Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego

dla I roku fizyki bis

Lista 13 5 I 2005

1. Niech $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + .., {x_n}^2}$ oraz $U \subset \mathbb{R}^n$. Określamy funkcję $f : U \to \mathbb{R}$ wzorem $f(\mathbf{x}) = \phi(r)$. Udowodnić równość

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \phi'(r)\frac{\mathbf{x}}{r}.$$

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wynik ten interpretujemy w zdaniu: gradient funkcji o symetrii kulistej jest równoległy do wektora wodzącego.

2. Wykorzystując poprzednie zadanie wyliczyć gradienty funkcyj:

$$\text{a) } \frac{a}{r}, \qquad \text{b) } \frac{\mathrm{e}^r}{r}.$$

3. Niech f będzie polem skalarnym, a $\mathbf{F}$ – polem wektorowym w $\mathbb{R}^3$. Udowodnić tożsamości

a) $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div}\mathbf{F} + (\operatorname{grad} f) \cdot \mathbf{F}$,

b) $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{rot} \mathbf{F} + (\operatorname{grad} f) \times \mathbf{F}$,

4. Niech $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ – pola wektorowe. Udowodnić tożsamości

a) $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$,

b) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{F}) - \Delta\mathbf{F}$,

5. Niech $\mathbf{a}$ – ustalony wektor. Wyliczyć $\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$ oraz $\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$.

6. Niech $\mathbf{a}$ – ustalony wektor. Wyliczyć $\operatorname{grad} |\mathbf{a} \times \mathbf{r}|^2$.

7. Wykorzystując zadania 3, 5 i 6 wyliczyć rotację i dywergencję pola wektorowego

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{r}|^2},$$

gdzie $\mathbf{a}$ jest ustalonym wektorem.

Bernard Jancewicz