sqrt[n]{a}$. Dla $n = 2$ pomija się cyferkę 2 w tym symbolu: $x = \sqrt{a}$.

Po tych ustaleniach możemy wrócić do wartości bezwzględnej. Z własności i) przy nierównościach wiemy, że $a^2 \geq 0$ dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$. Wobec tego możemy wyliczać pierwiastek arytmetyczny z liczby a^2. Skoro $\sqrt{a^2} \geq 0$, to możemy napisać

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad \text{dla każdej liczby } a \in \mathbb{R}.$$

Wartość bezwzględna może też opisywać odległości. Jeśli $a, b \in \mathbb{R}$, to $|a-b|$ jest **odległością** między punktami a i b na osi rzeczywistej, patrz Rys. 1.6.



Rysunek 1.6

PRZYKŁAD 1. Rozważmy zbiór opisany jako

$$A = \{x : |x-2| \leq 3\}. \tag{1.11}$$

Możemy go przeczytać tak: „zbiór punktów x odległych od 2 nie więcej niż o 3”. Według wzoru (1.9) warunek $|x-2| \leq 3$ oznacza $-3 \leq x-2 \leq 3$. Do tych dwóch nierówności dodajemy stronami 2, co daje $-1 \leq x \leq 5$, w takim razie zbiór (1.22) możemy zapisać inaczej:

$$A = \{x : -1 \leq x \leq 5\}.$$

Rysunek 1.7

Jeśli $a < b$, to zbiór wszystkich punktów leżących między a i b nazywa się **przedziałem**, zob. Rys. 1.7. Punkty a i b nazywają się **końcami przedziału**; a – **lewym końcem**, b – **prawym**. Ważne jest ustalenie, czy końce należą do przedziału. Przedział z należącymi do niego obydwoma końcami nazywa się **domknięty**, przedział bez końców nazywa się **otwarty**.
Przedział domknięty zawarty między punktami a i b oznaczamy $\langle a, b\rangle$ z nawiasami kanciastymi, przedział otwarty oznaczamy (a, b) z nawiasami półokrągłymi. W symbolach zapiszemy to:

$$\langle a, b\rangle = \{x : \; a \leq x \leq b\}, \qquad (a, b) = \{x : \; a < x < b\}.$$

Czasami trzeba rozważać **przedziały półotwarte**, czyli zawierające jeden koniec, a nie zawierające drugiego. Można to zapisać symbolicznie:

$$\langle a, b) = \{x : \; a \leq x < b\}, \qquad (a, b\rangle = \{x : \; a < x \leq b\}.$$

Jest jeszcze inny typ przedziałów zwanych **nieskończonymi**. Mamy oznaczenie $\langle a, \infty)$ na „przedział", którego lewym końcem jest a, a prawego końca nie ma. Symbol ∞ nie jest liczbą rzeczywistą; nazywamy go **nieskończonością** i niezmiernie ważnym jest, aby pamiętać, że nie jest on liczbą. Właśnie dlatego przy symbolu nieskończoności stoi nawias półokrągły. Mamy następujące przedziały nieskończone:

$$\langle a, \infty) = \{x : \; x \geq a\}, \qquad (a, \infty) = \{x : \; x > a\},$$

$$(-\infty, a\rangle = \{x : \; x \leq a\}, \qquad (-\infty, a) = \{x : \; x < a\},$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

Znając pojęcie przedziału możemy zbiór A z Przykładu 1 nazwać przedziałem i napisać

$$A = \{x : |x - 2| \leq 3\} = \langle -1, 5\rangle.$$

Zbiór liczb rzeczywistych ma ważną własność znaną pod nazwą **zasada ciągłości** lub **zasada Dedekinda**. [Richard Julius Wilhelm Dedekind (1831–1916) – matematyk niemiecki, twórca podstaw ścisłej teorii liczb rzeczywistych.] Brzmi ona następująco: jeśli zbiór $\mathbb{R}$ podzielimy na dwa niepuste zbiory A i B w taki sposób, że każda liczba należąca do A jest mniejsza od każdej liczby należącej do B oraz $A \cup B = \mathbb{R}$, to zachodzi jedna z dwóch wykluczających się możliwości: albo w A istnieje liczba największa, albo w B istnieje liczba najmniejsza. Innymi słowy, jeśli linię prostą podzielimy na dwie części tak, aby każdy punkt z A leżał na lewo od punktu z B, to albo istnieje ostatni punkt w A, albo pierwszy w B. Nie może być luki w dokonanym „przekroju" prostej $\mathbb{R}$.

Takiej własności nie ma zbiór liczb wymiernych. Jeśli np. podzielić zbiór Q na dwa podzbiory, zaliczając do zbioru A liczby mniejsze od $\sqrt{2}$, a do zbioru B pozostałe, czyli większe od $\sqrt{2}$, to każda liczba z A jest mniejsza od każdej liczby z B, ale nie ma liczby wymiernej największej w A lub najmniejszej w B. To wynika z możliwości przybliżania liczby niewymiernej przez liczby wymierne, np. przez rozwinięcie dziesiętne.

Wprowadzamy nowe symbole. **Kwantyfikator szczegółowy** albo **mały** $\exists$ należy czytać: „istnieje” – jest to odwrócona litera E od angielskiego słowa *exists* = istnieje. **Kwantyfikator ogólny** albo **duży** $\forall$ należy czytać: „dla każdego” – jest to odwrócona litera A od angielskiego *all* = wszystkie. Jeśli w zdaniu z takimi symbolami napotkamy dwukropek, to trzeba go czytać: „zachodzi”. Trzeba dodać, że to są oznaczenia międzynarodowe. Istnieją jeszcze oznaczenia polskie, w których kwantyfikator mały jest literą V, zaś duży odwróconą literą V.

Mówimy, że zbiór A liczb rzeczywistych jest **ograniczony z góry**, jeśli

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \;\; \forall\, x \in A \,:\, x \leq M.$$

Ową liczbę M nazywamy **ograniczającą z góry**. Zbiór A nazywa się **ograniczony z dołu**, jeśli

$$\exists\, m \in \mathbb{R} \;\; \forall\, x \in A \,:\, m \leq x.$$

Liczbę m nazywamy **ograniczającą z dołu**. Zbiór liczb rzeczywistych ma ważną własność.

Twierdzenie 2. Jeśli niepusty zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry, to istnieje najmniejsza liczba ograniczająca go z góry. Jeśli niepusty zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z dołu, to istnieje największa liczba ograniczająca go z dołu.

Skoro nie podałem ścisłej definicji liczb rzeczywistych, to siłą rzeczy nie mogę przedstawić dowodu tego twierdzenia. Po dowód odsyłam w książki Kazimierza Kuratowskiego, str. 14. Najmniejsza liczba ograniczająca zbiór A z góry nazywa się **kresem górnym** zbioru i oznaczana jest $\sup A$ z łacińskiego *supremum* = najwyższe, ostatnie. Największa liczba ograniczająca z dołu nazywa się **kresem dolnym** zbioru. Oznacza się go $\inf A$ z łac. *infimum* = najniższe, najlichsze. Istnienie kresów jest cechą zbioru liczb rzeczywistych, liczby wymierne nie mają własności opisanej w tym twierdzeniu.

Kresy górne i dolne czasami należą, a czasami nie należą do zbioru. Przykładowo przedział otwarty (a, b) jako kres dolny ma liczbę a, czyli $\inf (a, b) = a$, zaś jako kres górny liczbę b, tzn. $\sup (a, b) = b$. Widzimy, że te kresy nie należą do zbioru. Przedział domknięty $\langle a, b\rangle$ ma takie same oba kresy, które tym razem należą do zbioru.

PRZYKŁAD 2. Rozważmy zbiór

$$A = \{1/n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

Jest on ograniczony z góry i z dołu. Z góry przez jeden, a z dołu przez zero. Jeden jest najmniejszą liczbą ograniczającą z góry, więc jest kresem górnym tego zbioru: $\sup A = 1$. Kres górny należy do zbioru, bo $1 = \frac{1}{n}$ dla $n = 1$. Zero jest największą liczbą ograniczającą z dołu, bo dla dowolnie małej liczby $\epsilon > 0$ już można znaleźć liczbę $\frac{1}{n}$ mniejszą od ϵ. Taka liczba ϵ nie może więc być ograniczającą z dołu. W takim razie $\inf A = 0$. Kres dolny nie należy do zbioru, bo nie znajdziemy takiego $n \in \mathbb{N}$, żeby $0 = 1/n$.

Zbiór A nazywa się **ograniczony**, jeśli

$$\exists\, K > 0 \;\; \forall\, x \in A \,:\, |x| \leq K.$$

Zbiór A z poprzedniego przykładu jest ograniczony, bo taką liczbą K dla niego jest jedynka.

1.2 Funkcje i wykresy

Ze szkoły średniej powinny być znane wielomiany. Wielomian $p(x)$ można wyliczyć dla każdej wartości x. Na przykład dla $p(x) = x^3 - 2x + 7$ dostajemy $p(2) = 1^3 - 2 \cdot 1 + 7 = 6$. Można to uważać za przepis, jak jednej liczbie rzeczywistej x przypisać inną liczbę rzeczywistą $p(x)$. Mówimy, że jest to **odwzorowanie** albo **funkcja** i piszemy $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mogą być funkcje inne niż wielomiany, ale też przypisujące liczbom rzeczywistym liczby rzeczywiste:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

W tym zapisie odróżnia się symbole f oraz $f(x)$ – tutaj f jest funkcją, albo odwzorowaniem, natomiast $f(x)$ jest **wartością funkcji** w punkcie x. Symbol x nazywa się **zmienną niezależną** albo **argumentem funkcji**. Możemy na przykład mieć dwa różne wielomiany p, q, tzn. $p \neq q$ i pisać równość $p(x) = q(x)$, która nie musi być spełniona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Taka równość staje się równaniem, które trzeba rozwiązać, czyli znaleźć wszystkie x takie, że równość jest spełniona. Natomiast równość funkcyj $f = g$ oznacza, że zachodzi równość ich wartości $f(x) = g(x)$ dla wszystkich argumentów x.

Mogą być funkcje, których nie można określić dla wszystkich rzeczywistych argumentów, wtedy trzeba podać **zbiór argumentów** Jeśli ten zbiór oznaczymy literą X, to zapiszemy:

$$f : X \to \mathbb{R}.$$

Funkcje wymierne, tzn. ilorazy dwóch wielomianów $f(x) = p(x)/q(x)$ nie mogą mieć wśród swoich argumentów takich x, że mianownik się zeruje, tzn. $q(x) = 0$.

Ogólnie **funkcją** f **odwzorowującą zbiór** X **<u>w zbiór</u>** Y nazywamy zbiór par uporządkowanych (x, y) takich, że $x \in X$, $y \in Y$ oraz dla każdego elementu $x \in X$ istnieje dokładnie jeden element $y \in Y$ oznaczany symbolem $f(x)$. Pisze się wtedy

$$f : X \to Y$$

lub

$$X \ni x \to y \in Y.$$

Zbiór X, oznaczany także D_f, nazywa się **dziedziną** funkcji lub **zbiorem argumentów**, zbiór Y nazywa się **przeciwdziedziną** funkcji. Podzbiór $R_f \subset Y$ złożony z tych elementów $y \in Y$, dla których istnieje $x \in X$ taki, że $y = f(x)$, nazywa się **obrazem** funkcji albo **zbiorem wartości** funkcji. UWAGA: Przeciwdziedzina i zbiór wartości funkcji to są różne zbiory – przeciwdziedzina jest większa, bo jest podawana jakby na wyrost. Zbiór wartości to – jak sama nazwa wskazuje – liczby naprawdę przyjmowane przez funkcję.

> PRZYKŁAD 1. Funkcja artytmetyczny pierwiastek kwadratowy jako swoją dziedzinę ma zbiór $\mathbb{R}_+$, jako przeciwdziedzinę zbiór $\mathbb{R}$, a jako obraz – znowu zbiór $\mathbb{R}_+$.

> PRZYKŁAD 2. Funkcja g dana wzorem $g(x) = \sqrt{1 - 2x}$ ma sens tylko wtedy, gdy $1 - 2x \geq 0$ czyli gdy $x \leq \frac{1}{2}$, więc za dziedzinę ma zbiór $D_g = (-\infty, \frac{1}{2}\rangle$. Obrazem tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R}_+$.

Jeśli obraz funkcji jest identyczny z całą przeciwdziedziną. tzn. jeśli każdy element $y \in Y$ jest wartością f dla pewnego $x \in D_f$, to mówi się, że funkcja f jest **nakładająca** albo **suriektywna**, albo **odwzorowuje zbiór** D_f **<u>na zbiór</u>** Y.

PRZYKŁAD 3. Funkcja $f: \ x \mapsto x^2$ odwzorowuje $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$, ale nie jest nakładająca; natomiast po zmianie przeciwdziedziny na $\mathbb{R}_+$ staje się nakładająca, bo odwzorowuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}_+$.

Bywają funkcje określone jednym wzorem dla pewnych wartości argumentu, a innym wzorem dla innych wartości, na przykład

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \sqrt{2} & \text{gdy} \quad x \leq 3, \\ \frac{1}{x^2-4} & \text{gdy} \quad x > 3. \end{cases}$$

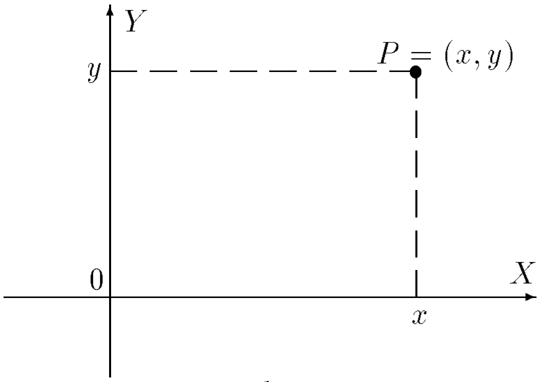
Inną funkcją określoną dwoma wzorami jest $g(x) = |x|$.

Jeśli dla każdego $y \in R_f$ istnieje tylko jeden $x \in D_f$ taki, że $y = f(x)$, to mówimy, że funkcja f jest **wzajemnie jednoznaczna** albo **różnowartościowa**, albo **iniektywna**.

PRZYKŁAD 3a. Funkcja $f: \ x \mapsto x^2$ jako odwzorowanie $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}_+$ nie jest wzajemnie jednoznaczna, bo zachodzi tożsamość $x^2 = (-x)^2$.

PRZYKŁAD 4. Funkcja $f: \ x \mapsto x^3$ jako odwzorowanie $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ jest zarazem nakładająca i wzajemnie jednoznaczna.

Przypomnimy teraz, jak opisuje się punkty na płaszczyźnie poprzez ich współrzędne. Zaczynamy od linii poziomej, którą nazywamy **osią** X, oraz linii pionowej, którą nazywamy **osią** Y. Punkt przecięcia obu osi nazywa się **początkiem układu współrzędnych**. Położenie dowolnego punktu P na płaszczyźnie można opisać podając uporządkowaną parę (x, y) liczb rzeczywistych. Aby znaleźć odpowiedni punkt mając parę liczb, wychodzimy od początku układu, przesuwamy się o $|x|$ jednostek wzdłuż osi X w prawo dla dodatniego x, a w lewo dla ujemnego x. Potem posuwamy się o $|y|$ jednostek pionowo w górę dla dodatniego y lub w dół dla ujemnego y, patrz Rys. 1.9.



Rysunek 1.9

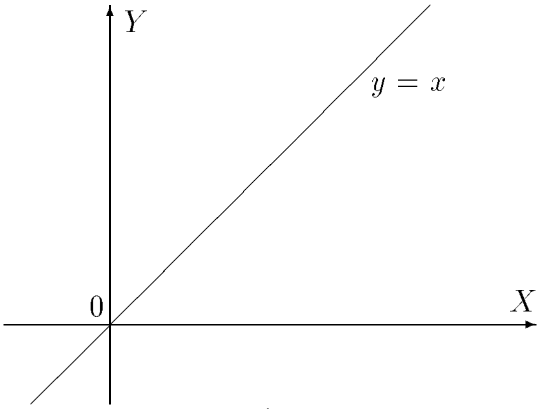
Tak rozumiane liczby x, y nazywają się **współrzędnymi kartezjańskimi** punktu P na cześć Kartezjusza, który zaproponował taką zamianę punktu z płaszczyzny na parę liczb. [René Descartes (1596-1650) zwany też Kartezjuszem, filozof, matematyk, fizyk i fizjolog francuski, uważany za twórcę geometrii analitycznej.]

Niech f będzie funkcją. Dla każdego $x \in D_f$ mamy wartość funkcji $f(x)$. Jeśli przyjmiemy tę wartość za współrzędną y, to możemy znaleźć odpowiedni punkt na płaszczyźnie. Innymi słowy, przyjmując $y = f(x)$ dostajemy punkt $(x, y) = (x, f(x))$ na płaszczyźnie. Wszystkie takie punkty mogą się układać w linię krzywą:

$$\{(x, y): \ x \in D_f, y = f(x)\},$$

którą nazywamy **wykresem** funkcji f.

PRZYKŁAD 5. Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = x$ nazywamy **funkcją tożsamościową** albo **identycznością**. Jej wykresem jest linia prosta przechodząca przez początek układu oraz ćwiartkę pierwszą i trzecią, patrz Rys. 1.10

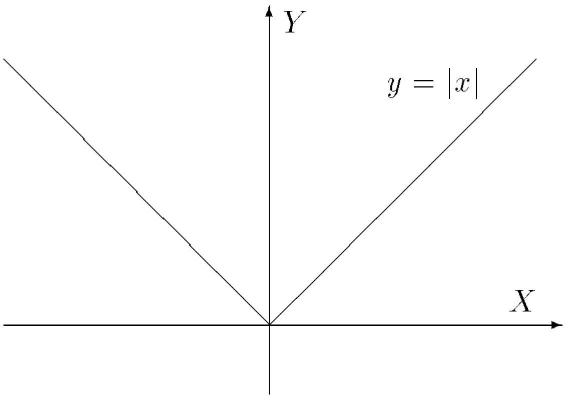


Rysunek 1.10

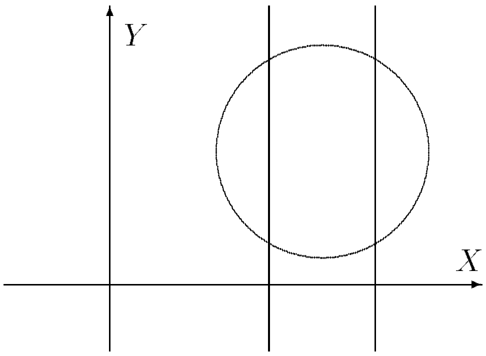
PRZYKŁAD 6. Funkcja $f : \ x \to |x|$ jest przykładem funkcji zadanej dwoma wzorami:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{gdy} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{gdy} \quad x < 0. \end{cases}$$

Wobec tego jej wykres będzie się składać z dwóch kawałków: półprostej $y = x$ dla $x \geq 0$ oraz półprostej $y = -x$ dla $x < 0$, więc wygląda tak, jak na Rys. 1.11.



Rysunek 1.11



Rysunek 1.12

Na wykresie funkcji nie może być więcej niż jeden punkt na każdej prostej pionowej. Po tym spostrzeżeniu mamy pewność, że okrąg nie może być wykresem funkcji, patrz Rys. 1.12. Jednak półokrąg nad średnicą równoległą do osi X już może być wykresem funkcji, patrz Rys. 1.13. Dziedziną tej funkcji jest średnica okręgu wyrzutowana na oś X – zaznaczyłem ją tam odcinkiem wytłuszczonym. Czy można tę funkcję wyrazić jakimś wzorem? Tak, wystarczy wyjść od równania okręgu o promieniu r i środku w punkcie (a, b):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

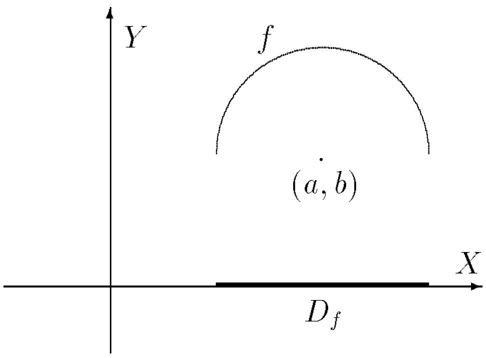
i wyliczyć stąd y:

$$(y-b)^2 = r^2 - (x-a)^2,$$

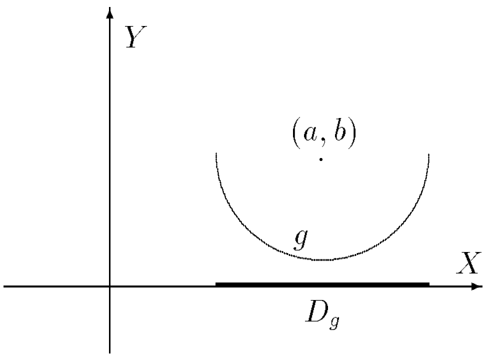
$$y - b = \sqrt{r^2 - (x-a)^2},$$

$$y = b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2}.$$

Zatem $f(x) = b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$, a dziedziną tej funkcji jest przedział $D_f = \langle a - r,\, a + r\rangle$. Z tego samego okręgu ukazanego na Rys. 1.12 można utworzyć wykres innej funkcji, mianowicie $g(x) = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$ z dziedziną tą samą co przedtem, czyli $D_g = \langle a - r,\, a + r\rangle$, patrz Rys. 1.14.



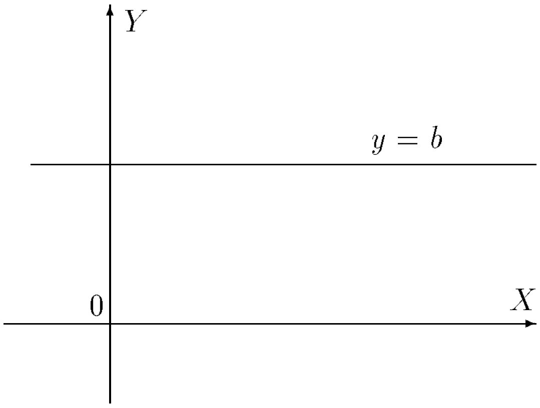
Rysunek 1.13



Rysunek 1.14

Jeśli funkcja jest wzajemnie jednoznaczna, to na jej wykresie nie może być więcej niż jeden punkt na każdej prostej poziomej. W takim razie półokrąg z Rys. 1.13 nie zadaje funkcji wzajemnie jednoznacznej.

Czy linia prosta równoległa do osi X może być wykresem funkcji? Odpowiedź brzmi: tak, gdyż to oznacza, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ wartość y jest jednakowa i wynosi, powiedzmy b. Zilustrowaliśmy to na Rys. 1.15. Jest to **funkcja stała** dana wzorem $f(x) = b = \text{const}$, z łacińskiego *constans* = stały. Z pewnością nie jest to funkcja różnowartościowa.



Rysunek 1.15

Niech $D_f \subset \mathbb{R}$; funkcja $f : D_f \to \mathbb{R}$ nazywa się **rosnąca**, jeśli dla wszystkich $x_1, x_2 \in D_f$ spełniających $x_1 < x_2$ zachodzi $f(x_1) < f(x_2)$, czyli jeśli nierówność między argumentami jest taka sama, jak między odpowiadającymi im wartościami funkcji. Można powiedzieć, że funkcja rosnąca zachowuje nierówności między argumentami. Funkcja f nazywa się **niemalejąca**, jeśli dla wszystkich $x_1, x_2 \in D_f$ spełniających $x_1 < x_2$ zachodzi $f(x_1) \leq f(x_2)$. Funkcja f nazywa się **malejąca**, jeśli dla wszystkich $x_1, x_2 \in D_f$ spełniających $x_1 < x_2$ zachodzi $f(x_1) > f(x_2)$. Można powiedzieć, że funkcja malejąca odwraca zwrot nierówności między argumentami. Funkcja nazywa się **nierosnąca**, jeśli dla wszystkich $x_1, x_2 \in D_f$ spełniających $x_1 < x_2$ zachodzi $f(x_2) \geq f(x_2)$. Funkcje niemalejące i nierosnące mają wspólną nazwę **monotonicznych**, a funkcje rosnące i malejące – **ściśle monotonicznych**.

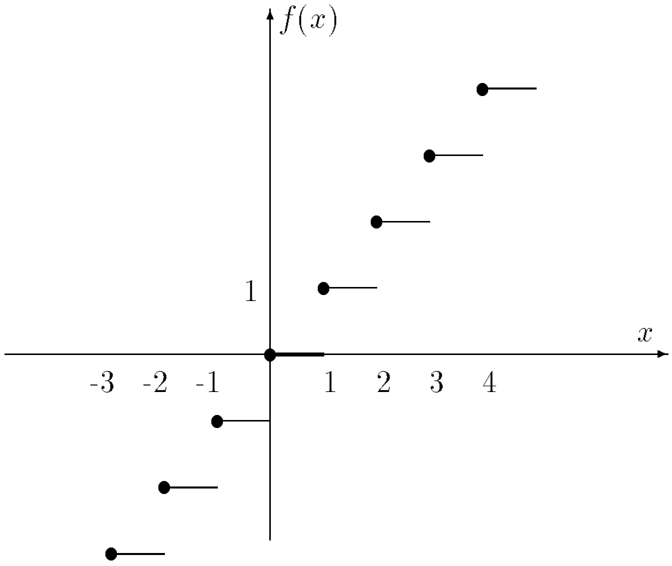
W przyszłości będzie nam potrzebna funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ o nazwie **część całkowita** albo **entier** (z francuskiego *entier* = cały, całkowity) określona zdaniem: $f(x)$ jest liczbą całkowitą spełniającą podwójną nierówność

$$f(x) \leq x < f(x) + 1.$$

Pierwsza nierówność mówi, że $f(x)$ jest liczbą całkowitą nie większą od x. Ale jest to największa liczba całkowita nie większa od x, bowiem po dodaniu do niej jedynki otrzymujemy już liczbę większą od x. Występuje oznaczenie tej funkcji za pomocą nawiasu kwadratowego: $f(x) = [x]$, więc powinniśmy napisać

$$[x] \leq x < [x] + 1. \tag{1.12}$$

Na Rys. 1.16 ukazaliśmy część wykresu tej funkcji. Kropka oznacza, że na lewym końcu przedziału funkcja ma taką samą wartość jak we wnętrzu przedziału. Zauważmy, że dla liczb z przedziału $(-1, 0)$ funkcja ta przyjmuje wartość -1, np. $[-1/2] = -1$.



Rysunek 1.16

1.2.1 Składanie funkcyj

Niech $D_f \subset \mathbb{R}$ i $D_g \subset \mathbb{R}$, niech $f : D_f \to D_g$ oraz $g : D_g \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja h jest **złożeniem** albo **superpozycją** funkcyj f i g i piszemy $h = g \circ f$, jeśli dla każdego $x \in D_f$ zachodzi

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Warunek $f : D_f \to D_g$ jest ważny, gdyż musimy mieć pewność, że funkcja g może być określona tam, gdzie funkcja f ma swoje wartości. Ten warunek można również zapisać $R_f \subset D_g$, czyli obraz funkcji f musi się mieścić w dziedzinie funkcji g. Pamiętajmy, że w złożeniu $g \circ f$ najpierw działa funkcja stojąca po prawej stronie. Przy tym funkcja f nazywa się **wewnętrzna**, a funkcja g – **zewnętrzna**. Nazwy te biorą się stąd, że w zapisie $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ funkcja f jest w środku, a g na zewnątrz.

PRZYKŁAD 7. Niech $D_f = D_g = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, wybieramy $f(x) = x + a$, $g(x) = 2x$. Obie funkcje mają za obraz i dziedzinę ten sam zbiór $\mathbb{R}$. Mamy

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + a) = 2(x + a) = 2x + 2a. \qquad (1.13)$$

Czy składanie funkcyj jest przemienne? Policzmy złożenie tych samych funkcyj, ale w przeciwnej kolejności:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x + a.$$

wynik nie jest taki sam jak w (1.13), więc już na tym przykładzie widzimy, że składanie funkcyj na ogół nie jest przemienne.

PRZYKŁAD 8. Niech $D_f = \mathbb{R}_+$, $D_g = \mathbb{R}$, wybieramy $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$. Obraz funkcji f to $R_f = \mathbb{R}_+$, więc mieści się w dziedzinie funkcji g i można tworzyć złożenie:

$$(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Otrzymaliśmy funkcję tożsamościową o dziedzinie $\mathbb{R}_+$. Obraz funkcji g to $R_g = \mathbb{R}_+$, który mieści się w dziedzinie funkcji f i można tworzyć złożenie w przeciwnej kolejności:

$$(f \circ g)(x) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Nie otrzymaliśmy funkcji tożsamościowej, ale jej dziedziną jest $\mathbb{R}$. Gdyby jednak nam zależało na funkcji tożsamościowej, to moglibyśmy zawęzić dziedzinę funkcji g i utworzyć nową funkcję $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ daną takim samym wzorem $h(x) = x^2$. W takim przypadku dostajemy

$$(h \circ f)(x) = h(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

$$(f \circ h)(x) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = x.$$

Tym razem złożenie okazało się przemienne. To nie przypadek, bo wybrane funkcje f i h są do siebie odwrotne.

Niech będzie dana funkcja f o dziedzinie $X \subset \mathbb{R}$ i obrazie $Y \subset \mathbb{R}$. Jeśli istnieje funkcja g o dziedzinie Y i obrazie X i jeśli zachodzą wzory

$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{dla} \quad x \in X \qquad \text{oraz} \qquad (f \circ g)(y) = y \quad \text{dla} \quad y \in Y, \qquad (1.14)$$

to mówimy, że funkcja f jest **odwracalna**, a funkcja g jest **odwrotna do** f i piszemy $g = f^{-1}$.

Lemat 1. Funkcja jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowa.

D o w ó d $\Longleftarrow$. Niech $f : X \to Y$ i niech $Y = R_f$. Jeśli f jest różnowartościowa, to

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2). \qquad (1.15)$$

Oznaczmy

$$f(x) = y. \qquad (1.16)$$

Warunek (1.15) oznacza, że jednemu $y \in Y$ odpowiada tylko jeden $x \in X$. Zatem przejście $y = f(x) \mapsto x$ zadaje funkcję. Oznaczmy ją literą g:

$$g : Y \to X \quad \text{oraz} \quad g(f(x)) = x \quad \text{dla} \quad x \in X. \tag{1.17}$$

Ostatnią równość możemy też zapisać $g(y) = x$. Podziałajmy na obie jej strony funkcją f:

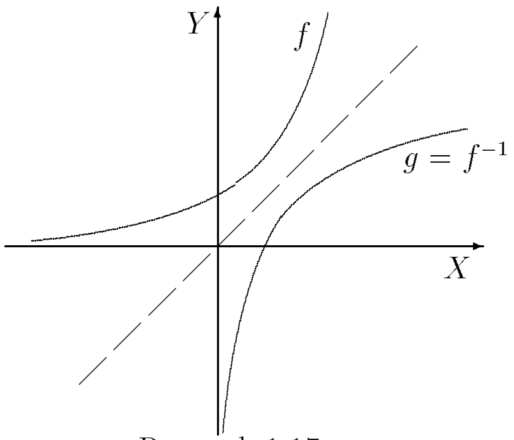
$$f(g(y)) = f(x)$$

i skorzystajmy z (1.16):

$$f(g(y)) = y \quad \text{dla} \quad y \in Y. \tag{1.18}$$

Wzory (1.17) i (1.18) składają się na wzory (1.31) więc funkcja f jest odwracalna.

D o w ó d $\Longrightarrow$. Jeśli funkcja f jest odwracalna, to istnieje funkcja odwrotna g. Wtedy nie może być $x_1 \neq x_2$ i jednocześnie $f(x_1) = f(x_2)$, bo ta równość oznaczałaby $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$. Mamy więc wynikanie $x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$ – funkcja f jest różnowartościowa. ■.

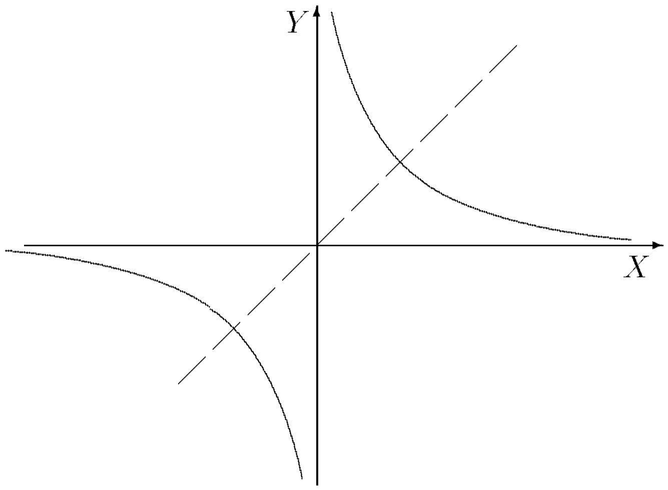


Rysunek 1.17

PRZYKŁAD 9. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$. Obrazem tej funkcji jest $R_f = \mathbb{R}^+$. Skoro rozwiązaniem równania $2^x = y$ jest logarytm: $x = \log_2 y$, to stwierdzamy, że funkcją odwrotną do wykładniczej f jest funkcja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dana wzorem $g(x) = \log_2 x$. Wykresy obu tych funkcyj pokazujemy na Rys. 1.17. Skoro funkcja odwrotna powstaje przez zamianę rolami osi X i Y, to nic dziwnego, że ich wykresy są związane poprzez odbicie względem prostej $y = x$, bo takie odbicie właśnie zamienia te osie miejscami.

PRZYKŁAD 10. Funkcja f dana wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$ ma zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ jako dziedzinę i obraz. Skoro rozwiązaniem równania $y = \frac{1}{x}$ jest $x = \frac{1}{y}$, to funkcja odwrotna jest taka sama, jak wyjściowa. Rzut oka na wykres funkcji f (Rys. 1.18) to potwierdza: wykres ten jest symetryczny wobec odbicia względem prostej $y = x$.

Istnieją więc funkcje odwrotne do samych siebie. Nazywają się one **samoodwrotnymi**.



Rysunek 1.18

Warto wspomnieć o funkcjach odwrotnych do trygonometrycznych. Na przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ sinus jest różnowartościowy, więc posiada funkcję odwrotną, nazywamy ją **arcus sinus**, co można przetłumaczyć: łuk sinusa. Po zawężeniu do odpowiednich przedziałów można wprowadzić funkcje odwrotne do pozostałych funkcyj trygonometrycznych. Warto wiedzieć, że funkcje odwrotne do trygonometrycznych, tzn. arcus sinus, arcus cosinus, arcus tangens i arcus cotanges nazywają się **funkcjami kołowymi** lub **cyklometrycznymi**.

Nazwą **funkcje elementarne** określa się wszystkie funkcje, które można otrzymać przez cztery działania arytmetyczne i przez składanie z funkcji stałej, tożsamościowej, potęgowej, wykładniczej, funkcyj trygonometrycznych oraz odwrotnych do nich.

W tym wykładzie nie będzie mowy o ciągach liczbowych. Jednak będzie nam potrzebna granica pewnego ciągu o elementach $a_n = (1 + 1/n)^n$. Dowód jego zbieżności można znaleźć w książce Kazimierza Kuratowskiego na str. 33-35. Granicę tego ciągu oznacza się literą „e” za szwajcarskim matematykiem Leonardem Eulerem (1707–1783), który tak uczynił w roku 1736. Jest to liczba niewymierna. Jej przybliżoną wartość wyliczył w 1728 roku inny Szwajcar Daniel Bernoulli (1700–1782) ze słynnego rodu matematyków, e = 2,718281828.... . Logarytmy o podstawie e nazwano **logarytmami naturalnymi**: $\log_e x = \ln x$, gdyż wyraża się przez nie pole powierzchni pod krzywą hiperboliczną $y = 1/x$. Liczbę e czasem nazywa się **stałą Nepera** na cześć Johna Nepera (albo Napiera) (1550–1617) matematyka szkockiego, który pierwszy ułożył tablice logarytmów przydatne dla badań astronomicznych. Jednakże częstsza jest nazwa **podstawa logarytmów naturalnych**.

Teraz możemy poznać pewne szczególne funkcje elementarne zwane **hiperbolicznymi**, mające za swoje dziedziny $\mathbb{R}$ albo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; **sinus hiperboliczny**:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

o dziedzinie $\mathbb{R}$, **cosinus hiperboliczny**:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

o dziedzinie $\mathbb{R}$, **tangens hiperboliczny**:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x};$$

skoro cosinus hiperboliczny nigdzie się nie zeruje, to dziedziną tej funkcji jest $\mathbb{R}$, wreszcie **cotangens hiperboliczny**:

$$\operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x};$$

sinus hiperboliczny jest zerem tylko w zerze, więc dziedziną tej funkcji jest $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Funkcja odwrotna do sinusa hiperbolicznego oznaczana jest „ar sinh" trzeba czytać „area sinus hiperboliczny"; łacińskie słowo *area* oznacza pole, plac, a chodzi o to, że funkcja odwrotna do sinusa hiperbolicznego jest polem powierzchni pod pewnym wycinkiem hiperboli, patrz I.N. Bronsztejn, K.A. Siemiendiajew *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*, § 3.11. Podobnie trzy pozostałe funkcje odwrotne do hiperbolicznych oznaczane są „ar cosh", „ar tgh" oraz „ar ctgh". Wykresy tych funkcyj poznamy na ćwiczeniach.

Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest **symetryczny**, jeśli zachodzi wynikanie $x \in A \Rightarrow -x \in A$. Funkcja $f : D_f \to \mathbb{R}$ o dziedzinie symetrycznej nazywa się **symetryczna** lub **parzysta**, jeśli

$$\forall x \in D_f : \quad f(-x) = f(x),$$

zaś nazywa się **antysymetryczna** lub **nieparzysta**, jeśli

$$\forall x \in D_f : \quad f(-x) = -f(x).$$

PRZYKŁADY 11. Funkcja stała jest symetryczna, bo $f(-x) = \text{const} = f(x)$. Funkcjami symetrycznymi są $g(x) = x^2$, $h(x) = \cos x$.

PRZYKŁADY 12. Funkcja tożsamościowa jest antysymetryczna, gdyż $f(-x) = -x = -f(x)$. Funkcjami antysymetrycznymi są $g(x) = x^3$, $h(x) = \sin x$.

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny wobec odbicia względem osi Y. Jeśli dziedzina zawiera więcej, niż punkt zero: $A \neq \{0\}$, to funkcja symetryczna nie jest różnowartościowa. Wykres funkcji nieparzystej ma inną własność – jest niezmienny wobec obrotu o 180^o wokół początku układu.

Lemat 2. Złożenie funkcji symetrycznej f z dowolną funkcją g jest funkcją symetryczną.

D o w ó d. Zakładamy $f(-x) = f(x)$, wtedy

$$(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x). \quad \blacksquare$$

Lemat 3. Złożenie funkcji antysymetrycznej f z funkcją antysymetryczną g jest funkcją antysymetryczną.

D o w ó d. Zakładamy $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = -g(x)$, wtedy

$$(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x)) = -(g \circ f)(x). \quad \blacksquare$$

Lemat 4. Dowolną funcję f o symetrycznej dziedzinie można rozłożyć na sumę funkcji symetrycznej i antysymetrycznej.

D o w ó d. Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$ ma symetryczną dziedzinę. Określamy

$$f_s(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \quad f_a = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

Sprawdzamy własności symetrii tych funkcyj:

$$f_s(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = f_s(x).$$

Skorzystaliśmy z przemienności dodawania. Widzimy, że funkcja f_s jest symetryczna. Sprawdzamy dalej

$$f_a(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -f_a(x).$$

Widzimy, że funkcja f_a jest antysymetryczna. Ich suma wynosi

$$f_s(x) + f_a(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2f(x) = f(x).$$

Otrzymaliśmy wynik

$$f(x) = f_s(x) + f_a(x). \quad \blacksquare$$

Funkcja f_s nazywa się **częścią symetryczną** lub **parzystą** funkcji f, zaś f_a **częścią antysymetryczną** lub **nieparzystą** funkcji f.

Zbiór $X \subset \mathbb{R}$ nazywa się **okresowy**, jeśli

$$\exists a > 0 : x \in X \Rightarrow x + a \in X.$$

Nazwijmy liczbę a **parametrem okresowości**. Funkcja $f : D_f \to \mathbb{R}$ nazywa się **okresowa**, jeśli istnieje $a > 0$ takie, że dziedzina D_f jest okresowa z parametrem okresowości a oraz

$$\forall x \in D_f : f(x + a) = f(x).$$

Jeśli liczba a spełnia te warunki, to również liczby na dla $n \in \mathbb{N}$ spełniają je. Najmniejsza liczba $a > 0$ o tej własności nazywa się **okresem** funkcji f. Najlepiej znanymi funkcjami okresowymi są funkcje trygonometryczne: sinus i cosinus z okresem 2π oraz tangens i cotangens z okresem π.

PRZYKŁADY 13. Niech $L > 0$. Funkcje $x \mapsto \sin(2\pi x/L)$ oraz $x \mapsto \cos(2\pi x/L)$ są okresowe z okresem L, a funkcje $x \mapsto \mathrm{tg}(2\pi x/L)$ oraz $x \mapsto \mathrm{ctg}(2\pi x/L)$ są okresowe z okresem $L/2$. Jakie są dziedziny tych funkcyj?

1.3 Granica funkcji w punkcie

Granica funkcji jest podstawowym pojęciem, na którym opiera się rachunek różniczkowy.

PRZYKŁAD 1. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Punkt zero nie należy do dziedziny, ale możemy dowolnie zbliżać się do niego. Zobaczmy jak zachowuje się wartość tej funkcji coraz bliżej zera od prawej strony. Weźmy punkty $x_1 = \pi/10$, $x_2 = \pi/100$, $x_3 = \pi/1000$. Jeśli się ma kalkulator z funkcją sinus, to można znaleźć wartości tej funkcji w wybranych punktach: $f(x_1) = 0,98363$, $f(x_2) = 0,999836$, $f(x_3) = 0,999998$. Zauważamy, że te wartości są coraz bliższe jedynki.

Możemy na to patrzeć jako na wynikanie:

$$|x_1 - 0| < 0,315 \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - 1| < 0,01637,$$

$$|x_2 - 0| < 0,0315 \quad \Rightarrow \quad |f(x_2) - 1| < 0,000164,$$

$$|x_3 - 0| < 0,00315 \quad \Rightarrow \quad |f(x_3) - 1| < 0,000002.$$

Widzimy, że im mniejsze są różnice między x a zerem, tym mniejsze są różnice między $f(x)$ a jedynką.

Na tym spostrzeżeniu opiera się następująca definicja. Niech $D_f \subset \mathbb{R}$, $f : D_f \to \mathbb{R}$. Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest **granicą prawostronną funkcji f w punkcie** $a \in \mathbb{R}$, jeśli

$$\forall\, \epsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 : \ 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon. \tag{1.19}$$

Piszemy wtedy

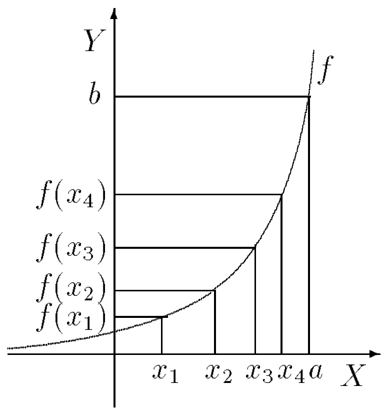
$$\lim_{x \to a+} f(x) = b.$$

Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest **granicą lewostronną funkcji f w punkcie** $a \in \mathbb{R}$, jeśli

$$\forall\, \epsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 : \ 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon. \tag{1.20}$$

Piszemy wtedy

$$\lim_{x \to a-} f(x) = b.$$



Rysunek 1.19

Na Rys. 1.19 ilustrujemy granicę lewostronną. Na osi poziomej zaznaczono kilka punktów x_n położnych z lewej strony coraz bliżej a, zaś na osi pionowej zaznaczono odpowiadające im wartości funkcji $f(x_n)$, które powinny być coraz bliżej b.

Liczba a nie musi należeć do dziedziny funkcji f, ale musi być dostatecznie blisko niej, aby znalazły się punkty z dziedziny dowolnie blisko liczby a. Granice: lewostronną i prawostronną nazywamy łącznie **granicami jednostronnymi.**

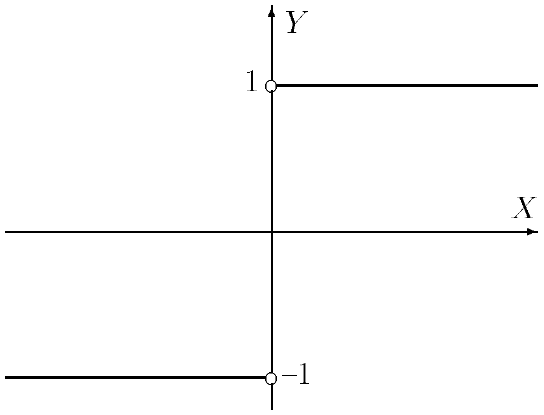
PRZYKŁAD 2. Niech $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, określamy $f_1 : D_{f_1} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f_1(x) = \frac{x}{|x|}.$$

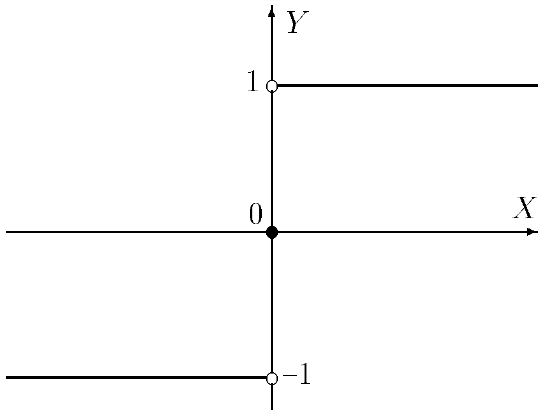
Dla tej funkcji można też podać zapis klamrowy:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x > 0, \\ -1 & \text{gdy} \quad x < 0. \end{cases}$$

Jej wykres jest ukazany na Rys. 1.20.



Rysunek 1.20



Rysunek 1.21

Niektórzy wprowadzają inną funkcję o większej dziedzinie $D_f = \mathbb{R}$ określoną następującym wzorem klamrowym:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x > 0, \\ 0 & \text{gdy} \quad x = 0, \\ -1 & \text{gdy} \quad x < 0. \end{cases},$$

która na węższej dziedzinie pokrywa się z poprzednią funkcją. Pokazana jest ona na Rys. 1.21. Możemy powiedzieć, że funkcja f jest **rozszerzeniem** funkcji f_1, albo że f_1 jest **zawężeniem** funkcji f. Funkcję f nazywa się **funkcją znakową**, gdyż informuje ona, jaki jest znak jej argumentu. W związku z tym występuje oznaczenie $f = \text{sgn}$ od łacińskiego *signum* = znak. Możemy przeto napisać

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x > 0, \\ 0 & \text{gdy} \quad x = 0, \\ -1 & \text{gdy} \quad x < 0. \end{cases}$$

Funkcja ta ma obie granice jednostronne w zerze:

$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1, \qquad \lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1.$$

Granice te są różne od siebie, a na dodatek różne od wartości funkcji w tym punkcie.

Przejdziemy teraz do (zwykłej) granicy funkcji w punkcie. Niech $D_f \subset \mathbb{R}$, $f : D_f \to \mathbb{R}$. Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest **granicą funkcji** f **w punkcie** $a \in \mathbb{R}$ jeśli

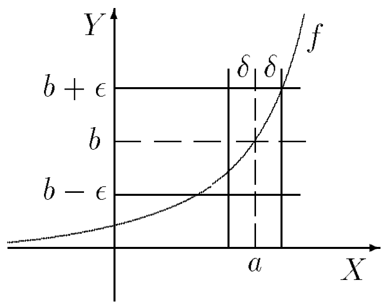
$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \;\; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon. \tag{1.21}$$

Piszemy wtedy

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Podane zdanie nosi nazwę **definicji Cauchy'ego**. [Augustin Cauchy (1789–1857) – matematyk francuski, jeden z najwybitniejszych w historii.] Istnieje jeszcze inna definicja oparta na ciągach, ale jej tutaj nie podamy. W we wzorze (1.10) występuje warunek $|x - a| < \delta$, który oznacza, że musi zachodzić $-\delta < x - a < \delta$, czyli nierówność $x - a\delta$ z wzoru (1.19) oraz nierówność $a - x < \delta$. To oznacza, że warunkiem koniecznym istnienia granicy funkcji w punkcie a jest istnienie granic jednostronnych i obie one muszą być takie same.

Definicję Cauchy'ego granicy funkcji można zilustrować na wykresie funkcji, jak to pokazuje Rys. 1.22. Poziomy pas o szerokości 2ϵ i prostej $y = b$ w środku wyznacza pionowy pas o szerokości 2δ z prostą $x = a$ w środku o tej własności, że część wykresu wycięta przez pas pionowy mieści się calkowicie w pasie poziomym. Jeśli zmniejszamy ϵ, to również δ musi być mniejsze.



Rysunek 1.22

PRZYKŁAD 3. Pokażemy, że funkcja $f : x \mapsto \cos x$ ma w zerze granicę jeden, czyli mamy zapewnić nierówność $|f(x) - 1| < \epsilon$. W tym celu skorzystamy z tożsamości trygonometrycznej

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Dla $x > 0$ zachodzi nierówność $\sin x < x$, co widać z Rys. 1.23, gdzie zaznaczono łuk okręgu o promieniu jeden. Wtedy x jest jednocześnie kątem w radianach i długością odpowiadającego mu łuku, a sinus x jest zaznaczoną wysokością. Widzimy, że dla $x > 0$ zachodzą nierówności

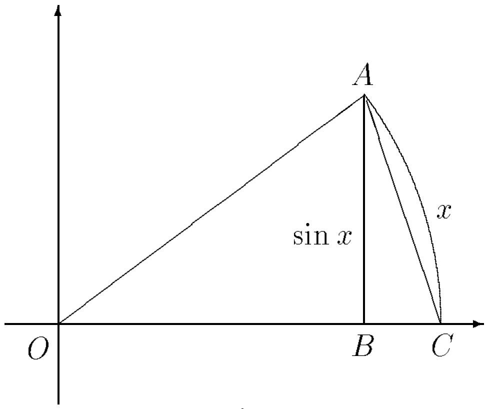
$$\sin x = |AB| < |AC| < x,$$

skąd wspomniana nierówność $\sin x < x$. Dodając moduły można napisać $|\sin x| < |x|$, dla $x \neq 0$ potem $\sin^2 x < x^2$, potem $\sin^2 \frac{1}{2}x < \frac{1}{4}x^2$, więc

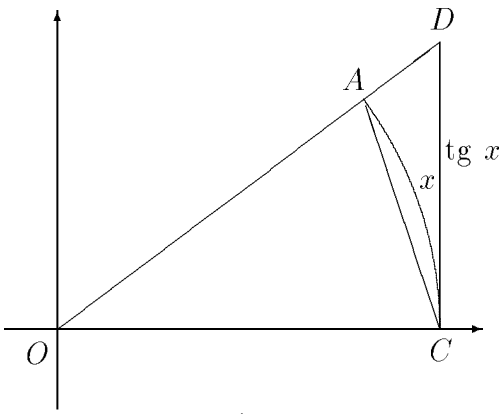
$$|1 - \cos x| < \frac{1}{2}x^2. \tag{1.22}$$

Jeśli $|x - 0| = |x| < \delta$, to $\frac{1}{2}x^2 < \frac{1}{2}\delta^2$, więc wystarczy dobrać $\frac{1}{2}\delta^2 = \epsilon$, w ten sposób dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje takie $\delta = \sqrt{2\epsilon}$, że dla $0 < |x| < \delta$ dzięki (1.22) mamy $|\cos x - 1| < \epsilon$. A to oznacza, że spełniona jest definicja (1.21) i możemy napisać

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$



Rysunek 1.23



Rysunek 1.24

PRZYKŁAD 4. Niech $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, określamy funkcję $f:\ D_f \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Funkcja ta jest **symetryczna**, tzn. $f(-x) = f(x)$. Znajdziemy granicę tej funcji w zerze. Powołamy się na to, że pole powierzchni wycinka koła o promieniu r i kącie α (w radianach) wynosi $\frac{1}{2}\alpha r^2$. W takim razie dla wycinka koła o promieniu jeden i kącie x jego pole wynosi $\frac{x}{2}$. Na Rys. 1.24 porównujemy pole wycinka kołowego o promieniu jeden i kącie x z polem trójkąta OCD o wysokości $\operatorname{tg} x$, które wynosi $\frac{1}{2}1 \cdot \operatorname{tg} x$, a jest ono wyraźnie większe. Widzimy więc, że dla kątów w pierwszej ćwiartce, czyli dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$ zachodzi nierówność $\frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$, a stąd

$$x < \operatorname{tg} x. \tag{1.23}$$

Możyny tę nierówność stronami przez $\frac{\cos x}{x}$, co daje

$$\cos x < \frac{\sin x}{x}.$$

Przekształcamy to dalej:

$$-\frac{\sin x}{x} < -\cos x, \qquad 1-\frac{\sin x}{x} < 1-\cos x.$$

Wszystkie stojące tu funkcje są symetryczne, więc od tej chwili możemy dopuścić również $x < 0$ zachowując prawdziwość tych nierówności. Wyrażenia po obu stronach ostatniej nierówności są nieujemne, więc możemy napisać

$$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right| < \left|1-\cos x\right|. \tag{1.24}$$

Korzystamy z poprzedniego przykładu, czyli z $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, więc piszemy

$$\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0 :\ 0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |\cos x - 1| < \epsilon.$$

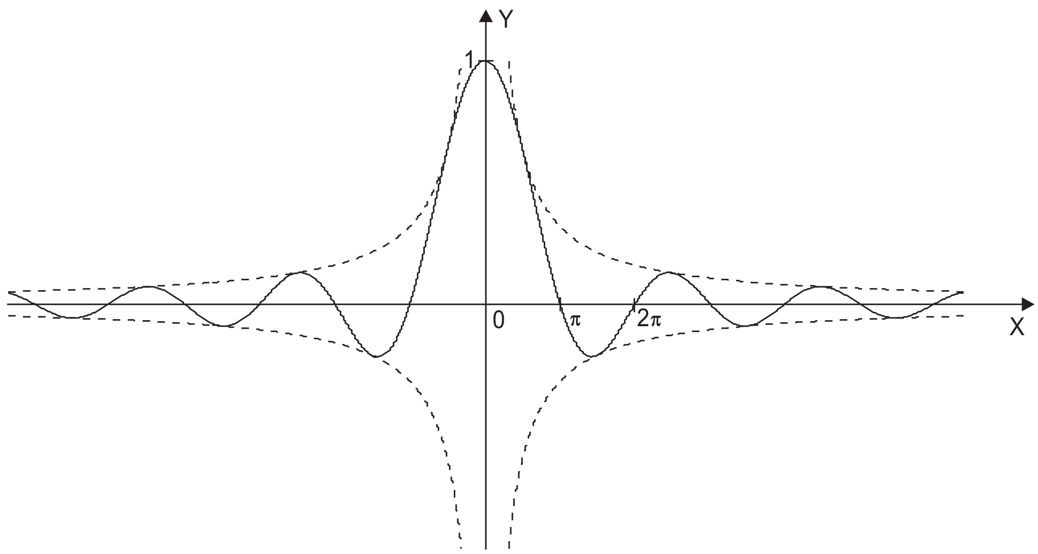
Dzięki nierówności (1.24) możemy napisać podobne zdanie z rozważaną funkcją:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0 :\ 0 < |x-0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \epsilon.$$

A to oznacza, że

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Na Rys. 1.25 ukazaliśmy wykres omawianej funkcji. Skoro $\sin x$ jest zawarty między –1 a 1, to wykres iloczynu $\frac{1}{x}\sin x$ mieści się między wykresem funkcji $\frac{1}{x}$ a $-\frac{1}{x}$. Dwa ostatnie wykresy to cztery hiperbole zaznaczone linią przerywaną.



Rysunek 1.25

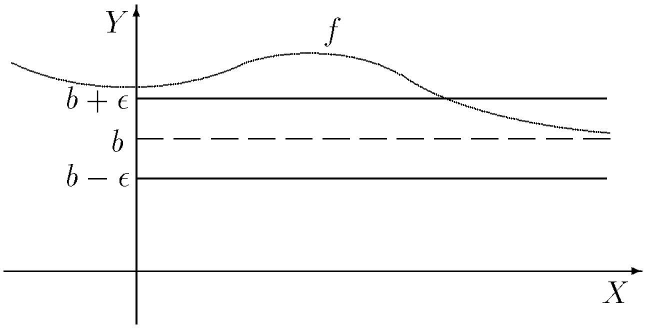
Oprócz granicy funkcji w punkcie skończonym definiuje się również **granice w nieskończonościach**:

$$\text{jeśli}\quad \forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ M > 0 :\ M < x \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon \quad\text{to}\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = b \tag{1.25}$$

oraz

$$\text{jeśli}\quad \forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ M < 0 :\ x < M \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon \quad\text{to}\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b. \tag{1.26}$$

Granicę (1.25) zilustrowaliśmy na Rys. 1.26. Pasek o szerokości 2ϵ ze środkiem na prostej $y = b$ wyznacza liczbę M taką, że na prawo od niej wartości funkcji mieszczą się w zadanym pasku. Przy tym im mniejsze ϵ, tym większe jest M.



Rysunek 1.26

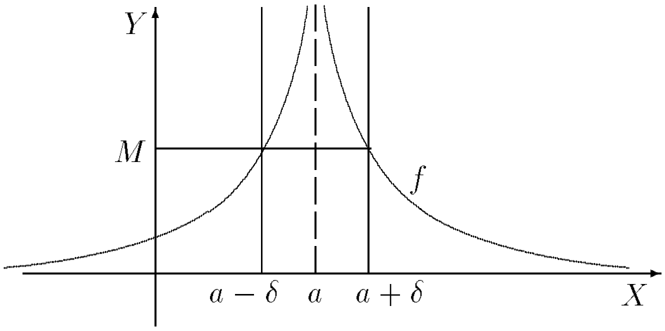
Symbolu $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ używa się również na oznaczenie **granic niewłaściwych**:

$$\text{jeśli} \quad \forall\, M > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M \quad \text{to} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \infty \tag{1.27}$$

oraz

$$\forall\, M < 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M \quad \text{to} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty. \tag{1.28}$$

Rys. 1.27 ilustruje granicę (1.27). Liczba M wyznacza pionowy pas o szerokości 2δ i środku na prostej $x = a$ taki, że wykres funkcji w tym pasie jest ponad prostą $y = M$. Przy tym im większe jest M, tym mniejsze musi być δ.



Rysunek 1.27

PRZYKŁAD 5. Funkcja dana wzorem $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ma granicę niewłaściwą w zerze:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Natomiast granica

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \tag{1.29}$$

nie istnieje, gdyż niewłaściwe granice jednostronne wynoszą

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Skoro one są różne, to granica (1.29) nie może istnieć.

PRZYKŁAD 6. Niech $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sin(1/x)$. Pokażemy, że ta funkcja nie ma granicy w zerze. Gdyby bowiem taka granica istniała i wynosiła b to dla każdego ciągu $\{x_n\}$ coraz bliższego zera wartości funkcji powinny być coraz bliższe b, więc zarazem coraz mniej różniące się od siebie. Wybierzmy ciąg dążący do zera z prawej strony:

$$x_1 = \frac{2}{\pi},\ x_2 = \frac{1}{\pi},\ x_3 = \frac{2}{3\pi},\ x_4 = \frac{1}{2\pi},\ \ x_5 = \frac{2}{5\pi}, \dots\ ,$$

czyli ogólnie $x_n = 2/(n\pi)$, wtedy odwrotności tych liczb stanowiłyby ciąg

$$\frac{1}{x_1} = \frac{\pi}{2},\ \frac{1}{x_2} = \pi,\ \frac{1}{x_3} = \frac{3\pi}{2},\ \frac{1}{x_4} = 2\pi,\ \frac{1}{x_5} = \frac{5}{2\pi}, \dots\ ,$$

a wartości funkcji utworzyłyby ciąg

$$\sin\frac{1}{x_1} = 1,\ \sin\frac{1}{x_2} = 0,\ \sin\frac{1}{x_3} = -1,\ \sin\frac{1}{x_4} = 0,\ \sin\frac{1}{x_5} = 1, \dots\ ,$$

czyli $\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots\}$ Odległości między tymi liczbami wcale nie zmniejszają się, więc wybrana funkcja nie ma granicy prawostronnej w zerze, zatem nie ma również zwykłej granicy w zerze.

Lemat 1. Jeśli funkcja f ma granicę w punkcie a, to istnieją takie $K > 0$ i $\delta > 0$, że $|f(x)| \le K$ dla $|x - a| < \delta$.

D o w ó d. Jeśli f ma granicę b w punkcie a, to w szczególności dla $\epsilon = 1$

$$\exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < 1.$$

Ostania nierówność oznacza, że

$$-1 < f(x) - b < 1, \qquad \text{czyli} \qquad b - 1 < f(x) < b + 1.$$

To oznacza, że zbiór wartości $f(x)$ jest ograniczony z góry i z dołu, a na mocy Zadania 5 z listy 2 – że jest ograniczony, czyli istnieje $K > 0$ takie, że

$$|f(x)| \le K. \blacksquare$$

Twierdzenie 1. Jeśli dwie funkcje f i g mają granicę w punkcie a, to suma, różnica, iloczyn i iloraz tych funkcyj mają granice w punkcie a oraz zachodzą wzory:

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},\qquad \text{jeśli}\qquad \lim_{x\to a}g(x)\neq 0,$$

tzn. granica sumy jest sumą granic itd.

D o w ó d . Udowodnimy równość pierwszą. Wybierzmy liczbę $\epsilon > 0$. Niech $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. To oznacza, że istnieją takie $\delta_f > 0$ i $\delta_g > 0$, że

$$0<|x-a|<\delta_f \;\Rightarrow\; |f(x)-b|<\frac{1}{2}\epsilon \quad\text{oraz}\quad 0<|x-a|<\delta_g \;\Rightarrow |g(x)-c|<\frac{1}{2}\epsilon.$$

W takim razie dla $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ zachodzi wynikanie

$$0<|x-a|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-b|<\frac{1}{2}\epsilon \;\;\wedge\;\; |g(x)-c|<\frac{1}{2}\epsilon.$$

Z nierówności trójkąta

$$|[f(x)+g(x)]-(b+c)| = |(f(x)-b)+(g(x)-c)| \le |f(x)-b|+|g(x)-c| < \frac{1}{2}\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon=\epsilon.$$

Tym samym pokazaliśmy prawdziwość zdania

$$\forall\,\epsilon>0\;\;\exists\,\delta>0:\;\; 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |[f(x)+g(x)]-(b+c)|<\epsilon.$$

Na mocy definicji (1.21) to znaczy, że suma funkcyj f i g ma w punkcie a granicę, a tą granicą jest suma granic $b+c=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Pierwsza równość jest udowodniona.

Teraz udowodnimy równość trzecią. Chcemy pokazać, kiedy różnica $|f(x)g(x)-bc|$ będzie mniejsza od wybranego ϵ korzystając z istnienia granic funkcyj f i g w punkcie a. Przekształcamy tę różnicę:

$$f(x)g(x)-bc = f(x)g(x)-f(x)c+f(x)c-bc = f(x)[g(x)-c]+c\,[f(x)-b].$$

Funkcja f ma granicę w punkcie a, więc na mocy Lematu 1 istnieje $K>0$ i $\delta_1>0$ takie, że $|f(x)|\le K$ dla $|x-a|<\delta_1$. Korzystając z nierówności trójkąta i modułu iloczynu szacujemy potrzebną nierówność:

$$|f(x)g(x)-bc| \le |f(x)(g(x)-c)|+|c\,(f(x)-b)| = |f(x)||g(x)-c|+|c||f(x)-b|$$

$$\le K|g(x)-c|+|c||f(x)-b|.$$

Weźmy teraz pewną liczbę $\epsilon_1>0$. Istnieje dla niej takie $\delta(\epsilon_1)$, że dla $0<|x-a|<\delta(\epsilon_1)$ mamy $|f(x)-b|<\epsilon_1$, $|f(x)|<K$ oraz $|g(x)-c|<\epsilon_1$, a stąd

$$|f(x)g(x)-bc| < K\epsilon_1+|c|\,\epsilon_1 = (K+|c|)\,\epsilon_1. \tag{1.30}$$

O liczbie ϵ_1 dotychczas nic nie zakładaliśmy. Załóżmy obecnie, że $\epsilon_1=\epsilon/(K+|c|)$. Równość (1.30) mówi więc nam, że dla $0<|x-a|<\delta(\epsilon_1)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)g(x)-bc|<\epsilon.$$

A to oznacza, że iloczyn funkcyj f i g w punkcie $a$ma granicę równą $bc=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Jeśli jako drugi czynnik w tym iloczynie wybierzemy funkcję stałą $g(x) = c$, to z udowodnionej trzeciej równości dostajemy

$$\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x),$$

co oznacza, że stałą możemy wyciągnąć przed znak granicy. W szczególności dla $c = -1$

$$\lim_{x\to a}[-f(x)] = -\lim_{x\to a} f(x). \tag{1.31}$$

Udowodnimy drugą równość. Z pierwszej równości i z (1.31) dostajemy

$$\lim_{a\to x}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a}[f(x) + (-g(x))] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a}[-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x).$$

Po dowód ostatniej równości odsyłam do książki Kazimierza Kuratowskiego *Rachunek różniczkowy i całkowy*, str. 69. ■

Twierdzenie 2. Niech funkcja f nie przyjmuje wartości b poza punktem a w pewnym przedziale otwartym zawierającym punkt a. Zachodzi następujące wynikanie dla złożenia funkcyj $g \circ f$:

$$\text{Jeśli} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{oraz} \quad \lim_{y\to b} g(y) = B, \quad \text{to} \quad \lim_{x\to a} g(f(x)) = B.$$

D o w ó d. Założenie $\lim_{y\to b} g(y) = B$ z definicji oznacza

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta_1 > 0: \;\; 0 < |y - b| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - B| < \epsilon. \tag{1.32}$$

Drugie założenie $\lim_{x\to a} f(x) = b$ oznacza

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0: \;\; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon. \tag{1.33}$$

Teraz podstawiamy $f(x) = y$ oraz w zdaniu (1.33) $\epsilon = \delta_1$. W zdaniu (1.32) jest warunek $|y - b| > 0$, więc ma być $|f(x) - b| > 0$, czyli $f(x) \neq b$ dla $x \neq a$, a to jest spełnione w założeniach twierdzenia. W takim razie możemy połączyć oba zdania (1.32) i (1.33) w jedno wynikanie:

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists \delta_1 > 0 \;\; \exists\, \delta > 0: \;\; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - b| < \delta_1 \Rightarrow |g(f(x)) - B| < \epsilon.$$

Pomijając kroki pośrednie możemy to zapisać

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0: \;\; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - B| < \epsilon,$$

co oznacza $\lim_{x\to a} g(f(x)) = B$. ■

1.4 Funkcje ciągłe

Niech $D_f \subset \mathbb{R}$, $f : D_f \to \mathbb{R}$, $a \in D_f$. Funkcja f nazywa się **prawostronnie ciągła w punkcie** a, jeśli

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a).$$

zaś **lewostronnie ciągła w punkcie** a, jeśli

$$\lim_{x\to a-} f(x) = f(a).$$

Mówimy, że funkcja f jest **ciągła w punkcie** a, jeśli

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{1.34}$$

Tym razem punkt a musi należeć do dziedziny funkcji, bo porównujemy wartości funkcji $f(x)$ w pobliżu a z wartością funkcji $f(a)$ właśnie w punkcie a.

Jeśli na przykład dziedziną jest przedział domknięty $\langle a, b\rangle$, to ciągłość w punkcie a jest równoważna prawostronnej ciągłości w tym punkcie, a ciągłość w punkcie b jest równoważna lewostronnej ciągłości w tym punkcie.

PRZYKŁAD 1. Rozważmy funkcję tożsamościową $f(x) = x$. Dla niej mamy

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{a\to a} x = a = f(a)$$

To zachodzi dla dowolnego $a \in D_f$, więc funkcja tożsamościowa jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

PRZYKŁAD 2. W przykładzie 3 w poprzednim paragrafie pokazaliśmy, że funkcja $f(x) = \cos x$ ma w zerze granicę jeden: $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. Wiemy, że $\cos 0 = 1$, więc otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0.$$

To oznacza, że funkcja cosinus jest ciągła w zerze.

PRZYKŁAD 3. Jaka jest granica w zerze funkcji $f(x) = x^2$? Dzięki Twierdzeniu 1 z § 1.3 granica iloczynu jest iloczynem granic:

$$\lim_{x\to a} x^2 = (\lim_{x\to a} x)^2 = 0 \cdot 0 = 0 = f(0).$$

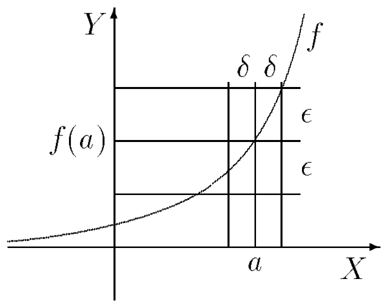
To oznacza, że funkcja kwadratowa jest ciągła w zerze.

Istnienie definicji Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie a pozwala nam sfomułować równoważny warunek ciągłości funkcji w punkcie a:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon. \tag{1.35}$$

Mówiąc obrazowo oznacza to, że dostatecznie małym przyrostom argumentu względem a odpowiadają dowolnie małe przyrosty wartości funkcji względem $f(a)$. Można go nazwać **definicją Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie** a.

Na wykresie funkcji można to pokazać jak na Rys. 1.28. Wykreślmy równoległy do osi X poziomy pas o szerokości 2ϵ i prostej $y = f(x)$ w środku. Istnieje wtedy równoległy do osi Y pionowy pas o szerokości 2δ z prostą $x = a$ w środku taki, że część wykresu wycięta przez pas pionowy mieści się równocześnie w pasie poziomym.



Rysunek 1.28

Zauważmy duże podobieństwo tego rysunku do Rys. 1.22. Jedyna różnica jest w tym, że w miejsce liczby b umieszczono wartość funkcji $f(a)$.

Funkcję ciągłą w każdym punkcie swojej dziedziny nazywamy krótko **funkcją ciągłą**. Funkcja stała jest w sposób oczywisty ciągła. To samo można powiedzieć o funkcji tożsamościowej.

PRZYKŁAD 4. Funkcja signum nie jest ciągła w zerze, więc nie można jej nazwać funkcją ciągłą. Ale po usunięciu zera z dziedziny mamy prawo tę nową funkcję nazwać ciągłą.

Istnieje pojęcie nieco słabsze od funkcji ciągłej. Niech $a, b \in \mathbb{R}$ lub $a = -\infty$, lub $b = \infty$. Usuwamy z dziedziny $D_f = (a, b)$ skończoną liczbę punktów

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ \dots \ < a_{n-1} < a_n, \quad \text{gdzie} \quad a < a_1, \quad a_n < b,$$

pozostawiając przedziały otwarte (a_{k-1}, a_k), $k \in \{1, 2, 3, \ \dots \ n\}$. Jeśli w każdym z tych przedziałów funkcja f jest ciągła oraz istnieją granice jednostronne

$$\lim_{x \to a_k -} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x \to a_k +} f(x),$$

to funkcja f nazywa się **przedziałami ciągłą**.

PRZYKŁAD 4a. Funkcja signum jest przedziałami ciągła, bo wystarczy dla niej wskazać dwa przedziały otwarte $(-\infty, 0)$ oraz $(0, \infty)$, w których ona jest ciągła.

PRZYKŁAD 5. Pokażemy, że moduł jest funkcją ciągłą. Skorzystamy z warunku (1.35). Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą, czyli dowolną liczbą z dziedziny funkcji moduł. Wybierzmy dowolne $\epsilon > 0$. Na podstawie Zadania 2 z Listy 2 możemy napisać

$$|\ |x| - |a|\ | \leq |x - a|.$$

Jeśli wybierzemy $\delta = \epsilon$, to dzięki temu z nierówności $0 < |x - a| < \delta$ wynika $|\ |x| - |a|\ | < \delta$, czyli $|\ |x| - |a|\ | < \epsilon$. W takim razie mamy prawdziwe całe zdanie (1.35), które teraz zapiszemy w postaci

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta = \epsilon : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\ |x| - |a|\ | < \epsilon.$$

To oznacza, że

$$\lim_{x \to a} |x| = |a|.$$

Skoro punkt a jest dowolny z dziedziny, to moduł jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie 1. Jeśli funkcje f i g są ciągłe w punkcie a, to ich suma, różnica, iloczyn i iloraz (o ile $g(a) \neq 0$) są w tym punkcie ciągłe.

D o w ó d pomijamy jako oczywisty w świetle Twierdzenia 1 z poprzedniego paragrafu.

Będziemy teraz rozważać, czy funkcje elementarne są ciągłe.

Skoro funkcje stała i tożsamościowa są ciągłe, to funkcja $x \mapsto ax$ jako ich iloczyn też jest ciągła. Dalej, funkcja $x \mapsto ax^n$ zwana **jednomianem** jest ciągła jako wielokrotny iloczyn funkcji tożsamościowej z sobą i z funkcją stałą. Następnie **wielomian** P określony wzorem

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ \dots\ + a_n x^n = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$$

jest funkcją ciągłą jako wielokrotna suma jednomianów. Wreszcie określona poprzez dwa wielomiany P i Q **funkcja wymierna** f o dziedzinie $D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$, dana wzorem

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

jest funkcją ciągłą jako iloraz wielomianów.

PRZYKŁAD 6. Zbadamy ciągłość funkcji sinus. Korzystamy z tożsamości trygonometrycznej $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, która daje

$$\sin x - \sin a = 2\sin\frac{1}{2}(x-a)\cos\frac{1}{2}(x+a).$$

Z Przykładu 3 w poprzednim paragrafie wiemy, że $|\sin t| \leq |t|$, a poza tym $|\cos t| \leq 1$, więc

$$|\sin x - \sin a| \leq 2\left|\frac{1}{2}(x-a)\right| \cdot 1 = |x-a|. \tag{1.36}$$

Teraz sprawdzamy definicję Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie, czyli wzór (1.35). Niech będzie dane dowolna liczba $\epsilon > 0$. Przyjmijmy $\delta = \epsilon$. Na mocy (1.36) z nierówności $|x-a| < \delta$, czyli $|x-a| < \epsilon$ wynika $|\sin x - \sin a| < \epsilon$. Widzimy, że zdanie (1.35) jest spełnione. To oznacza, że $\lim_{x\to a}\sin x = \sin a$. Funkcja sinus jest ciągła w punkcie a. Skoro to zachodzi w każdym punkcie a z dziedziny, to funkcja sinus jest ciągła.

PRZYKŁAD 7. Funkcja cosinus jest ciągła – sprawdzenie na ćwiczeniach.

PRZYKŁADY 8. Ponieważ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, więc funkcja tangens jako iloraz funkcyj ciągłych jest funkcją ciągłą. Z tych samych powodów funkcje cotangens, secans i cosecans:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

są ciągłe.

Twierdzenie 2. Jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie a, a funkcja g jest ciągła w punkcie $f(a)$, to ich złożenie, czyli funkcja $g \circ f$ jest ciągła w punkcie a. Złożenie funkcyj ciągłych jest funkcją ciągłą.

D o w ó d . Korzystamy z Twierdzenia 2 w poprzednim paragrafie:

$$\text{jeśli} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{oraz} \quad \lim_{y\to b} g(y) = B, \quad \text{to} \quad \lim_{x\to a} g(f(x)) = B.$$

Kładziemy w nim $b = f(a)$ oraz $B = g(b)$:

$$\text{jeśli} \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \text{oraz} \quad \lim_{y\to f(a)} g(y) = g(b) = g(f(a)),$$

$$\text{to} \quad \lim_{x\to a} g(f(x)) = g(f(a)) = (g\circ f)(a).$$

to oznacza, że funkcja $g\circ f$ jest ciągła w punkcie a.

Druga część twierdzenia jest prawdziwa po zastosowaniu pierwszej części do każdego punktu dziedziny funkcji złożonej. ■

To twierdzenie można zapisać symbolicznie

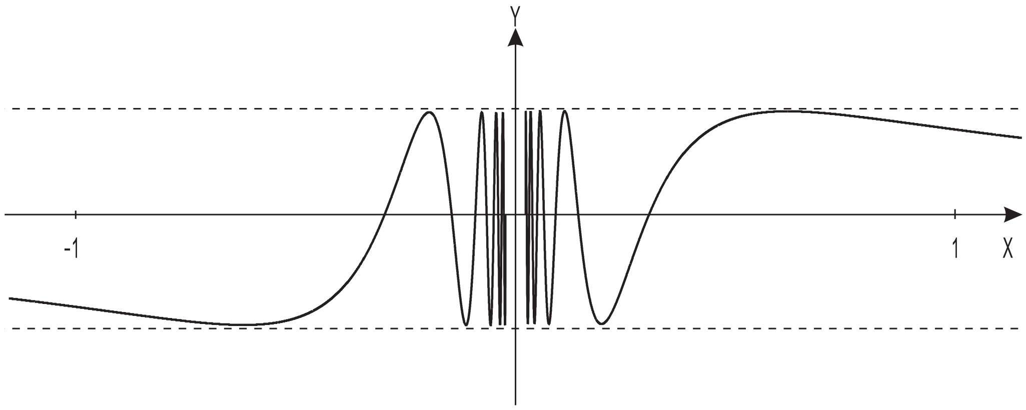
$$\lim_{x\to a} g[f(x)] = g[\lim_{x\to a} f(x)] \tag{1.37}$$

i przeczytać: ze znakiem granicy można wejść pod argument funkcji ciągłej.

Lemat 1. Funkcja wykładnicza $x \mapsto a^x$ dla $a > 0$ o dziedzinie $\mathbb{R}$ jest ciągła.

D o w ó d jest w książce R. Rudnickiego *Wykłady z analizy matematycznej* na str. 116.

PRZYKŁAD 10. Bardzo ciekawa jest funkcja $h : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $h(x) = \sin(\frac{1}{x})$. Jest to złożenie dwóch funkcyj. Funkcja wewnętrzna g o wzorze $g(x) = 1/x$ nie jest określona w zerze, więc złożenie też nie jest określone w zerze. Funkcja g dla małych $x > 0$ daje duże wartości $g(x)$, przy tym małe zmiany x dają duże zmiany $g(x)$ przewyższające wiele razy liczbę π, wobec tego jasnym powinno być, że przy małych zmianach x wartość $\sin(\frac{1}{x})$ zmienia się bardzo często od –1 do 1. Funkcję tę ilustruje Rys. 1.29. Funkcja ta jest złożeniem dwóch funkcyj antysymetrycznych, więc sama jest antysymetryczna. Jest ona też złożeniem dwóch funkcyj ciągłych, więc jest ciągła.



Rysunek 1.29

Ale funkcja f określona wzorem klamrowym

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{gdy} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{gdy} \quad x = 0. \end{cases}$$

jest nieciągła w zerze. Dzięki przykładowi 6 z poprzedniego paragrafu wiemy, że funkcja f nie ma granicy w tym punkcie.

Twierdzenie 3 (Weierstrassa). Funkcja f ciągła w przedziale domkniętym jest ograniczona. Taka funkcja osiąga przy tym swój kres górny M i dolny m, tzn. istnieją w dziedzinie dwa punkty x_1 i x_2 takie, że $f(x_1) = M$ oraz $f(x_2) = m$.

D o w ó d w książce Kuratowskiego na str. 81. [Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815– 1897) – matematyk niemiecki.]

Domkniętość przedziału jest tutaj bardzo ważna, bo na przykład funkcja tangens jest ciągła w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ale przy zbliżaniu się do końców tego przedziału dąży do nieskończoności albo do minus nieskończoności, więc nie jest ograniczona w przedziale otwartym.

Twierdzenie 4 - *własność Darboux.* Funkcja ciągła w przedziale domkniętym przechodzi przez wszystkie wartości pośrednie.

D o w ó d w książce Kuratowskiego na str. 82. [Jean Gaston Darboux (1842–1917) – matematyk francuski.] To twierdzenie udowodnił już matematyk czeski Bernhard Bolzano (1781–1848). Trzeba je rozumieć następująco. Jeśli dziedziną funkcji f jest przedział $\langle a, b\rangle$ i jeśli y jest liczbą pośrednią między $f(a)$ i $f(b)$, tzn. albo $f(a) < y < f(b)$, albo $f(b) < y < f(a)$, to istnieje takie $x \in \langle a, b\rangle$, że $f(x) = y$.

Z przytoczonych dwóch twierdzeń wynika następujący

Lemat 2. Funkcja ciągła w przedziale domkniętym przyjmuje wszystkie wartości od kresu dolnego m do kresu górnego M włącznie. Innymi słowy, obrazem funkcji jest przedział domknięty $\langle m, M\rangle$.

Ten lemat pozwala uważać, że funkcje odwrotne do funkcyj ciągłych na przedziałach domkniętych mają za swoje dziedziny także przedziały domknięte. Na przykład funkcja sinus jest ciągła na każdym przedziale domkniętym zwierającym przedział $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Dzięki Lematowi 2 możemy być pewni, że jej obrazem jest przedział $\langle -1, 1\rangle$. Już wspomieliśmy, że na przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ sinus ma funkcję odwrotną arcus sinus. Zatem możemy napisać

$$\arcsin : \ \langle -1, 1\rangle \ \to \ \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle .$$

Twierdzenie 5. Niech $m = \inf f$, $M = \sup f$. Jeśli funkcja f jest różnowartościowa i ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$, to funkcja odwrotna $g = f^{-1}$ jest ciągła w przedziale $\langle m, M\rangle$.

D o w ó d na str. 84 w książce Kuratowskiego.

PRZYKŁAD 11. Logarytm jest funkcją ciągłą, bo jest to odwrócenie funkcji wykładniczej.

PRZYKŁAD 12. Funkcja potęgowa $x \mapsto x^\beta$ dla $\beta \in \mathbb{R}$ o dziedzinie $\mathbb{R}^+$ jest ciągła, bo można ją przedstawić w postaci

$$x^\beta = \mathrm{e}^{\beta \ln x},$$

czyli złożenia funkcyj ciągłych. Na podstawie Twierdzenia 2 daje ono funkcję ciągłą.

Ten przykład zawiera jako przypadek szczególny tezę, iż pierwiastek dowolnego stopnia jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}^+$, bowiem $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$. Pozostaje jeszcze tylko udowodnienie ciągłości w zerze dla dodatnich wykładników, co przenosimy na ćwiczenia.

PRZYKŁAD 13. Na dziedzinie $D_f = \mathbb{R}^+$ funkcja $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$ jest ciągła.

PRZYKŁAD 14. Funkcje cyklometryczne: $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$ są ciągłe jako funkcje odwrotne do trygonometrycznych.

PRZYKŁAD 15. Funkcje hiperboliczne: $\sinh x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$, $\operatorname{ctgh} x$ są ciągłe jako kombinacje liniowe i i wymierne funkcyj wykładniczych. Funkcje odwrotne do nich: $\operatorname{ar}\sinh x$, $\operatorname{ar}\cosh x$, $\operatorname{ar}\operatorname{tgh} x$ i $\operatorname{ar}\operatorname{ctgh} x$ są ciągłe jako funkcje odwrotne do funkcyj ciągłych.

Z Twierdzeń 2 i 5 wynika, że biorąc funkcje elementarne dotąd rozważane i operując na nich za pomocą działań arytmetycznych, składania i brania funkcyj odwrotnych otrzymujemy nadal funkcje ciągłe. Teraz możemy być pewni, że wszystkie funkcje elementarne są ciągłe.

Otoczeniem punktu $a \in \mathbb{R}$ nazywamy przedział otwarty zawierający ten punkt.

Twierdzenie 6 *o lokalnym zachowaniu znaku.* Jeśli ciągła funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ w pewnym punkcie $x_o \in (a, b)$ jest dodatnia (ujemna), to istnieje otoczenie punktu x_0 takie, że funkcja jest w nim dodatnia (ujemna).

D o w ó d. Niech $f(x_0) > 0$. Przypomnijmy definicję Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie x_0

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \;\; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{1.38}$$

Wybieramy $\epsilon = f(x_0)$, wtedy istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $|x - x_0| < \delta$ [co oznacza $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$] zachodzi

$$-f(x_0) < f(x) - f(x_0) < f(x_0).$$

Zostawiamy lewą nierówność

$$-f(x_0) < f(x) - f(x_0),$$

$$0 < f(x).$$

W ten sposób mamy $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Niech $f(x_0) < 0$. Skoro ϵ ma być dodatnie, to wybieramy $\epsilon = -f(x_0)$, wtedy istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ zachodzi

$$f(x_0) < f(x) - f(x_0) < -f(x_0).$$

Zostawiamy prawą nierówność

$$f(x) - f(x_0) < -f(x_0)$$

$$f(x) < 0.$$

Zatem mamy $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. ■