Wykład 4: Fraktale deterministyczne i stochastyczne

Fizyka komputerowa 2005
Katarzyna Weron,
kweron@ift.uni.wroc.pl

Co to jest fraktal?

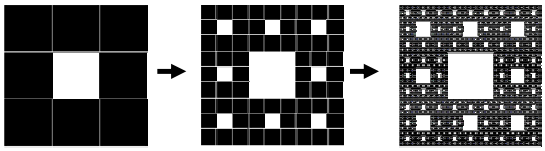
- Złożona budowa – dowolnie mały jego fragment jest równie skomplikowany jak całość.
- Samopodobieństwo - dowolnie mały jego kawałek, odpowiednio powiększony, przypomina do złudzenia cały zbiór lub jego znaczną część.
- Wymiar fraktalny jest liczbą niecałkowitą.

Klasyfikacja fraktali

- Fraktale deterministyczne
  - **geometryczne – złożone z pomniejszonych kopii całości np. Zbiór Cantora, krzywa Kocha**
  - algebraiczne - iteracja funkcji nieliniowych: zbiór Mandelbrota, zbiory Julii, drzewo Feigenbauma itd..
- Fraktale stochastyczne
  - Trajektoria błądzenia losowego
  - DLA
  - klaster perkolujący

Dywan Sierpińskiego

- Każdy kwadrat dzielimy na dziewięć równych części i usuwamy środkową



krok 1 krok 2 krok 5

Jakie jest pole powierzchni dywanu Sierpińskiego?

- Bok kwadratu równy 1
- W pierwszym kroku usuwamy kwadrat o boku 1/3, tzn. o polu 1/9.
- W drugim kroku usuwamy 8 kwadratów o długości boku (1/3)^2. Pole powierzchni każdego z nich jest równe (1/3)^4. Suma pól powierzchni kwadratów usuniętych w drugim kroku wynosi 8* (1/3)^4.

Jakie jest pole powierzchni dywanu Sierpińskiego?

- W k-tym kroku usuwamy 8^(k-1) kwadratów o długości boku (1/3)^k.
- Po k krokach suma usuniętych pól:
- Pole powierzchni dywanu = 1-1=0

$$\frac{1}{9}+\frac{8}{9^2}+\frac{8^2}{9^3}+\cdots+\frac{8^{k-1}}{9^k}$$

$$=\frac{1}{9}\left(1+\frac{8}{9}+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^3+\cdots+\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{1-\left(\frac{8}{9}\right)^k}{\frac{1}{9}}\right)=1-\left(\frac{8}{9}\right)^k$$

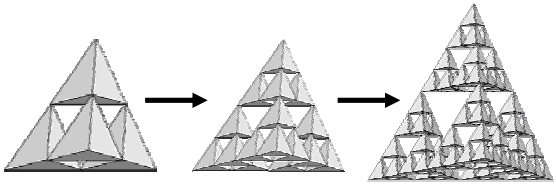
Trójkąt Sierpińskiego

- Środki boków trójkąta łączymy odcinkami i usuwamy środkowy trójkąt.

(c) 2003 K&R Weron

Piramida Sierpińskiego

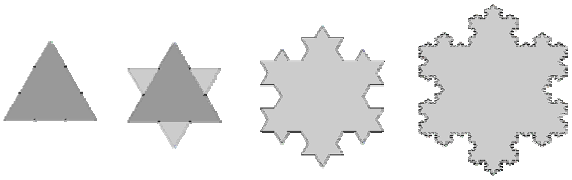
- Łączymy odcinkami środki krawędzi czworościanu i usuwamy bryłę, której krawędziami są te odcinki.



(c) 2003 K&R Weron

Płatek śniegu, Koch 1904

- Każdy bok trójkąta dzielimy na trzy równe części i doklejamy do części środkowej, tak jak na rysunku, trójkąt równoboczny o boku trzy razy krótszym.



(c) 2003 K&R Weron

Zbiór Cantora

N	ε
1	1
2	1/3
4	1/9
8	1/27

$$d_c = \lim_{n \to \infty} \log 2^n / \log 3^n$$

$$d_c = \log 2 / \log 3 < 1$$

(c) 2003 K&R Weron

Wymiar fraktalny samopodobieństwa

- Dla dowolnego obiektu samopodobnego istnieje związek między współczynnikiem redukcji s (skalą), a liczbą części n na które obiekt może być podzielony:

$$n = s^{-D}$$

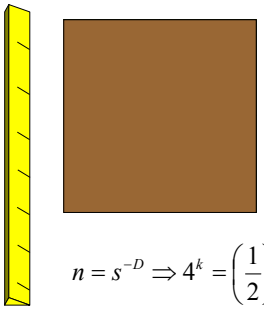
(c) 2003 K&R Weron

Wymiary samopodobieństwa:

obiekt	skala	liczba elementów	wymiar
Krzywa Kocha	(1/3)^k	4^k	log4/log3
Zbiór Cantora	(1/3)^k	2^k	log2/log3
Trójkąt Sierpińskiego	(1/2)^k	3^k	log3/log2

(c) 2003 K&R Weron

Co to jest wymiar?



skala s	liczba n
1/8	64=4^4
1/4	16=4^2
1/2	4=4^1
1	1=4^0

$$n = s^{-D} \Rightarrow 4^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{-kD} \Rightarrow 4 = 2^D \Rightarrow D = 2$$

Skala podwójnie logarytmiczna (log-log scale)

$$y = a \cdot x^b$$

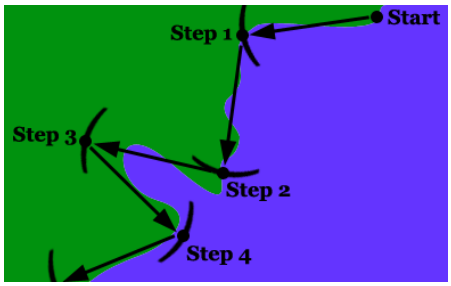
$$\log y = \log a + b \log x$$

$$y' = \log y, x' = \log x$$

$$y' = \log a + bx'$$

nachylenie prostej

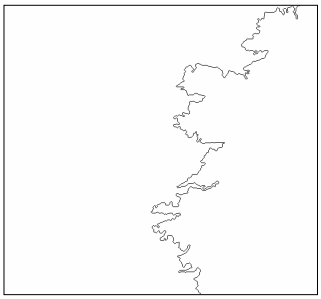
Jak zmierzyć linię brzegową?



Wybrzeże - linia prosta

L	N	długość
50	13	650
20	32	640
5	126	630

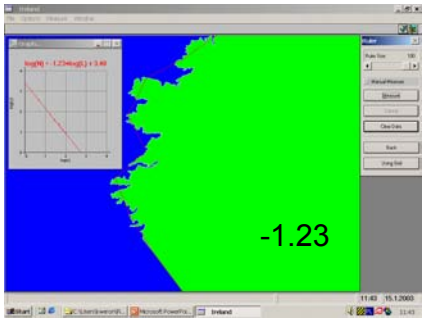
Wybrzeże Irlandii



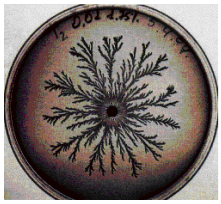
Długość wybrzeża Irlandii

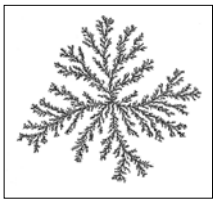
L	N	długość
50	22	1100
20	66	1320
5	349	1745

Irlandia w log-log



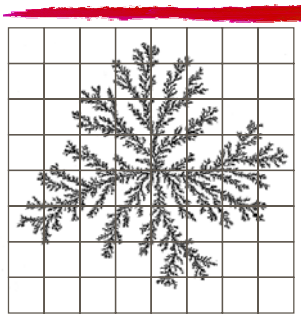
Zlepek DLA też jest fraktalem





Można go skonstruować przez prosty proces stochastyczny (poprzedni wykład)

Jaki jest wymiar (fraktalny) DLA ?



Boxcounting:

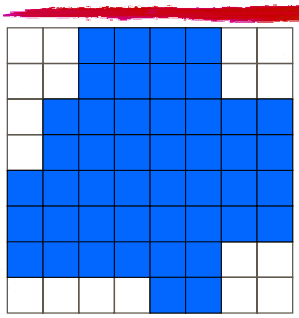
Bok:

L=1/8

Liczba pudełek o boku L potrzebnych do pokrycia DLA

N(L)=?

Wymiar pudełkowy (metoda *boxcounting*)



Boxcounting:

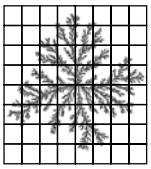
Bok:

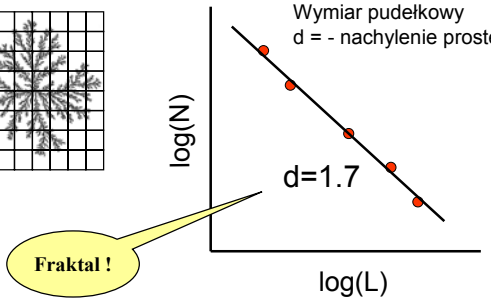
L=1/8

Liczba pudełek o boku L potrzebnych do pokrycia DLA

N(L)= 46

Narysuj to w log-log'u





Zbiory Julii

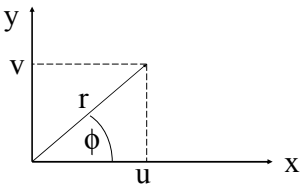
- Dla każdego punktu z_0 (zespolone) tworzymy ciąg z_1, z_2, z_3, ... iterując funkcję kwadratową

$$z \to z^2 + c$$

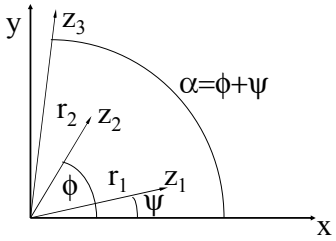
- Jeżeli ciąg nie ucieka do nieskończoności to punkt z_0 należy do zbioru więźniów W;
- Jeżeli ciąg ucieka do nieskończoności to z_0 należy do zbioru uciekinierów U;
- Granica między zbiorami W i U to zbiór Julii

Powtórka z liczb zespolonych

$$z = x + iy = r\exp(i\varphi)$$



Co to znaczy pomnożyć dwie liczby zespolone?

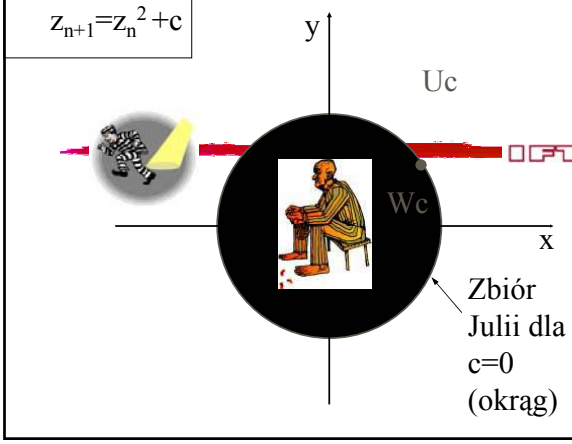


$$z_1 = r_1\exp(i\varphi)$$
$$z_2 = r_2\exp(i\psi)$$
$$z_3 = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi+\psi)}$$

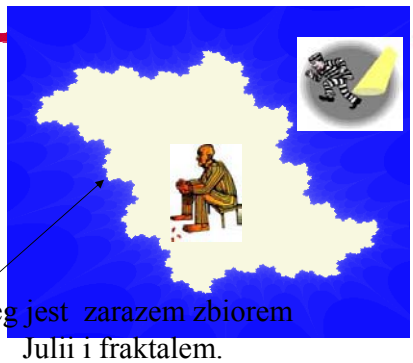
Dynamika przekształcenia z→ z^2

	Moduł z	argument ϕ (stopnie)	Moduł z	argument ϕ (stopnie)	Moduł z	argument ϕ (stopnie)
z_0	0,8	10	1	10	1,5	50
z^2	0,64	20	1	20	2,25	100
z^4	0,4096	40	1	40	5,06	200
z^8	0,1678	80	1	80	25,63	40
z^{16}	0,0281	160	1	160	656,9	80
z^{32}	0,0008	320	1	320	431439,9	160

$z_{n+1}=z_n^2+c$



Przykład: c= –0,5 +0,5i



Brzeg jest zarazem zbiorem Julii i fraktalem.

Co to znaczy nieskończoność?

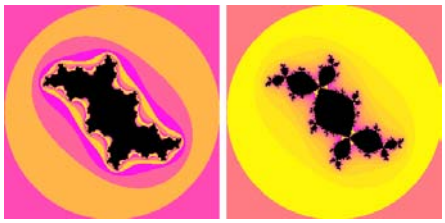
- Punkt ucieknie do nieskończoności jeżeli kolejna iteracja przekroczy r(c)=max(|c|,2).
- Pierwsze przybliżenie zbioru uciekinierów U to dysk o promieniu r(c).
- Kolejne przybliżenie dadzą punkty, które po pierwszej iteracji uciekną poza obszar o promieniu r(c).
- Itd.

Jak ważny jest czas?

- Załóżmy, że $z_0, ..., z_{100}$ leżą w odległości mniejszej niż 2 od punktu początkowego. Czy ciąg nigdy nie ucieknie do nieskończoności?
- Niestety nie wiemy!
- Musimy wybrać maksymalną liczbę iteracji N. Decyzja: większa dokładność i dłższy czas.

(c) 2003 K&R Weron

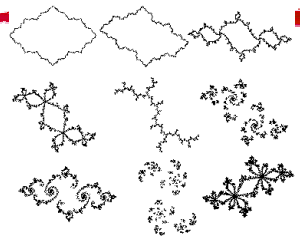
Jak ważny jest czas - przykład



N = 10; N = 50.

(c) 2003 K&R Weron

Przykłady zbiorów Julii



c = -0.5	c = -0.5 + 0.3i	c = -1 + 0.16i
c = -0.12 + 0.765i	c = i	c = -0.3 + 0.71i
c = -0.775 + 0.177i	c = 0.44 + 0.29i	c = -0.513 - 0.579i

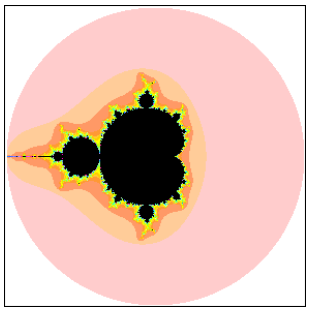
(c) 2003 K&R Weron

Zbiór Mandelbrota

- Zbiór tych c, dla których zbiory Julii są spójne.
- Dla każdego c, zaczynamy z $z_0 = 0$ i generujemy ciąg $z_1, z_2, z_3, ...$ iterując $z_n \rightarrow z_n^2 + c = z_{n+1}$
- Jeżeli ciąg nie ucieka do nieskończonosci, wtedy c należy do zbioru Mandelbrota M.
- Uwagi dotyczące kryterium ucieczki do nieskończonośi są takie same jak przy zbiorach Julii.

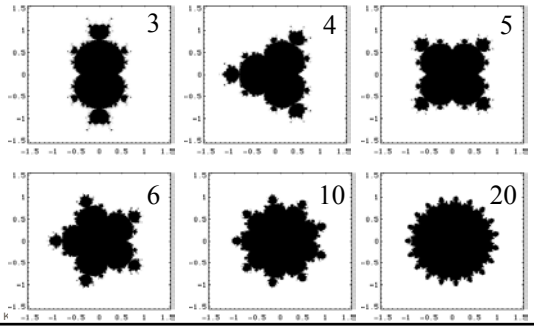
(c) 2003 K&R Weron

Zajrzyj w głąb zbioru Mandelbrota



(c) 2003 K&R Weron

Analogi zbioru Mandelbrota dla wyższych potęg



(c) 2003 K