Rozdział 4

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

Istniejące podręczniki

H. Margenau, G.M. Murphy: *Matematyka w fizyce i chemii*, rozdział 2, PWN, Warszawa 1962;
W.I Smirnow: *Matematyka wyższa*, tom II, rozdział 1 i 2, PWN, Warszawa 1966;
I. G. Pietrowski: *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa 1967;
Herbert Goering: *Elementarne metody rozwiązywania równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1967;
N. W. Matwiejew: *Metody całkowania równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN, Warszawa 1970.

4.1 Podstawowe pojęcia

W rachunku różniczkowym dowiedzieliśmy się, że przy danej funkcji $y = f(x)$ jej pochodna $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ sama jest funkcją od x, którą znajduje się dzięki odpowiednim regułom. Jeśli na przykład $y = \mathrm{e}^{x^2}$, to

$$\frac{dy}{dx} = 2x\mathrm{e}^{x^2} \quad \text{lub} \quad \frac{dy}{dx} = 2xy.$$

Typowe zadanie rachunku całkowego jes takie: przy znanej funkcji $g(x)$ znaleźć jej funkcję pierwotną. Tym razem mamy inne zadanie: przy danym równaniu, takim jak $dy/dx = 2xy$ znaleźć funkcję $y = f(x)$ spełniającą to równanie. Innymi słowy, mamy rozwiązać równanie różniczkowe.

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie postaci

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{4.1}$$

gdzie F jest znaną funkcją zmiennej niezależnej x, szukanej funkcji $y = f(x)$ i jej pochodnych. Zakładamy przy tym, że $y^{(n)}$ rzeczywiście występuje w tym równaniu, natomiast pozostałe argumenty funkcji F mogą nie występować w sposób jawny. W nazwie występuje przymiotnik „zwyczajne”, bo tak nazywa się równanie różniczkowe, w którym szukana funkcja zależy od jednej zmiennej. Gdyby zależała od dwóch lub więcej zmiennych, to równanie nazywałoby się cząstkowe. Każdą funkcję f określoną wraz z odpowiednimi pochodnymi na pewnej dziedzinie D nazywamy **rozwiązaniem** równania różniczkowego, jeśli zamienia ona równanie (4.1) w tożsamość prawdziwą dla wszystkich $x \in D$.

Przykładem równania różniczkowego rzędu pierwszego jest równanie

$$y' - 2x = 0, \quad \text{czyli} \quad y' = 2x. \tag{4.2}$$

Takie równania umiemy rozwiązywać – wystarczy znaleźć funkcję pierwotną; w takim razie wszystkie rozwiązania równania (4.2) mają postać

$$y = x^2 + C \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie C jest dowolną stałą. Stąd wynika, że równanie (4.2) ma nie jedno, lecz nieskończenie wiele rozwiązań, bo dla każdej wartości C jest osobne rozwiązanie.

Przykładem równania różniczkowego rzędu n jest równanie $y^{(n)} = 0$, które ma rodzinę rozwiązań

$$y = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

gdzie $C_1, \ldots, C_n$ są stałymi dowolnymi. Później dowiemy się, że rodzina rozwiązań każdego równania rzędu n zależy od n dowolnych parametrów.

Proces znajdowania rozwiązań nazywamy **całkowaniem równania różniczkowego**. Do równań różniczkowych prowadzi wiele zagadnień nauk przyrodniczych i techniki.

PRZYKŁAD 1. Punkt materialny porusza się po osi X tak, że prędkość jest znaną funkcją czasu $v = f(t)$. Trzeba znaleźć ruch tego punktu, tj. zależność współrzędnej punktu od czasu $x(t)$. W tym przypadku równanie różniczkowe jest pierwszego rzędu i ma postać

$$\frac{dx}{dt} = f(t).$$

Jak wiemy z rachunku całkowego, wszystkie rozwiązania tego równania można zapisać

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + C, \tag{4.3}$$

gdzie górna granica całkowania jest zmienna, granica dolna jest ustalona, a C jest stałą dowolną. Skoro w tym wzorze występuje stała dowolna, to nie otrzymaliśmy jeszcze konkretnego ruchu punktu. Wzór ten obejmuje całą rodzinę ruchów o tej samej prędkości w chwili t. Dopiero dodanie warunku

$$x = x_0 \quad \text{dla} \quad t = t_0 \tag{4.4}$$

wybiera jeden ruch z całej rodziny. Liczbę x_0 nazywamy**wartością początkową funkcji**, a t_0 – **wartością początkową argumentu**. Liczby t_0 i x_0 razem wzięte nazywamy **danymi początkowymi**, a warunek (4.4) **warunkiem początkowym rozwiązania**. Podstawienie $C = x_0$ we wzorze (4.3) zapewnia spełnienie warunku (4.4) i daje szukany ruch

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + x_0.$$

Dla równania różniczkowego (4.1) proces dobierania występujących w rozwiązaniu ogólnym stałych dowolnych do warunków początkowych nazywa się **zagadnieniem początkowym**.

4.2 Równania rzędu pierwszego

Obecnie poznamy metody rozwiązań stosowane w najczęściej występujących przypadkach.

4.2.1 Równania o zmiennych rozdzielonych

Rozważamy równanie różniczkowe postaci

$$N(x,y)\frac{dy}{dx} = M(x,y).$$

Mnożymy je stronami przez dx

$$M(x,y)dx = N(x,y)dy.$$

Zakładamy, że funkcje M, N są iloczynami dwóch czynników, z których jeden zależy od x, a drugi od y:

$$M_1(x)M_2(y)dx = N_1(x)N_2(y)dy.$$

Dzielimy obie strony równania przez M_2N_1

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx = \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy,$$

co można zapisać inaczej

$$f(x)dx = g(y)dy, \tag{4.5}$$

gdzie $f(x) = M_1(x)/N_1(x)$, $g(y) = N_2(y)/M_2(y)$. Takie równanie nazywamy **równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych**. Można je rozwiązać przez obliczenie dwóch całek nieoznaczonych

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy$$

lub z użyciem funkcyj pierwotnych F dla f oraz G dla g:

$$F(x) = G(y) + C \tag{4.6}$$

i otrzymać szukany związek między zmiennymi y i x. W równaniu (4.5) nie jest ważne, która zmienna jest zależna, a która niezależna – obie zmienne x i y występują na jednakowych prawach. Dopiero przez rozwiązanie równania (4.6) wyliczając y czynimy z niej zmienną zależną.

Nie ma potrzeby używania dwóch stałych całkowania, gdyż równość $F(x) + C_1 = G(y) + C_2$ daje $F(x) = G(y) + C_2 - C_1 = G(y) + C$, gdzie C jest zupełnie dowolne. W wielu przykładach, które nastąpią, będziemy zamieniać stałe w sposób dla nas wygodny. Na przykład iloczyn stałych, czy kombinacja liniowa stałych mogą być zastąpione przez jedną stałą.

PRZYKŁAD 1. Wiadomo, że szybkość rozpadu radu jest proporcjonalna do chwilowej ilości radu. Załóżmy, że w chwili początkowej t_0 było R_0 gramów radu. Należy wyznaczyć masę R radu w dowolnej chwili t.

Jeśli współczynnik proporcjonalności wynosi $\lambda > 0$, to dochodzimy do takiego równania różniczkowego

$$\frac{dR}{dt} = -\lambda R. \tag{4.7}$$

Napisaliśmy minus, bo chodzi o ubytek masy radu. Przekształcamy to równanie do postaci z rozdzielonymi zmiennymi

$$\frac{dR}{R} = -\lambda dt.$$

Całkowanie obu stron z osobna daje $\ln R = -\lambda t + C'$, czyli $R = \mathrm{e}^{-\lambda t + C'} = \mathrm{e}^{C'}\mathrm{e}^{-\lambda t}$. Jeśli podstawimy $\mathrm{e}^{C'} = C$, to dostaniemy

$$R(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{4.8}$$

Warunek początkowy prowadzi do równości $C\mathrm{e}^{-\lambda t_0} = R_0$, skąd $C = R_0\mathrm{e}^{\lambda t_0}$. Wstawiamy to do (4.8) otrzymując

$$R(t) = R_0\mathrm{e}^{\lambda t_0}\mathrm{e}^{-\lambda t} = R_0\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}.$$

Otrzymany wzór nazywa się **prawem rozpadu promieniotwórczego**.

PRZYKŁAD 2. Rozwiążmy równanie różniczkowe $\frac{dy}{dx} = -x/y$. Rozdzielamy zmienne: $y\,dy = -x\,dx$, więc

$$\int y\,dy = -\int x\,dx,$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1,$$

lub

$$x^2 + y^2 = c^2, \tag{4.9}$$

gdzie stała $2C_1$ została zastąpiona przez stałą r^2, w której r ma interpretację promienia okręgu, bo znalezione rozwiązanie (4.9) jest równaniem okręgu. Wyliczamy $y^2 = r^2 - x^2$ i stąd pojawiają się dwie możliwości:

$$y_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{lub} \qquad y_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Mamy dwa typy rozwiązań – rozwiązania piewszego typu są ujemne, drugiego dodatnie. Rozwiązanie konkretnego typu wybierzemy dopiero po wykorzystaniu warunku początkowego.

4.2.2 Równania liniowe

Liniowym równaniem różniczkowym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

czyli równanie, w którym pochodna i funkcja niewiadoma są w pierwszej potędze. Po podzieleniu tego równania stronami przez $a_1(x)$ otrzymujemy równanie

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \tag{4.10}$$

Rozpatrzmy najpierw równanie liniowe nie zawierające wyrazu wolnego $q(x)$, czyli tzw. **równanie liniowe jednorodne**, przy sposobności zamieniamy oznaczenie zmiennej zależnej:

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z = 0.$$

Dostajemy równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dz}{z} = -p(x)dx,$$

które łatwo całkujemy

$$\ln|z| = \ln|C| - \int p(x)dx,$$

otrzymując

$$z(x) = C\,\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}. \tag{4.11}$$

Aby scałkować ogólne równanie liniowe (4.10), zastosujemy tzw. **metodę uzmienniania stałej**, co oznacza, że wykorzytujemy rozwiązanie (4.11), w którym zamiast stałej C zapisujemy niewiadomą funkcję u:

$$y(x) = u(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}. \tag{4.12}$$

Różniczkujemy to wyrażenie

$$y'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} - p(x)u(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$$

i wstawiamy do równania (4.10):

$$u'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} - p(x)u(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} + p(x)u(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$u'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Oznaczywszy $P(x) = \int p(x)dx$ otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{du}{dx} = q(x)\mathrm{e}^{P(x)}. \tag{4.13}$$

Wyrażenie $\mu(x) = \mathrm{e}^{P(x)} = \mathrm{e}^{\int p(x)dx}$ nazywa się *czynnikiem całkującym* równania liniowego. Równanie (4.13) ma rozwiązanie wyrażone przez całkę nieoznaczoną

$$u(x) = C + \int q(x)\mathrm{e}^{P(x)}dx.$$

Teraz należy to wstawić do wzoru (4.12)

$$y(x) = \left[C + \int q(x)\mathrm{e}^{P(x)}dx\right]\mathrm{e}^{-P(x)}. \tag{4.14}$$

W ten sposób otrzymaliśmy ogólne rozwiązanie równania liniowego (4.10).

PRZYKŁAD 3. Rozwiążemy równanie

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6\mathrm{e}^x.$$

Jest ono liniowe pierwszego rzędu. Dzielimy je przez współczynnik przy pochodnej:
$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}\,y = x^5 \mathrm{e}^x.$$
W tym przypadku $p(x) = -\frac{4}{x}$, skąd $P(x) = -4\ln|x|$. Znajdujemy czynnik całkujący
$$\mathrm{e}^{-4\int dx/x} = e^{-4\ln|x|} = \mathrm{e}^{\ln x^{-4}} = x^{-4}.$$
To możemy wstawić do wzoru (4.14):
$$y(x) = \left(C + \int x^5 \mathrm{e}^x x^{-4} dx\right) x^4 = Cx^4 + \left(\int x\mathrm{e}^x dx\right) x^4.$$
Całkowanie przez części daje
$$y(x) = Cx^4 + (x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x)\, x^4 = Cx^4 + x^5\mathrm{e}^x - x^4\mathrm{e}^x.$$

PRZYKŁAD 4. Obwód elektryczny zawierający opór R i samoindukcję L. Spadek napięcia RI na oporze jest równy sumie zewnętrznej siły elektromotorycznej E oraz siły elektromotorycznej indukcji $-L(dI/dt)$:
$$RI = E - L\frac{dI}{dt}.$$
W takim razie natężenie prądu przepływającego przez obwód spełnia następujące równanie różniczkowe
$$L\frac{dI}{dt} + RI = E,$$
Nazywa się ono **równaniem Helmholtza**. [Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) – niemiecki fizyk, fizjolog i filozof, z wykształcenia lekarz; największą jego zasługą było podanie matematycznej interpretacji zasady zachowania energii.] Po przekształceniu równania do postaci
$$\frac{dI}{dt} + \frac{RI}{L} = \frac{E}{L},$$
zauważamy, że $p(t) = \frac{R}{L}$, a funkcja pierwotna tego współczynnika wynosi $P(t) = \frac{R}{L}t$, więc czynnik całkujący ma postać $\mu(t) = \mathrm{e}^{(R/L)t}$. W takim razie zgodnie z wzorem (4.14) ogólne rozwiązanie zapiszemy jako
$$I(t) = \left[C + \int \frac{E}{L}\,\mathrm{e}^{(R/L)t} dt\right] \mathrm{e}^{-(R/L)t} = \left[C + \frac{E}{L}\frac{L}{R}\,\mathrm{e}^{(R/L)t}\right] \mathrm{e}^{-(R/L)t}$$
$$I(t) = C\mathrm{e}^{-(R/L)t} + \frac{E}{R}. \tag{4.15}$$
Teraz jest czas na warunki początkowe. Naturalne jest przyjmowanie, że chwila początkowa jest chwilą zamknięcia obwodu, czyli dla $t = 0$ prąd jeszcze nie płynie tzn. $I = 0$:
$$0 = C + \frac{E}{R}, \quad \text{skąd} \quad C = -\frac{E}{R}.$$

Wstawienie tego do (4.15) daje rozwiązanie szczególne

$$I(t) = \frac{E}{R}\left[1 - \mathrm{e}^{-(R/L)t}\right],$$

które opisuje narastanie prądu. Widzimy, że dla dużych czasów (czyli $t \to \infty$) natężenie prądu dąży do wartości stałej $I_{\max} = \frac{E}{R}$ odpowiadającej prawu Ohma.

To samo rozwiązanie nadaje się do rozważenia innej sytuacji, mianowicie wyłączenia napięcia. Otóż należy przyjąć $E = 0$, co daje rozwiązanie ogólne

$$I(t) = C\mathrm{e}^{-(R/L)t},$$

Teraz warunki początkowe są takie: $I = E/R$ przy $t = 0$, skąd $C = E/R$ i otrzymujemy rozwiązanie szczególne

$$I(t) = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-(R/L)t},$$

które opisuje wykładnicze zanikanie prądu.

Rozważane w tym przykładzie równanie Helmholtza przy stałej sile elektromotorycznej daje się też rozwiązać metodą rozdzielenia zmiennych. W następnym przykładzie już tak nie jest.

PRZYKŁAD 5. Obwód zawierający opór i samoindukcję z przyłożoną zmienną siłą elektromotoryczną. Załóżmy, że $E(t) = E_0 \sin \omega t$; mamy wtedy

$$RI = E_0 \sin \omega t - L\,\frac{dI}{dt}, \quad \text{czyli} \quad \frac{dI}{dt} + \frac{RI}{L} = \frac{E_0}{L}\sin \omega t.$$

Czynnik całkujący jest ten sam, co w poprzenim przykładzie: $\mu(t) = \mathrm{e}^{(R/L)t}$. W takim razie zgodnie z wzorem (4.14) ogólne rozwiązanie zapiszemy jako

$$I(t) = \left[C + \frac{E_0}{L}\int \mathrm{e}^{(R/L)t}\sin \omega t\, dt\right]\mathrm{e}^{-(R/L)t}. \tag{4.16}$$

Całkę nieoznaczoną $\int \mathrm{e}^{\lambda t}\sin \omega t\, dt$ z podstawieniem $\lambda = R/L$ wyliczymy przez części. Niech $u = \mathrm{e}^{\lambda t}$, $v' = \sin \omega t$, wtedy $u' = \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda t}$, $v = -\omega^{-1}\cos \omega t$:

$$\int \mathrm{e}^{\lambda t}\sin \omega t\, dt = -\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\lambda t}\cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega}\int \mathrm{e}^{\lambda t}\cos \omega t\, dt.$$

Do ostatniej całki też stosujemy całkowanie przez części:

$$\int \mathrm{e}^{\lambda t}\sin \omega t\, dt = -\frac{1}{\omega}\,\mathrm{e}^{\lambda t}\cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega}\left(\frac{1}{\omega}\,\mathrm{e}^{\lambda t}\sin \omega t - \frac{\lambda}{\omega}\int \mathrm{e}^{\lambda t}\sin \omega t\, dt\right)$$

$$= \frac{\lambda}{\omega^2}\,\mathrm{e}^{\lambda t}\sin \omega t - \frac{1}{\omega}\,\mathrm{e}^{\lambda t}\cos \omega t - \frac{\lambda^2}{\omega^2}\int \mathrm{e}^{\lambda t}\sin \omega t\, dt.$$

Mnożymy równanie stronami przez ω^2 i przenosimy obie całki na jedną stronę:

$$\left(\omega^2 + \lambda^2\right)\int \mathrm{e}^{\lambda t}\sin \omega t\, dt = \mathrm{e}^{\lambda t}(\lambda \sin \omega t - \omega \cos \omega t),$$

skąd znajdujemy

$$\int e^{\lambda t} \sin \omega t \, dt = \frac{e^{\lambda t}}{(\omega^2 + \lambda^2)} (\lambda \sin \omega t - \omega \cos \omega t).$$

Ten wynik należy wstawić do wzoru (4.16)

$$I(t) = \left[C + \frac{E_0}{L} \frac{e^{(R/L)t}}{(\omega^2 + \lambda^2)} (\lambda \sin \omega t - \omega \cos \omega t) \right] e^{-(R/L)t},$$

$$I(t) = C e^{-(R/L)t} + \frac{E_0}{L\,(\omega^2 + \lambda^2)} (\lambda \sin \omega t - \omega \cos \omega t).$$

W ten sposób otrzymaliśmy ogólne rozwiązanie równania Helmholtza dla tego przypadku. Pierwszy wyraz opisuje prądy zanikające wykładniczo. Ponieważ jest w nim obecna stała całkowania, to służy on do spełniania warunków początkowych. Po dostatecznie długim czasie, tzn. długim w stosunku do $\lambda^{-1} = L/R$ (ta wielkość ma wymiar czasu) pozostaje natężenie prądu wyrażone następującą funkcją od czasu

$$\tilde{I}(t) = \frac{E_0}{L\,(\omega^2 + \lambda^2)} (\lambda \sin \omega t - \omega \cos \omega t).$$

Widać, że jest to funkcja okresowa z częstością taką samą, z jaką zmienia się zewnętrzna siła elektromotoryczna. Tę zależność nazywa się **drganiem wymuszonym**.

4.3 Równania liniowe rzędu drugiego

Liniowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu nazywamy równanie postaci

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x). \tag{4.17}$$

Twierdzenie 1. Jeśli funkcje p, q, r są ciągłe w pewnym przedziale $\langle a, b \rangle$, to istnieje rozwiązanie równania (4.17) w całym przedziale $\langle a, b \rangle$. Przy tym dla dowolnych α, $\beta \in \mathbb{R}$ istnieje tylko jedno rozwiązanie spełniające warunki początkowe

$$y(x_0) = \alpha, \; y'(x_0) = \beta \;\; \text{dla} \;\; x_0 \in \langle a, b \rangle. \tag{4.18}$$

D o w ó d – książka Smirnowa, str. 82.

Liniowym jednorodnym równaniem różniczkowym drugiego rzędu nazywamy równanie

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{4.19}$$

Lemat 1 – *zasada superpozycji.* Jeśli y_1 i y_2 są dwoma rozwiązaniami równania (4.19), to ich kombinacja liniowa

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

dla dowolnych stałych C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$ jest też rozwiązaniem.

D o w ó d. Skoro pochodna sumy jest sumą pochodnych, a stałe można wyciągnąć przed znak pochodnej, to zachodzą równości

$$y'(x) = C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x), \qquad y''(x) = C_1y_1''(x) + C_2y_2''(x).$$

Wstawiamy to do lewej strony wzoru (4.19):

$$\begin{aligned} &y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) \\ &\qquad = C_1y_1''(x) + C_2y_2''(x) + p(x)[C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x)] + q(x)[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)]. \end{aligned}$$

Grupujemy wyrazy inaczej:

$$\begin{aligned} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) &= C_1[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] \\ &+C_2[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)] = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Skoro otrzymaliśmy zero, to równanie (4.19) jest spełnione. ■

W szczególności funkcja tożsamościowo równa zero też jest rozwiązaniem. Możemy je nazwać **rozwiązaniem zerowym**. Zbiór o własnościach zapewnionych przez Lemat 1 (kombinacja liniowa elementów ze zbioru też należy do niego) nazywa się w algebrze **przestrzenią liniową** albo **lineałem**. Powiemy zatem, że zbiór rozwiązań jednorodnego liniowego równania różniczkowego drugiego rzędu jest lineałem.

Dwa rozwiązania y_1 i y_2 równania (4.19) nazywamy **liniowo niezależnymi**, jeśli związek

$$\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) = 0, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$$

o stałych współczynnikach α_1, α_2 jest spełniony tylko przy obu stałych równych zero.

Do badania, czy dane dwie funkcje f_1, f_2 są liniowo niezależne, służy tzw. **wyznacznik Wrońskiego**:

$$W(f_1(x), f_2(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}. \tag{4.20}$$

[Józef Maria Hoene-Wroński (1776-1853) – filozof, matematyk, fizyk, prawnik i ekonomista. Uczestnik powstania kościuszkowskiego, od 1800 r. we Francji. Jego jedynym godnym uwagi wkładem do matematyki był wspomniany wyznacznik w literaturze angielskojęzycznej zwany **wronskianem**.]

Lemat 2. Niech funkcje f_1 i f_2 będą różniczkowalne na wspólnej dziedzinie D. Jeśli wyznacznik (4.20) jest niezerowy przynajmniej w jednym punkcie dziedziny, to funkcje f_1, f_2 są liniowo niezależne.

D o w ó d nie wprost. Zaprzeczając tezie lematu załóżmy że funkcje f_1, f_2 są liniowo zależne. Wtedy istnieje niezerowa para liczb α_1, α_2 taka, że

$$\alpha_1f_1(x) + \alpha_2f_2(x) = 0 \quad \forall x \in D.$$

Jeśli $\alpha_1 \neq 0$, to dostajemy

$$f_1(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}f_2(x),$$

skąd także dla pochodnych zachodzi związek

$$f_1'(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}f_2'(x).$$

Wstawiamy to do wzoru (4.20):

$$W(f_1(x), f_2(x)) = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} f_2(x) & f_2(x) \\ \\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} f_2'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}$$

Stwierdzamy, że pierwsza kolumna jest proporcjonalna do drugiej kolumny, a z teorii wyznaczników wiadomo, że taki wyznacznik jest zerem. Otrzymujemy sprzeczność z założeniem lematu, co kończy dowód nie wprost. ■

PRZYKŁAD 1. Funkcje $f_1(x) = \sin^2 x$ oraz $f_2(x) = 1 - \cos 2x$ są liniowo zależne, bo istnieje tożsamość trygonometryczna $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, skąd dostajemy $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$. Wyliczmy wyznacznik Wrońskiego

$$W(f_1(x), f_2(x)) = \begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 - \cos 2x \\ \\ 2\sin x \cos x & 2\sin 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 - \cos 2x \\ \\ \sin 2x & 2\sin 2x \end{vmatrix}$$

$$= 2\sin^2 x \sin 2x - \sin 2x\,(1 - \cos 2x) = \sin 2x\,(2\sin^2 x - 1 + \cos 2x)$$

$$= \sin 2x\,(2\sin^2 x - 1 + \cos^2 x - \sin^2 x) = \sin 2x\,(\sin^2 x + \cos^2 x - 1) = 0.$$

Ten wyznacznik jako funkcja zmiennej x jest niezerowy wszędzie, więc ten fakt potwierdza, że funkcje f_1 i f_2 są liniowo zależne.

PRZYKŁAD 2. Wybierzmy $f_1(x) = e^{\lambda x}$, $f_2(x) = e^{\kappa x}$, gdzie $\lambda \neq \kappa$ i wyliczmy wyznacznik Wrońskiego

$$W(f_1(x), f_2(x)) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & e^{\kappa x} \\ \\ \lambda e^{\lambda x} & \kappa e^{\kappa x} \end{vmatrix} = \kappa e^{\lambda x} e^{\kappa x} - \lambda e^{\lambda x} e^{\kappa x} = (\kappa - \lambda) e^{(\lambda + \kappa) x}.$$

Skoro funkcja wykładnicza jest niezerowa dla każdego $x \in \mathbb{R}$, a $\kappa \neq \lambda$, to $W(f_1(x), f_2(x)) \neq 0$ dla każdego x, więc funkcje f_1 i f_2 są liniowo niezależne.

Twierdzenie 2. Jeśli f_1 i f_2 są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{4.21}$$

to przy odpowiednim doborze stałych C_1 i C_2 wzór

$$y(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) \tag{4.22}$$

daje rozwiązanie równania (4.21) spełniające dowolne warunki początkowe.

D o w ó d – książka Smirnowa, str. 83.

To twierdzenie mówi, że wszystkie rozwiązania równania różniczkowego (4.21) można otrzymać przez kombinacje liniowe tylko dwóch liniowo niezależnych rozwiązań tego równania. Ta własność w języku algebry wyrażana jest zdaniem: lineał rozwiązań równania (4.21) **ma wymiar dwa** albo **jest dwuwymiarowy**. To twierdzenie oznacza, że szukanie rozwiązań jednorodnego równania liniowego (4.21) sprowadza się do znalezienia dwóch liniowo niezależnych rozwiązań f_1 i f_2, aby wzorem (4.22) wyrazić każde inne rozwiązanie. Dlatego para takich rozwiązań f_1, f_2 nazywa się **fundamentalnym układem rozwiązań** równania (4.21).

Lemat 3 – *wzór Abela.* Niech f_1, f_2 będą dwoma rozwiązaniami równania (4.21). Wtedy wyznacznik Wrońskiego można zapisać

$$W(f_1(x), f_2(x)) = W_0\, \mathrm{e}^{-P(x)}, \tag{4.23}$$

gdzie P jest funkcją pierwotną funkcji p, zaś W_0 jest pewną stałą.

[Niels Henrik Abel (1802–1829) – matematyk norweski, udowodnił m.in., że ogólne równanie piątego stopnia nie ma rozwiązań dających się wyrazić przez pierwiastki. Na jego cześć grupy przemienne nazywane są abelowymi.]

D o w ó d. Liczymy pochodną wyznacznika Wrońskiego $W(f_1, f_2) = f_1 f_2' - f_2 f_1'$:

$$\frac{dW}{dx} = f_1' f_2' + f_1 f_2'' - f_2' f_1' - f_2 f_1'' = f_1 f_2'' - f_2 f_1''.$$

Skoro f_i są rozwiązaniami równania (4.21), to możemy z niego wyliczyć drugie pochodne i wstawić do tego wzoru

$$\frac{dW}{dx} = f_1[-p(x)f_2' - q(x)f_2] - f_2[-p(x)f_1' - q(x)f_1]$$

$$= -p(x)f_1 f_2' - q(x)f_1 f_2 + p(x)f_2 f_1' + q(x)f_2 f_1 = p(x)(f_2 f_1' - f_1 f_2') = -p(x)W.$$

Otrzymujemy równanie różniczkowe pierwszego rzędu o zmiennych rozdzielonych,

$$\frac{dW}{W} = -p\, dx,$$

które ma rozwiązanie $W(x) = W_0\, \mathrm{e}^{-\int p(x)\, dx}$ zgodne z wzorem (4.23). ■

Z wzoru (4.23) wynika, że wyznacznik $W(f_1, f_2)$ albo jest tożsamościowo zerem, gdy stała W_0 jest zerem, albo jest niezerowy, bo funkcja wykładnicza nie zamienia się w zero.

Wyliczmy pochodną ilorazu dwóch rozwiązań:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = \frac{f_2' f_1 - f_2 f_1'}{{f_1}^2} = \frac{W(f_1, f_2)}{{f_1}^2}.$$

Wykorzystujemy wzór (4.23)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = W_0 \frac{\mathrm{e}^{-P(x)}}{{f_1}^2}$$

i całkujemy otrzymaną równość

$$\frac{f_2}{f_1} = W_0 \int \frac{\mathrm{e}^{-P(x)}}{{f_1}^2}\, dx$$

otrzymując

$$f_2 = W_0\, f_1 \int \mathrm{e}^{-P(x)} \frac{dx}{{f_1}^2}. \tag{4.24}$$

Dzięki temu możemy stwierdzić, że jeśli mamy jedno rozwiązanie szczególne f_1 równania (4.19), to drugie rozwiązanie f_2 możemy otrzymać ze wzoru (4.24), gdzie W_0 jest stałą, którą możemy przyjąć równą jedności.

PRZYKŁAD 3. Rozważmy równanie różniczkowe

$$x^2y'' - 6xy' + 12y = 0. \tag{4.25}$$

Sprawdźmy, czy $f_1(x) = x^3$ jest jego rozwiązaniem. Otóż $f_1'(x) = 3x^2$, $f_1''(x) = 6x$; wstawiamy to do lewej strony równania

$$x^2 \cdot 6x - 6x \cdot 3x^2 + 12x^3 = 6x^3 - 18x^3 + 12x^3 = 0.$$

Zgadza się. Teraz zastosujemy przepis (4.24) dla znalezienia innego rozwiązania. Najpierw przepisujemy równanie tak, żeby współczynnik przy y'' był jedynką

$$y'' - \frac{6}{x}\,y' + \frac{12}{x^2}\,y = 0.$$

Mamy równanie w postaci (4.17). Znajdujemy

$$P(x) = -\int \frac{6dx}{x} = -6\ln|x| = -\ln x^6, \quad \mathrm{e}^{-P(x)} = \mathrm{e}^{\ln x^6} = x^6.$$

Podstawiamy to do (4.24)

$$f_2(x) = f_1(x)\int x^6\,\frac{dx}{x^6} = x^3 \cdot x = x^4.$$

Znaleźliśmy drugie rozwiązanie. Jest ono liniowo niezależne od pierwszego, co pozostawiam do samodzielnego sprawdzenia. Ogólne rozwiązanie równania (4.25) jest kombinacją liniową

$$y(x) = C_1f_1(x) + C_2f_2(x) = C_1x^3 + C_2x^4.$$

Należy zaznaczyć, że znalezienie choćby jednego rozwiązania f_1 w ogólnym przypadku, gdy p i q są dowolnymi funkcjami, nie jest łatwe. Sprawa staje się prostsza, gdy współczynniki przy funkcji i poszczególnych pochodnych są jednomianami o potęgach rosnących wraz z rzędem pochodnej, np.

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0. \tag{4.26}$$

Wtedy można szukać rozwiązania w postaci funkcji potęgowej $y(x) = x^\beta$. Mamy wtedy $y'(x) = \beta x^{\beta-1}$, $y''(x) = \beta(\beta-1)x^{\beta-2}$; wstawiamy to do równania

$$ax^2\cdot\beta(\beta-1)x^{\beta-2}+bx\cdot\beta x^{\beta-1}+cx^\beta = a\beta(\beta-1)x^\beta+b\beta x^\beta+cx^\beta = [a\beta(\beta-1)+b\beta+c]x^\beta = 0.$$

Skoro ma to zachodzić dla dowolnych x z pewnej dziedziny, to musi być

$$a\beta(\beta-1) + b\beta + c = 0,$$

$$a\beta^2 + (b-a)\beta + c = 0. \tag{4.27}$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe na niewiadomą β. Jeśli ma ono rozwiązania $\beta_1\,\beta_2$, to dają one dwa rozwiązania równania różniczkowego (4.26):

$$f_1(x) = x^{\beta_1}, \quad f_2(x) = x^{\beta_2}.$$

Jeśli $\beta_1 \neq \beta_2$, to te dwa rozwiązania są liniowo niezależne.

PRZYKŁAD 3a. Zastosujemy poznaną metodę do równania z Przykładu 3:

$$x^2y'' - 6xy' + 12y = 0.$$

W tym przypadku $a = 1$, $b = -6$, $c = 12$. Wstawiamy to do równania (4.27) otrzymując

$$\beta^2 - 7\beta + 12 = 0,$$

czyli po rozkładzie na czynniki

$$(\beta - 3)(\beta - 4) = 0.$$

To równanie ma dwa rozwiązania $\beta_1 = 3$ oraz $\beta_2 = 4$, które dają dwa liniowo niezależne rozwiązania równania różniczkowego: $f_1(x) = x^3$ oraz $f_2(x) = x^4$ takie same, jak w Przykładzie 3. Na mocy Twierdzenia 2 ogólne rozwiązanie równania ma postać

$$y(x) = C_1x^3 + C_2x^4.$$

Wróćmy do równania niejednorodnego, czyli (4.17)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x). \tag{4.17}$$

Twierdzenie 3. Rozwiązanie ogólne równania (4.17) jest sumą rozwiązania szczególnego tegoż równania i rozwiązania ogólnego odpowiadającego mu równania jednorodnego.

D o w ó d. Niech u_1 będzie rozwiązaniem szczególnym równania (4.17), tzn.

$$u_1'' + p(x)u_1' + q(x)u_1 = r(x), \tag{4.28}$$

natomiast y rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{4.19}$$

Wprowadzamy sumę $u = y + u_1$ do lewej strony równania (4.17):

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = (y + u_1)'' + p(x)(y + u_1)' + q(x)(y + u_1)$$

$$= [y'' + p(x)y' + q(x)y] + [u_1'' + p(x)u_1' + q(x)u_1] = 0 + r(x) = r(x).$$

Widzimy, że funkcja u rzeczywiście spełnia równanie (4.17). Jeśli y wyrazimy przez dwa rozwiązania fundamentalne równania jednorodnego:

$$u = C_1f_1 + C_2f_2 + u_1,$$

to widzimy, że zawiera dwie stałe dowolne, więc jest rozwiązaniem ogólnym. ■

Teraz poznamy sposób znalezienia szczególnego rozwiązania równania (4.17) – jest to **metoda uzmienniania stałych**. Szukamy rozwiązania w postaci (4.22), gdzie zamiast dwóch stałych C_1, C_2 wstawiamy dwie funkcje niewiadome v_1, v_2:

$$u(x) = v_1(x)f_1(x) + v_2(x)f_2(x). \tag{4.29}$$

Mając nie jedną, lecz dwie szukane funkcje, możemy narzucić na nie oprócz równania (4.28) jeszcze jeden warunek

$$v_1'(x)f_1(x) + v_2'(x)f_2(x) = 0. \tag{4.30}$$

Różniczkujemy wzór (4.29)

$$u'(x) = v_1'(x)f_1(x) + v_1(x)f_1'(x) + v_2'(x)f_2(x) + v_2(x)f_2'(x)$$

i korzystamy z (4.30)

$$u'(x) = v_1(x)f_1'(x) + v_2(x)f_2'(x).$$

Liczymy drugą pochodną

$$u''(x) = v_1'(x)f_1'(x) + v_1(x)f_1''(x) + v_2'(x)f_2'(x) + v_2(x)f_2''(x).$$

Wstawiamy otrzymane wyrażenia do lewej strony równania (4.28)

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = [v_1'(x)f_1'(x) + v_1(x)f_1''(x) + v_2'(x)f_2'(x) + v_2(x)f_2''(x)]$$

$$+p(x)[v_1(x)f_1'(x) + v_2(x)f_2'(x)] + q(x)[v_1(x)f_1(x) + v_2(x)f_2(x)].$$

Grupujemy wyrazy inaczej i piszemy prawą stronę równania (4.28)

$$v_1(x)[f_1'' + p(x)f_1' + q(x)f_1] + v_2(x)[f_2'' + p(x)f_2' + q(x)f_2] + v_1'(x)f_1'(x) + v_2'(x)f_2'(x) = r(x).$$

Skoro f_1 i f_2 spełniają równanie jednorodne, to nawiasy prostokątne znikają i zostaje równanie

$$v_1'(x)f_1'(x) + v_2'(x)f_2'(x) = r(x). \tag{4.31}$$

Łącząc to z rówaniem (4.30) mamy algebraiczny układ dwóch równań liniowych o dwóch niewiadowmych $v_1'(x)$, $v_2'(x)$. Wyznacznik układu równań (4.30,4.31) jest właśnie wyznacznikiem Wrońskiego. Skoro jest on niezerowy, to układ (4.30,4.31) ma jedyne rozwiązanie (jest to wiedza z algebry) $v_1'(x)$, $v_2'(x)$. Poprzez liczenie całek nieoznaczonych znajdujemy dwie funkcje $v_1(x), v_2(x)$.

PRZYKŁAD 4. Rozwiążemy równanie różniczkowe

$$x^2y'' - 6x\,y' + 12y = ax^5 + bx^4. \tag{4.32}$$

Zauważmy, że odpowiadające mu równanie jednorodne było rozważone w Przykładzie 3. Tam znaleźliśmy rozwiązania fundamentalne $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^4$. Ale gdy chcemy rozwiązać równanie niejednorodne, to najpierw musimy je zapisać w postaci (4.17) lub (4.28), czyli podzielić równanie (4.32) stronami przez x^2

$$y'' - \frac{6}{x}\,y' + \frac{12}{x^2}\,y = ax^3 + bx^2.$$

Według metody uzmienniania stałych powinniśmy rozwiązać układ dwóch algebraicznych równań liniowych (4.30,4.31), które teraz przyjmują postać

$$x^3v_1'(x) + x^4v_2'(x) = 0, \qquad 3x^2v_1'(x) + 4x^3v_2'(x) = ax^3 + bx^2.$$

Z pierwszego równania znajdujemy

$$v_1'(x) = -x\,v_2'(x) \tag{4.33}$$

i wstawiamy do drugiego

$$-3x^2 \cdot x\, v_2'(x) + 4x^3 v_2'(x) = ax^3 + bx^2,$$

$$x^3 v_2'(x) = ax^3 + bx^2, \qquad v_2'(x) = a + \frac{b}{x}.$$

Podstawienie tego do (4.33) daje

$$v_1'(x) = -ax - b.$$

Całkujemy oba rozwiązania

$$v_1(x) = -\frac{a}{2}\,x^2 - bx, \qquad v_2(x) = ax + b\ln x.$$

Skoro interesuje nas rozwiązanie szczególne, to nie piszemy stałych całkowania. W takim razie rozwiązanie szczególne ma postać

$$u(x) = v_1 f_1 + v_2 f_2 = \left(-\frac{a}{2}\,x^2 - bx\right) x^3 + (ax + b\ln x)\, x^4$$

$$= -\frac{a}{2}\,x^5 - bx^4 + ax^5 + bx^4 \ln x = \frac{a}{2}\,x^5 - bx^4 + bx^4 \ln x.$$

Zapisujemy teraz ogólne rozwiązanie równania (4.32)

$$y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^4 + \frac{a}{2}\,x^5 - bx^4 + bx^4 \ln x = C_1 x^3 + C_2' x^4 + \frac{a}{2}\,x^5 + bx^4 \ln x.$$

4.3.1 Jednorodne równania liniowe o stałych współczynnikach

Na początek udowodnimy pewien wzór z rachunku różniczkowego przydatny w następnych zagadnieniach. Jeśli $\lambda \in \mathbb{R}$, to znamy następujący wzór na pochodną funkcji wykładniczej:

$$\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Wykażemy jego prawdziwość również wtedy, gdy $\lambda \in \mathbb{C}$, a x jest zwykłą zmienną rzeczywistą, tzn.

$$\left[\mathrm{e}^{(a+bi)x}\right]' = (a+bi)\, \mathrm{e}^{(a+bi)x}. \tag{4.34}$$

Korzystamy z definicji funkcji wykładniczej o wykładniku zepolonym:

$$\mathrm{e}^{(a+bi)x} = \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{e}^{ibx} = \mathrm{e}^{ax}\,(\cos bx + i \sin bx).$$

Rózniczkujemy ten iloczyn

$$\left[\mathrm{e}^{(a+bi)x}\right]' = a\, \mathrm{e}^{ax}\,(\cos bx + i\sin bx) + b\, \mathrm{e}^{ax}\,(-\sin bx + i\cos bx).$$

Przed drugi nawias wyciągamy i i bierzemy pod uwagę to, że $1/i = -i$:

$$\left[\mathrm{e}^{(a+bi)x}\right]' = a\, \mathrm{e}^{ax}\,(\cos bx + i\sin bx) + bi\, \mathrm{e}^{ax}\,(i\sin bx + \cos bx)$$

$$(a+bi)\, \mathrm{e}^{ax}\,(\cos bx + i\sin bx) = (a+bi)\, \mathrm{e}^{(a+bi)x},$$

a to właśnie jest równość (4.34), którą mieliśmy udowodnić. ■

Zajmiemy się teraz rozwiązaniem jednorodnego równania liniowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach:

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{4.35}$$

gdzie p, q są liczbami danymi. Podstawmy do tego równania funkcję postaci

$$y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}, \tag{4.36}$$

gdzie λ jest szukaną liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Wstawienie pierwszej i drugiej pochodnej oraz samej funkcji (4.36) do (4.35) daje

$$\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} + p\lambda\, \mathrm{e}^{\lambda x} + q\, \mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0.$$

Skoro funkcja wykładnicza jest niezerowa, to otrzymujemy równanie kwadratowe

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \tag{4.37}$$

które nazywamy **równaniem charakterystycznym** równania (4.35). Jeśli to równanie ma dwa różne rozwiązania $\lambda_1 \neq \lambda_2$, to wzór (4.36) daje dwa liniowo niezależne rozwiązania równania różniczkowego

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \quad \text{oraz} \quad f_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}. \tag{4.38}$$

Lemat 4. Jeśli wielomian (4.37) o współczynnikach rzeczywistych ma rozwiązanie zespolone $\lambda = a + bi$, to ma również rozwiązanie zespolono sprzężone $\lambda^* = a - bi$.

D o w ó d. Weźmy zespolone sprzężenie równania (4.37):

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)^* = (\lambda^2)^* + (p\lambda)^* + q^* = (\lambda^*)^2 + p^*\lambda^* + q^* = 0.$$

Skoro liczby p, q są rzeczywiste, to $p^* = p$, $q^* = q$ i otrzymujemy

$$(\lambda^*)^2 + p\lambda^* + q = 0.$$

A to oznacza, że liczba λ^* też jest rozwiązaniem równania (4.37). ■

Przypadek, kiedy równanie kwadratowe (4.37) ma dwa jednakowe pierwiastki, wymaga osobnego rozpatrzenia. Zachodzi to wtedy, gdy jego wyróżnik jest zerem: $\Delta = p^2 - 4q = 0$, a wówczas pojedynczy pierwiastek wyraża się wzorem

$$\lambda = -\frac{p}{2}. \tag{4.39}$$

W takim przypadku według wzoru (4.36) potrafimy utworzyć tylko jedno rozwiązanie $f_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{-px/2}$, a drugie rozwiązanie wyliczymy według wzoru (4.24):

$$f_2(x) = f_1(x) \int \mathrm{e}^{-P(x)} \frac{dx}{{f_1}^2} = f_1(x) \int \mathrm{e}^{-px} \frac{dx}{\mathrm{e}^{-px}} = f_1(x) \int dx = x\, \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Zatem w przypadku jednakowych pierwiastków równania kwadratowego (4.37) mamy następujące dwa liniowo niezależne rozwiązania równania (4.35):

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \quad \text{oraz} \quad f_2(x) = x\, \mathrm{e}^{\lambda x}. \tag{4.40}$$

Przekonajmy się przez sprawdzenie, że f_2 jest rzeczywiście rozwiązaniem równania. Pochodne wynoszą

$$f_2'(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} + x\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \quad f_2''(x) = 2\lambda\mathrm{e}^{\lambda x} + x\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Podstawiamy to do równania (4.35):

$$2\lambda\mathrm{e}^{\lambda x} + x\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x} + p\left(\mathrm{e}^{\lambda x} + x\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x}\right) + qx\,\mathrm{e}^{\lambda x} = x\,\mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) + \mathrm{e}^{\lambda x}(2\lambda + p).$$

Pierwszy nawias po prawej stronie jest zerem, ponieważ λ jest pierwiastkiem równania (4.37), drugi nawias jest zerem na mocy (4.39), tak więc rzeczywiście f_2 jest rozwiązaniem równania (4.35).

Przyjmujemy, że współczynniki p i q są liczbami rzeczywistymi. Aliści przy rozwiązaniu równania kwadratowego (4.37) pierwiastki mogą okazać się zespolone. Jeśli równanie (4.37) ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, to wzór (4.38) daje dwa liniowo niezależne rozwiązania rzeczywiste i rozwiązanie ogólne równania przyjmuje postać

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}. \tag{4.41}$$

Jeśli równanie (4.37) ma pierwiastki zespolone, to na mocy Lematu 4 muszą one być do siebie sprzężone, więc wzory (4.38) dają rozwiązania

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{(a+\beta i)x} = \mathrm{e}^{ax}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

$$f_2(x) = \mathrm{e}^{(a-\beta i)x} = \mathrm{e}^{ax}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Rozwiązanie ogólne takiego równania przyjmuje więc postać

$$f(x) = C_1\mathrm{e}^{(a+\beta i)x} + C_2\mathrm{e}^{(a-\beta i)x} = \mathrm{e}^{ax}\left(C_1\mathrm{e}^{i\beta x} + C_2\mathrm{e}^{-i\beta x}\right), \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{ax}\left[C_1\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) + C_2\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right)\right] \\ &= \mathrm{e}^{ax}\left[C_1\cos\beta x + C_1 i\sin\beta x + C_2\cos\beta x - C_2 i\sin\beta x\right] \\ &= \mathrm{e}^{ax}\left[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\sin\beta x\right] = \mathrm{e}^{ax}[A\cos\beta x + B\sin\beta x]. \end{aligned}$$

To rozwiązanie może być rzeczywiste, jeśli $A, B \in \mathbb{R}$, tzn. jeśli suma $C_1 + C_2$ jest rzeczywista, a różnica $C_1 - C_2$ – urojona. Widzimy, że rozwiązanie ogólne jest kombinacją liniową dwóch rozwiązań rzeczywistych

$$\frac{1}{2}(f_1 + f_2) = \mathrm{e}^{ax}\cos\beta x, \quad \frac{1}{2i}(f_1 - f_2) = \mathrm{e}^{ax}\sin\beta x.$$

Te dwa rozwiązania są również liniowo niezależne, więc mogą tworzyć układ fundamentalny. W takim razie stwierdzamy, że w przypadku, gdy równanie (4.37) ma pierwiastki zepolone $\lambda_{1,2} = a \pm \beta i$, rozwiązanie ogólne równania (4.35) przyjmuje postać

$$y(x) = \mathrm{e}^{ax}(A\cos\beta x + B\sin\beta x). \tag{4.43}$$

W szczególnym przypadku, gdy $C_2 = C_1^*$, stałe $A = C_1 + C_2$ oraz $B = i(C_1 - C_2)$ są rzeczywiste – wtedy rozwiązanie (4.43) jest rzeczywiste.

Wreszcie, jeśli równanie (4.37) ma jedno podwójne rozwiązanie λ, to na mocy (4.40) rozwiązanie ogólne równania różniczkowego przyjmuje postać

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{\lambda x}. \tag{4.44}$$

PRZYKŁAD 5. *Oscylator harmoniczny.* Rozpatrzmy jednowymiarowy ruch ciała o masie $m$pod wpływem siły sprężystej proporcjonalnej do wychylenia

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

gdzie stała sprężystości jest dodatnia: $k > 0$. Znak minus po prawej stronie oznacza, że siła jest nawracająca, czyli dąży do cofnięcia ciała do położenia równowagi. Wprowadziwszy nowy parametr $\omega^2 = k/m$ zapisujemy to równanie w innej postaci:

$$x'' + \omega^2 x = 0.$$

Otrzymujemy liniowe jednorodne równanie różniczkowe dugiego rzędu postaci (4.35). Wiemy, że powinniśmy teraz rozwiązać równanie charakterystyczne (4.37), które przyjmuje postać

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

Ma ono dwa rozwiązania urojone: $\lambda_1 = i\omega,\ \lambda_2 = -i\omega$. Skoro nie ma w nich części rzeczywistej, to w rozwiązaniu ogólnym (4.43) nie ma czynnika wykładniczego:

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t. \tag{4.45}$$

Rozpatrzmy dwa typy warunków początkowych.

a) Wychylenie bez prędkości początkowej: $x(0) = a,\ x'(0) = 0$. Wstawienie tego do rozwiązania (4.45) daje $A = a,\ B = 0$, więc wtedy rozwiązanie szczególne ma postać

$$x(t) = a\cos\omega t$$

i widzimy, że wychlyenie początkowe jest amlitudą drgań.

b) Pchnięcie z położenia równowagi: $x(0) = 0,\ x'(0) = v_0$. Wstawienie tego do rozwiązania (4.45) daje $A = 0,\ B = v_0/\omega$ i rozwiązanie szczególne

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$$

Zauważamy, że amplituda jest proporcjonalna do prędkości początkowej.

W przypadku obu stałych całkowania różnych od zera ruch (4.45) też da się sprowadzić do drgania harmonicznego, ale z przesuniętą fazą. Trzeba wprowadzić nowy parametr δ poprzez wzory

$$\cos\delta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \sin\delta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

i zapisać rozwiązanie (4.45) inaczej:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t\right) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos\delta\cos\omega t + \sin\delta\sin\omega t) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega t - \delta). \end{aligned} \tag{4.46}$$

Tak więc widzimy już zapowiadane drganie harmoniczne. Ma ono amplitudę $\sqrt{A^2+B^2}$, ax fazę cofniętą o kąt δ względem drgania z przypadku a.

PRZYKŁAD 6. *Oscylator hamoniczny z tłumieniem.* Rozpatrzmy teraz ruch ciała pod wpływem dwóch sił: tej samej co przedtem siły sprężystości oraz siły oporu proporcjonalnej do prędkości i ze zwrotem przeciwnym do prędkości:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt},$$

gdzie $b > 0$. Po wprowadzeniu nowego parametru $\kappa = b/2m$ równanie to można zapisać inaczej:

$$x'' + 2\kappa x' + \omega^2 x = 0. \tag{4.47}$$

Nadal mamy liniowe jednorodne równanie różniczkowe dugiego rzędu postaci (4.35). Rozwiązujemy równanie charakterystyczne (4.37), które przyjmuje postać

$$\lambda^2 + 2\kappa\lambda + \omega^2 = 0.$$

Ma ono dwa rozwiązania:

$$\lambda_1 = -\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}, \qquad \lambda_2 = -\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}.$$

Te rozwiązania mogą być rzeczywiste lub zespolone zależnie od znaku wyrażenia pod pierwiastkiem. Jeśli siła oporu jest mała, tzn. jeśli $\kappa < \omega$, to wyrażenie pod znakiem pierwiastka jest ujemne i warto wprowadzić nowy parametr

$$\tilde{\omega}^2 = \omega^2 - \kappa^2. \tag{4.48}$$

Wtedy rozwiązania równania charakterystycznego zapiszemy

$$\lambda_1 = -\kappa + \sqrt{-\tilde{\omega}^2} = -\kappa + i\tilde{\omega}, \quad \lambda_2 = -\kappa - \sqrt{-\tilde{\omega}^2} = -\kappa - i\tilde{\omega}.$$

Stosownie do tego rozwiązanie ogólne (4.43) równania różniczkowego należy zapisać

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\kappa t}(A\cos\tilde{\omega}t + B\sin\tilde{\omega}t). \tag{4.49}$$

Wykonując przekształcenia podobne do tych, które pozwoliły przejść od wzoru (4.45) do (4.46), możemy tę funkcję zapisać jako

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\kappa t}\sqrt{A^2 + B^2}\cos(\tilde{\omega}t - \delta) \tag{4.50}$$

z kątem δ określonym tak samo, jak w Przykładzie 5. Widzimy, że jest to drganie harmoniczne z amplitudą $\sqrt{A^2 + B^2}\,\mathrm{e}^{-\kappa t}$ malejącą wykładniczo z czasem – stąd jego nazwa: **drganie tłumione**. Widzimy też, że częstość kołowa $\tilde{\omega}$ tych drgań jest mniejsza, niż częstość kołowa ω drgań oscylatora bez tłumienia.

PRZYKŁAD 7. *Rozładowanie kondensatora.* Rozważmy rozładowanie kondensatora o pojemności C przez obwód o oporze R i samoindukcji L. Wychodzimy od przyrównania spadku napięcia RI na oporze do sumy napięcia $U = Q/C$ na okładkach kondensatora i siły elektromotorycznej indukcji $-LdI/dt$:

$$RI = \frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt}.$$

Istnieje jeszcze związek między ładunkiem Q na jednej z okładek kondensatora a natężeniem prądu $I = -dQ/dt$, więc to równanie przepiszemy jako

$$-R\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2}.$$

Otrzymujemy więc jednorodne liniowe równanie różniczkowe II rzędu

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = 0.$$

Widzimy w tym formalne podobieństwo do równania (4.47) oscylatora harmonicznego z tłumieniem z podstawieniami $\kappa = R/2L$, $\omega^2 = 1/LC$. Widzimy, że gdyby nie było oporu elektrycznego, to nie byłoby tłumienia i drgania miałaby stałą amplitudę. W obecności oporu nie za dużego, tzn. dla $\kappa < \omega$ (czyli $R < 2\sqrt{L/C}$) występują drgania tłumione z częstością kołową dan wedlug (4.48) wzorem

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \kappa^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Rozwiazanie jest takie samo jak we wzorze (4.50):

$$Q(t) = \mathrm{e}^{-\kappa t}\sqrt{A^2 + B^2}\cos(\tilde{\omega}t - \delta).$$

4.3.2 Niejednorodne równania liniowe o stałych współczynnikach

Zajmijmy się równaniem niejednorodnym postaci

$$y'' + py' + qy = r(x), \tag{4.51}$$

gdzie p, q są jak poprzednio liczbami rzeczywistymi, a r jest daną funkcją zmiennej x. Dla znalezienia rozwiązania ogólnego tego równania wystarczy znaleźć jego rozwiązanie szczególne i dodać do rozwiązania ogólnego odpowiadającego mu równania jednorodnego (4.35). A rozwiązanie szczególne można znaleźć metodą uzmienniania stałych. Przerobimy to na przykładzie równania oscylatora harmonicznego z siłą wymuszającą, tzn.

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = r(t). \tag{4.52}$$

Odwołujemy się do rozwiązania ogólnego (4.45) równania jednorodnego i szukamy rozwiązania szczególnego równania (4.51) w postaci

$$u(t) = v_1(t)\cos\omega_0 t + v_2(t)\sin\omega_0 t \tag{4.53}$$

z dwiema szukanymi funkcjami v_1, v_2. Równania (4.30,4.31) dają w tym przypadku układ dwóch równań

$$v_1'\cos\omega_0 t + v_2'\sin\omega_0 t = 0,$$

$$-v_1'\sin\omega_0 t + v_2'\cos\omega_0 t = \frac{r(t)}{\omega_0}.$$

Ma on rozwiązania

$$v_1'(t) = -\frac{1}{\omega_0} r(t) \sin \omega_0 t, \quad v_2'(t) = \frac{1}{\omega_0} r(t) \cos \omega_0 t.$$

Funkcje pierwotne można zapisać w postaci całek oznaczonych ze zmienną górną granicą całkowania:

$$v_1(t) = -\frac{1}{\omega_0} \int_{t_0}^{t} r(\tau) \sin \omega_0 \tau \, d\tau, \quad v_2(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_{t_0}^{t} r(\tau) \cos \omega_0 \tau \, d\tau,$$

gdzie t_0 jest pewną liczbą ustaloną. Podstawmy to do wzoru (4.53):

$$u(t) = -\frac{\cos \omega_0 t}{\omega_0} \int_{t_0}^{t} r(\tau) \sin \omega_0 \tau \, d\tau + \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \int_{t_0}^{t} r(\tau) \cos \omega_0 \tau \, d\tau \tag{4.54}$$

$$= \frac{1}{\omega_0} \int_{t_0}^{t} r(\tau)(\sin \omega_0 t \cos \omega_0 \tau - \cos \omega_0 t \sin \omega_0 \tau) \, d\tau = \frac{1}{\omega_0} \int_{t_0}^{t} r(\tau) \sin \omega_0 (t - \tau) \, d\tau.$$

Trzeba tu zwrócić uwagę na pewną rzecz. Zmienna t występuje w całce w dwojakiej roli. Po pierwsze t jest jest górną granicą całki oznaczonej, a po drugie występuje pod znakiem całki nie jako zmienna całkowania, lecz jako dodatkowy parametr, który przy całkowaniu względem τ uważamy za stały. Możemy się przekonać, że rozwiązanie szczególne (4.54) spełnia zerowe warunki początkowe $u(t_0) = 0$, $u'(t_0) = 0$, gdyż podstawienie $t = t_0$ daje zerowe całki oznaczone.

W takim razie rozwiązanie ogólne równania (4.52) przyjmuje postać

$$y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \int_{t_0}^{t} r(\tau) \sin \omega_0 (t - \tau) \, d\tau.$$

PRZYKŁAD 5a. *Oscylator harmoniczny z harmoniczną siłą wymuszającą.* Wracamy do jednowymiarowego ruchu ciała pod wpływem siły sprężystej proporcjonalnej do wychylenia, ale tym razem z działającą dodatkowo okresową siłą zewnętrzną:

$$x'' + \omega_0^2 x = g \cos \omega t. \tag{4.55}$$

W tym równaniu występują dwie częstości kołowe: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ odpowiadająca drganiom własnym oscylatora oraz ω, z jaką zmienia się siła zewnętrzna. Tym razem zrezygnujemy z szukania rozwiązania szczególnego w postaci (4.54) i poszukamy go w postaci drgań z częstością siły zewnętrznej:

$$u(t) = a \cos \omega t.$$

Liczymy pochodne tej funkcji

$$u'(t) = -a\omega \sin \omega t, \qquad u''(t) = -a\omega^2 \cos \omega t$$

i wstawiamy do równania (4.55):

$$-a\omega^2 \cos \omega t + \omega_0^2 a \cos \omega t = g \cos \omega t,$$

$$a \left(\omega_0^2 - \omega^2 \right) \cos \omega t = g \cos \omega t.$$

Skoro ma to zachodzić dla wszystkich czasów t, to musi być spełniona równość

$$a \left(\omega_0^2 - \omega^2 \right) = g.$$

Jeśli $\omega \neq \omega_0$, to otrzymujemy

$$a = \frac{g}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Zatem rozwiązanie szczególne ma postać

$$u(t) = \frac{g}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \tag{4.56}$$

Teraz możemy zapisać rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (4.55)

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{g}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t.$$

Widzimy, że jest ono złożeniem dwóch drgań: jednego z częstością ω_0 odpowiadającą samemu oscylatorowi (nazywamy ją **częstością własną**) oraz drugiego z częstością ω siły zewnętrznej, które nazywamy **drganiem wymuszonym**. Amplituda tego drugiego niezależy od warunków początkowych i wyraźnie rośnie, gdy częstość siły wymuszającej zbliża się do częstości własnej oscylatora. Odpowiada to zjawisku **rezonansu**.

PRZYKŁAD 6a. *Oscylator z tłumieniem i harmoniczną siłą wymuszającą.* Rozważamy ruch ciała pod wpływem trzech sił: siły sprężystości, siły oporu oraz okresowej siły zewnętrznej:

$$x'' + 2\kappa x' + \omega_0^2 x = g \cos \omega t. \tag{4.57}$$

Teraz poznamy wybieg często stosowany w fizyce. Zastępujemy wyraz określający siłę przez wyrażenie zespolone

$$g\mathrm{e}^{i\omega t} = g(\cos \omega t + i \sin \omega t),$$

a po znalezieniu rozwiązania weźmiemy jego część rzeczywistą, bo w równaniu (4.57) stoi część rzeczywista tej zespolonej siły. W takim razie rozwiązania szczególnego szukamy w postaci zespolonej funkcji okresowej o okresie siły zewnętrznej

$$z(t) = Z_0 \mathrm{e}^{i\omega t}. \tag{4.58}$$

Wstawiamy pochodne tej funkcji do równania (4.57):

$$-\omega^2 Z_0 \mathrm{e}^{i\omega t} + 2\kappa i \omega Z_0 \mathrm{e}^{i\omega t} + \omega_0^2 Z_0 \mathrm{e}^{i\omega t} = g\mathrm{e}^{i\omega t}.$$

Po uproszczeniu stronami przez funkcję wykładniczą zostaje

$$-\omega^2 Z_0 + 2\kappa i \omega Z_0 + \omega_0^2 Z_0 = g.$$

Stąd wyliczamy stałą Z_0

$$Z_0 = \frac{g}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\kappa\omega}.$$

Mnożymy licznik i mianownik przez sprzężenie mianownika:

$$Z_0 = \frac{g(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\kappa\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}.$$

Wstawiamy to do wzoru (4.58)

$$z(t) = \frac{g(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\kappa\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}(\cos \omega t + i \sin \omega t).$$

Mnożymy oba nawiasy zespolone, aby lepiej zobaczyć część rzeczywistą całości

$$z(t) = \frac{g}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\kappa^2\omega^2}\,[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t + 2\kappa\omega\sin\omega t - 2i\kappa\omega\cos\omega t + i(\omega_0^2-\omega^2)\sin\omega t].$$

Teraz już możemy wskazać część rzeczywistą tego rozwiązania:

$$u(t) = \operatorname{Re} z(t) = \frac{g}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\kappa^2\omega^2}\,[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t + 2\kappa\omega\sin\omega t].$$

I to uznajemy za szczególne rozwiązanie równania różniczkowego (4.57). Jeśli zapiszemy to inaczej

$$u(t) = \frac{g}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\kappa^2\omega^2}}\left[\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\kappa^2\omega^2}}\cos\omega t + \frac{2\kappa\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\kappa^2\omega^2}}\sin\omega t\right]$$

i wprowadzimy kąt δ poprzez wzory

$$\cos\delta = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\kappa^2\omega^2}}, \qquad \sin\delta = \frac{2\kappa\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\kappa^2\omega^2}},$$

to możemy wprowadzić przesunięcie fazowe

$$u(t) = \frac{g}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\kappa^2\omega^2}}\,(\cos\delta\cos\omega t + \sin\delta\sin\omega t),$$

$$u(t) = \frac{g}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\kappa^2\omega^2}}\,\cos(\omega t-\delta).$$

Widzimy teraz wyraźnie, że jest to drganie w rytmie siły wymuszającej, ale z pewnym przesunięciem fazowym. Amplituda tych drgań jest zadana przez stałe występujące w równaniu i nie zależy od warunków początkowych. Zuważmy, że dla nieobecnej siły tłumiącej, czyli $\kappa = 0$ to rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania (4.56).

Teraz możemy zapisać ogólne rozwiązanie równania niejednorodnego (4.57) z wykorzystaniem rozwiązania ogólnego (4.49):

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\kappa t}(A\cos\tilde\omega t + B\sin\tilde\omega t) + \frac{g}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\kappa^2\omega^2}}\,\cos(\omega t-\delta),$$

gdzie według (4.48) $\tilde\omega = \sqrt{{\omega_0}^2-\kappa^2}$. Widzimy, że jest ono złożeniem dwóch drgań: jednego z częstością $\tilde\omega$ i z zanikającą amplitudą oraz drugiego z częstością siły zewnętrznej, które ma stałą amplitudę. Z powodu czynnika wykładniczego pierwsze drganie bardzo szybko zanika i praktycznie pozostaje tylko drganie wymuszone. Jego amplituda jest dana wzorem

$$a(\omega) = \frac{g}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\kappa^2\omega^2}}.$$

i wyraźnie zależy od częstości drgań siły wymuszającej. Jak można się przekonać przez wyliczenie pochodnej, jest ona największa dla $\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2-2\kappa^2}$, wtedy wynosi ona

$$a(\omega_r) = \frac{g}{2\kappa\sqrt{\omega_0^2-\kappa^2}} = \frac{g}{2\kappa\tilde\omega}.$$

Jest to zjawisko rezonansu, dlatego ω_r nazywa się **częstością rezonansową**; jest ona mniejsza od częstości $\tilde\omega$ drgań bez siły wymuszającej. Proszę zauważyć, że gdyby nie było tłumienia, czyli byłoby $\kappa = 0$, to w przypadku rezonansu byłaby katastrofa – amplituda stałaby się nieskończona dla $\omega = \omega_0$.

4.4 Równania liniowe wyższych rzędów

Równania liniowe rzędów wyższych mają wiele własności rozwiązań rzędu drugiego. Sformułujemy je tutaj nie podając dowodów.

Liniowym jednorodnym równaniem różniczkowym rzędu n nazywamy równanie postaci

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{4.59}$$

Zasada superpozycji. Jeśli y_1, y_2, ... y_k są rozwiązaniami tego równania, to przy dowolnych stałych C_1, C_2, ... C_k kombinacja liniowa

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ky_k$$

jest również rozwiązaniem. Dowód tego zdania wygląda tak samo, jak dowód Lematu 1 z poprz. paragrafu. W takim razie zbiór rozwiązań jednorodnego liniowego równania różniczkowego jest linealem.

Rozwiązania $y_1, y_2, \ldots, y_k$ równania (4.59) nazywamy **liniowo niezależnymi**, jeśli związek

$$\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) + \ldots + \alpha_ky_k = 0, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$$

o stałych współczynnikach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ jest spełniony tylko przy wszystkich stałych równych zero.

Do badania, czy dane funkcje f_1, f_2, ... f_k są liniowo niezależne, służy **wyznacznik Wrońskiego**:

$$W(f_1(x), f_2(x), \ldots f_k(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_k(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_k'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \ldots & f_k''(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(k-1)}(x) & f_2^{(k-1)}(x) & \ldots & f_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Jeśli $W(f_1(x), f_2(x), \ldots f_k(x)) \neq 0$ przynajmniej w jednym punkcie x, to funkcje f_1, f_2, ... f_k są liniowo niezależne.

Jeśli f_1, f_2, ... f_n są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania (4.59), to wzór

$$y = C_1f_1 + C_2f_2 + \ldots + C_nf_n$$

z dowolnymi stałymi C_1, C_2, ... C_n daje wszystkie rozwiązania tego równania. To oznacza, że lineał rozwiązań równania (4.59) ma wymiar n. Dobierając stałe C_i możemy otrzymać jedno i tylko jedno rozwiązanie spełniające dowolnie zadane warunki początkowe:

$$y(x_0) = \alpha_1, \quad y'(x_0) = \alpha_2, \quad y''(x_0) = \alpha_3, \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x) = \alpha_n.$$

Liniowe niejednorodne równanie różniczkowe rzędu n ma postać

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = r(x). \tag{4.60}$$

Jeśli u_1 jest jakimkolwiek szczególnym rozwiązaniem tego równania, a $f_1,\ f_2,\ ...\ f_n$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami odpowiadającego mu równania (4.59), to wzór

$$y = C_1 f_1 + C_2 f_2 + \ .. \ + C_n f_n + u_1$$

z dowolnymi stałymi $C_1,\ C_2,\ ...\ C_n$ daje ogólne rozwiązanie równania (4.60). Poza tym, jeśli znamy liniowo nieazależne rozwiązania $f_1,\ f_2,\ ...\ f_n$, to szczególne rozwiązanie równania (4.60) można otrzymać metodą uzmienniania stałych:

$$u = v_1(x) f_1 + v_2(x) f_2 + \ .. \ + v_n(x) f_n,$$

gdzie funkcje v_i wyznaczamy z algebraicznego układu równań liniowych

$$\begin{array}{l} v_1'(x) f_1 \ + \ v_2'(x) f_2 \ + \ .. \ + \ v_n'(x) f_n \ = 0, \\ v_1'(x) f_1' \ + \ v_2'(x) f_2' \ + \ .. \ + \ v_n'(x) f_n' \ = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_1'(x) f_1^{(n-2)} + v_2'(x) f_2^{(n-2)} + \ .. \ + v_n'(x) f_n^{(n-2)} = 0, \\ v_1'(x) f_1^{(n-1)} + v_2'(x) f_2^{(n-1)} + \ .. \ + v_n'(x) f_n^{(n-1)} = r(x). \end{array}$$

Szczególnym przypadkiem jest równanie liniowe o stałych współczynnikach; najpierw jednorodne

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ .. \ + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{4.61}$$

a potem niejednorodne

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ .. \ + a_{n-1} y' + a_n y = r(x).$$

Rozwiązania równania (4.61) szuka się w postaci wykładniczej $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, wtedy otrzymuje się następujące **równanie charakterystyczne** równania (4.61):

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ .. \ + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \tag{4.62}$$

Jeśli to równanie ma n różnych pierwiastków $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...\ \lambda_n \in \mathbb{C}$, czyli da się zapisać

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0,$$

to istnieje n niezależnych liniowo rozwiązań w postaci wykładniczej

$$f_j(x) = \mathrm{e}^{\lambda_j x}, \quad j \in \{1, ..., n\}. \tag{4.63}$$

Jeśli natomiast równanie charakterystyczne ma pierwiastki wielokrotne $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...\lambda_m$, czyli da się zapisać

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m} = 0,$$

z krotnościami $k_1,\ k_2 \ldots k_m$ spełniającymi warunek

$$k_1 + k_2 + \ \ldots \ + k_m = n, \tag{4.64}$$

to oprócz rozwiązań postaci (4.63) istnieją jeszcze rozwiązania postaci

$$f_j(x) = P_{k_j - 1}(x) \mathrm{e}^{\lambda_j x}, \quad j \in \{1, ..., m\}. \tag{4.65}$$

gdzie P_{k_j-1} jest wielomianem stopnia $\leq k_j - 1$ o dowolnych współczynnikach. Z powodu dowolności współczynników mogą wystąpić różne takie wielomiany, wśród nich mogą być liniowo niezależne w liczbie nie większej niż k_j. Zbiór takich wielomianów jest więc lineałem o wymiarze k_j. Dodając wszystkie rozwiązania (4.65) otrzymujemy ogólne rozwiązanie równania (4.61):

$$y(x) = P_{k_1-1}(x)\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + P_{k_2-1}(x)\mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \ldots + P_{k_m-1}(x)\mathrm{e}^{\lambda_m x} = \sum_{j=1}^{m} P_{k_j-1}(x)\mathrm{e}^{\lambda_j x}. \quad (4.66)$$

Każdy wielomian P_{k_j-1} o dowolnych współczynnikach zawiera k_j dowolnych stałych, zatem na mocy związku (4.64) rozwiązanie (4.66) zawiera ogółem n dowolnych stałych.

Wśród pierwiastków równania (4.62) o współczynnikach rzeczywistych mogą być również pierwiastki zespolone, ale zawsze w parach λ_j, λ_j^*. Odpowiadające im rozwiązania (4.65) możemy doprowadzić do postaci rzeczywistej przekształcając funkcje wykładnicze w trygonometryczne. Załóżmy, że równanie (4.62) ma parę rozwiązań zespolonych $a \pm i\beta$ o krotności l. Odpowiada im rozwiązanie postaci

$$S_{l-1}(x)\mathrm{e}^{(a+i\beta)x} + T_{l-1}(x)\mathrm{e}^{(a-i\beta)x} = \mathrm{e}^{ax}\left[S_{l-1}(x)\mathrm{e}^{i\beta x} + T_{l-1}(x)\mathrm{e}^{-i\beta x}\right],$$

gdzie S_{l-1}, T_{l-1} są wielomianami stopnia $l-1$ o dowolnych współczynnikach. Podstawiając

$$\mathrm{e}^{\pm i\beta x} = \cos\beta x \pm i\sin\beta x$$

otrzymujemy rozwiązanie postaci

$$\mathrm{e}^{ax}\left[U_{l-1}(x)\cos\beta x + V_{l-1}(x)\sin\beta x\right],$$

gdzie U_{l-1}, V_{l-1} są wielomianami związanymi z S_{l-1} i T_{l-1} wzorami

$$U_{l-1} = S_{l-1} + T_{l-1}, \qquad V_{l-1} = i(S_{l-1} - T_{l-1}).$$

Z tych rozważań wynika następująca reguła.

Aby rozwiązać równanie (4.61), należy zapisać odpowiadające mu równanie charakterystyczne (4.62) i znaleźć jego pierwiastki. Każdemu pierwiastkowi rzeczywistemu λ o krotności k odpowiada rozwiązanie postaci

$$P_{k-1}(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x},$$

gdzie P_{k-1} jest wielomianem stopnia $\leq k-1$ o dowolnych współczynnikach. Każdej parze sprzężonych pierwiastków zespolonych $a \pm i\beta$ o krotności l odpowiada rozwiązanie postaci

$$\mathrm{e}^{ax}\left[U_{l-1}(x)\cos\beta x + V_{l-1}(x)\sin\beta x\right], \quad (4.67)$$

gdzie U_{l-1}, V_{l-1} są wielomianami stopnia $\leq l-1$ o dowolnych współczynnikach. Dodając wszystkie otrzymane w ten sposób rozwiązania dostajemy ogólne rozwiązanie równania (4.61). W przypadku pierwiastków λ pojedynczych wymienione wielomiany są dowolnymi stałymi.

PRZYKŁAD 1. Rozwiążmy równanie różniczkowe

$$x^{(4)} + 2bx'' + cx = 0. \tag{4.68}$$

Odpowiada mu równanie charakterystyczne

$$\lambda^4 + 2b\lambda^2 + c = 0. \tag{4.69}$$

Powinniśmy rozpoznać w nim równanie dwukwadratowe; rozwiązuje się je przez podstawienie $\lambda^2 = \tau$:

$$\tau^2 + 2b\tau + c = 0.$$

To już jest zwykłe równanie kwadratowe, jego rozwiązania mają postać

$$\tau_1 = -b + \sqrt{b^2 - c}, \quad \tau_2 = -b - \sqrt{b^2 - c}.$$

Jeśli są to różne rozwiązania, to znajdujemy cztery pierwiastki równania (4.69):

$$\lambda_1 = \sqrt{\tau_1} = \sqrt{-b + \sqrt{b^2 - c}}, \qquad \lambda_2 = -\sqrt{\tau_1} = -\sqrt{-b + \sqrt{b^2 - c}},$$

$$\lambda_3 = \sqrt{\tau_2} = \sqrt{-b - \sqrt{b^2 - c}}, \qquad \lambda_4 = -\sqrt{\tau_2} = -\sqrt{-b - \sqrt{b^2 - c}}.$$

Nie troszczymy się o to, aby wyrażenia pod znakami pierwiastków były nieujemne, gdyż dopuszczamy rozwiązania zespolone. Nawet zależy nam na zespolonych λ_i, gdyż równanie (4.68) wzięte jest z zagadnień dotyczących drgań, mianowicie tzw. wahadła podwójnego. Jeśli obie stałe b, c są dodatnie oraz $b^2 > c$, to τ_1 i τ_2 są ujemne i wtedy wszystkie pierwiastki λ_j są urojone:

$$\lambda_1 = i\omega_1, \quad \lambda_2 = -i\omega_1, \quad \lambda_3 = i\omega_2, \quad \lambda_4 = -i\omega_2,$$

gdzie

$$\omega_1^2 = -\tau_1 = b - \sqrt{b^2 - c}, \quad \omega_2^2 = -\tau_2 = b + \sqrt{b^2 - c}.$$

Już wiemy, że dla rozwiązań w postaci funkcyj wykładniczych o urojonych wykładnikach lepiej jest brać funkcje trygonometryczne. W takim razie ogólne rozwiązanie równania (4.68) ma postać

$$x(t) = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t + C\cos\omega_2 t + D\sin\omega_2 t.$$

Możemy ten przykład skonkretyzować przyjmując $b = c = 1$, wtedy jako równanie (4.68) mamy

$$x^{(4)} + 2x'' + x = 0. \tag{4.70}$$

Jego równanie charakterystyczne ma postać

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda^2 - i^2)^2 = (\lambda - i)^2(\lambda + i)^2 = 0,$$

więc są dwa pierwiastki podwójne: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Przy pierwiastkach wielokrotnych należy pisać wielomiany, więc zgodnie z wzorem (4.66) w wersji wykładników urojonych, czyli z wzorem (4.67) mamy ogólne rozwiązanie równania (4.70) w postaci

$$x(t) = (A + Bt)\cos t + (C + Dt)\sin t.$$

PRZYKŁAD 2. Zajmijmy się równaniem niejednorodnym

$$x^{(4)} + 2bx'' + cx = g \tag{4.71}$$

ze stałą g. Odpowiadającym mu równaniem jednorodnym jest właśnie (4.68). Jak zawsze w takich przypadkach, potrzebne nam jest szczególne rozwiązanie równania (4.71). Jeśli prawa strona jest stała, to warto szukać tego rozwiązania w postaci funkcji stałej $u(t) = \text{const}$. Wtedy wszystkie pochodne są zerami i z równania (4.71) pozostaje

$$cu = g.$$

Jego rozwiązaniem jest

$$u(t) = \frac{g}{c}.$$

Kto chce, może się przekonać, że metoda uzmieniania stałych daje ten sam wynik, ale będzie to wymagać wielu rachunków. W takim razie dla b i c spełniających warunki $b^2 > c > 0$ rozwiązanie ogólne równania (4.71) ma postać

$$x(t) = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t + C\cos\omega_2 t + D\sin\omega_2 t + \frac{g}{c},$$

gdzie ${\omega_1}^2 = b - \sqrt{b^2 - c}, \quad {\omega_2}^2 = b + \sqrt{b^2 - c}.$