Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego
dla I roku fizyki bis

Lista 10 8 XII 2004

1. Niech $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Mamy funkcję $f : D_f \to \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

a) Znaleźć poziomice tej funkcji.

b) Wyliczyć z definicji pochodną dążnościową tej funkcji z dążnością $\mathbf{v} = (1, \alpha)$ w różnych punktach prostej $y = \alpha x$. Porównać wyniki podpunktów a i b.

2. Mamy funkcję $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do poziomicy tej funkcji w punkcie $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Uczynić to samo dla funkcji $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ danej wzorem $g(x,y,z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}^+$ w tym samym punkcie $\mathbf{a}$. Czym różnią się tak otrzymane płaszczyzny?

3. Dla podanych funkcyj wskazać dziedziny oraz wyliczyć po cztery pochodne cząstkowe drugiego rzędu:

$$\text{a) } f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \quad \text{b) } g(x,y) = \cos(xy^2), \quad \text{c) } h(x,y) = \frac{1}{\cos^2 x + \mathrm{e}^{-y}}.$$

Bernard Jancewicz