Wykład 7: Układy dynamiczne

Fizyka komputerowa 2005/2006
Katarzyna Weron,

kweron@ift.uni.wroc.pl

Zamiast wstępu

"Naukowiec nie bada przyrody
dla jej użyteczności;
bada ją ponieważ się nią rozkoszuje ..."

[Poincare]

Plan

- Stabilność
- Pamiętacie wahadło?
- Równanie Logistyczne
- Zbiór Mandelbrota – stary znajomy
- Układ Lorenza
- Wzorzec chaosu – wyrabianie ciasta

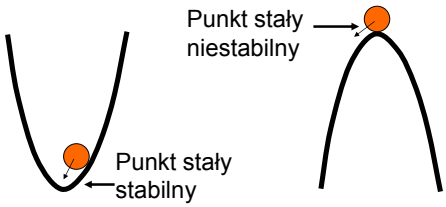
Czy układ słoneczny jest stabilny?

- 1887 król Szwecji Oscar II: nagroda 2500 koron
- Poincare (1854-1912), francuzki matematyk zdobył tę nagrodę
- Problem stabilności układu słonecznego nie jest rozwiązany do dziś.

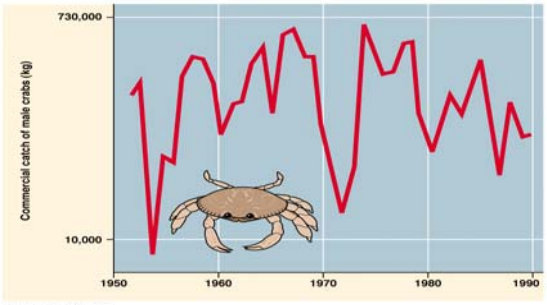
Co zrobił Poincare?

- Ograniczył się do modelu 3 oddziałujących ciał.
- Pokazał, że bardzo prosty model może prowadzić do skomplikowanego zachowania.
- Odkrył bez komputerów wiele cech chaosu deterministycznego.
- "Problem 3 ciał i równania dynamiki", 1890 (270 stron)

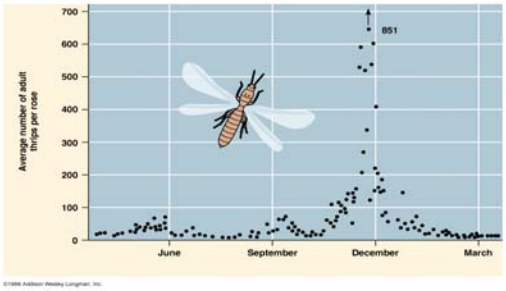
Co to znaczy stabilny?



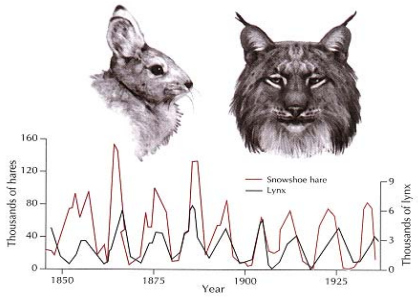
Dynamika populacji – dlaczego nas to interesuje?



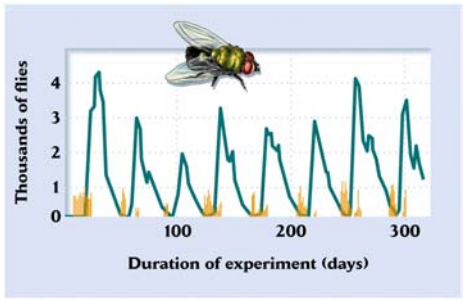
Średnia liczna przylżeńców na różę



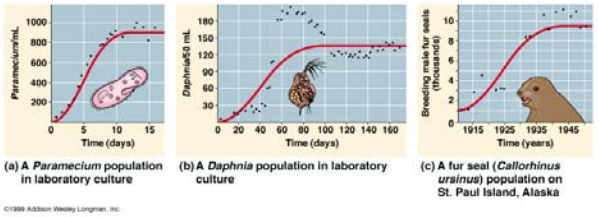
Rysie i zające – cykle w układzie drapieżca ofiara



Liczba much w eksperymencie – zmiany cykliczne?



Może to też wyglądać tak …



(a) A *Paramecium* population in laboratory culture

(b) A *Daphnia* population in laboratory culture

(c) A fur seal (*Callorhinus ursinus*) population on St. Paul Island, Alaska

Populacja Pantofelków w labolatorium

Popularny skorupiak („pchła wodna”)

Populacja fok na wyspie Świętego Pawła, Alaska

Czy to wygląda na losowe?

Równanie logistyczne

Verhulst, 1845:

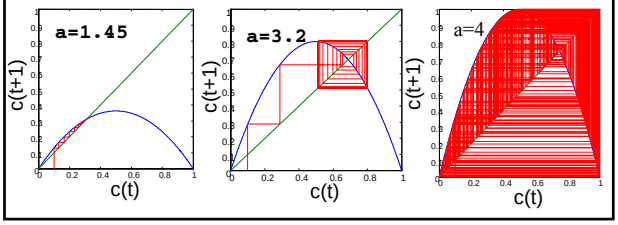
$$\frac{c_{n+1}-c_n}{c_n} = r(1-c_n)$$

$$c_{n+1} = c_n + rc_n(1-c_n)$$

$$x_n = \frac{r}{r+1}c_n \Rightarrow x_{n+1} = \underbrace{(1+r)}_{a}x_n(1-x_n)$$

Co możemy otrzymać?

- Punkty stałe
- Cykle
- Chaos

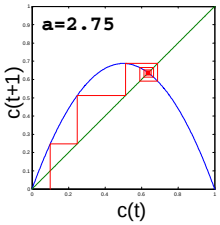


Punkty stałe

$$x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n = x^*$$

$$x^* = 0, x^{**} = \frac{a-1}{a}$$



Typy punktów stałych

$\lvert f'(x^*)\rvert < 1$	przyciągający (stabilny)
$\lvert f'(x^*)\rvert > 1$	odpychający (niestabilny)
$1 < f'$	odpychający schodkowo
$0 < f' < 1$	przyciągajacy schodkowo
$-1 < f' < 0$	przyciągający spiralnie
$f' < -1$	odpychający spiralnie

Typy punktów stałych równania logistycznego

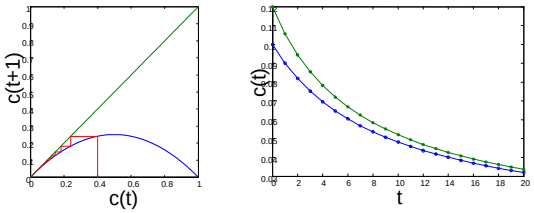
$$f = ax(1-x), f(x^*) = x^*$$

$$x^* = 0, x^* = \frac{a-1}{a}$$

$$f' = a(1-2x), f'(0) = a, f'\left(\frac{a-1}{a}\right) = 2-a$$

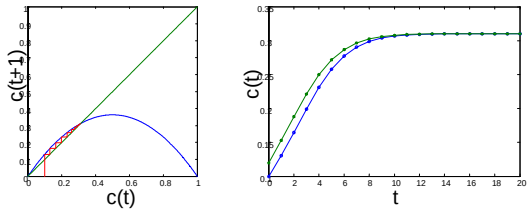
$0 \le a < 1$	odpychający schodkowo
$1 < a < 2$	przyciągający schodkowo
$2 < a < 3$	przyciągający spiralnie
$3 < a \le 4$	odpychający spiralnie

a=1



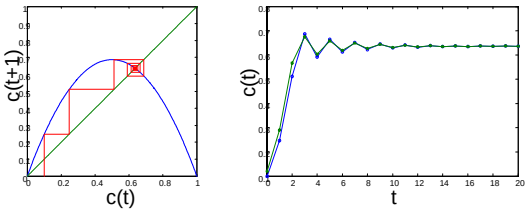
$0 \le a < 1$	odpychający schodkowo
$1 < a < 2$	przyciągający schodkowo
$2 < a < 3$	przyciągający spiralnie
$3 < a \le 4$	odpychający spiralnie

a=1.45



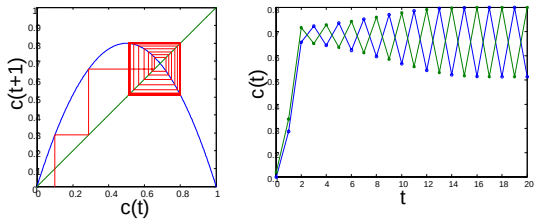
$0 \le a < 1$ odpychający schodkowo
$1 < a < 2$ przyciągający schodkowo
$2 < a < 3$ przyciągający spiralnie
$3 < a \le 4$ odpychający spiralnie

a=2.75



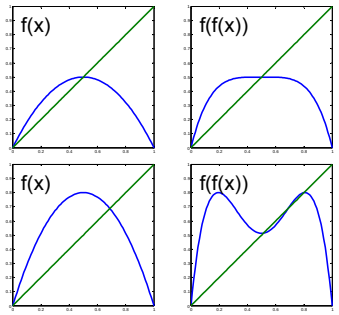
$0 \le a < 1$ odpychający schodkowo
$1 < a < 2$ przyciągający schodkowo
$2 < a < 3$ przyciągający spiralnie
$3 < a \le 4$ odpychający spiralnie

a=3.2



$0 \le a < 1$ odpychający schodkowo
$1 < a < 2$ przyciągający schodkowo
$2 < a < 3$ przyciągający spiralnie
$3 < a \le 4$ odpychający spiralnie

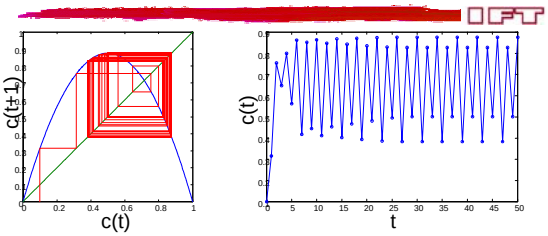
Jak znaleźć cykl?



a=2

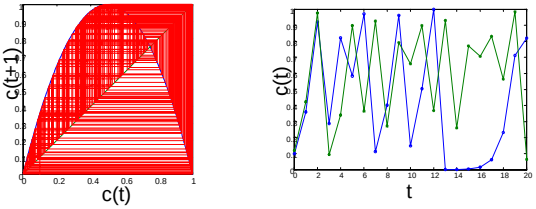
a=3.2

a=3.5



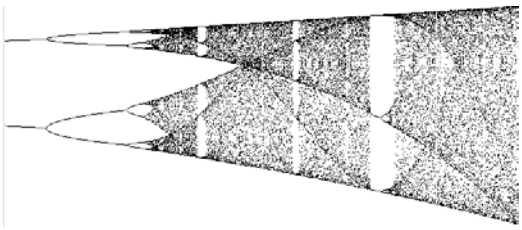
$0 \le a < 1$ odpychający schodkowo
$1 < a < 2$ przyciągający schodkowo
$2 < a < 3$ przyciągający spiralnie
$3 < a \le 4$ odpychający spiralnie

a=4



Chaos deterministyczny

Drzewo podwajania okresu,diagram Feigenbauma, bifurkacyjny



Punkty stałe i cykle w zbiorze Mandelbrota

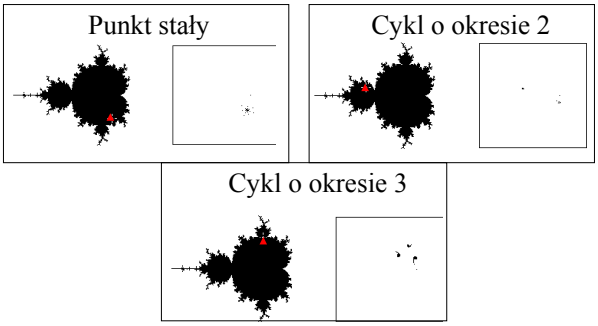
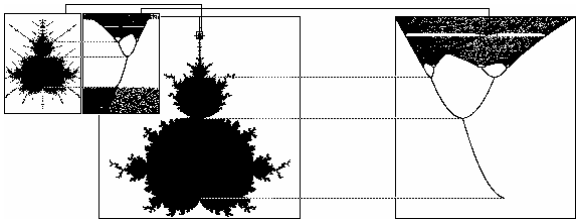
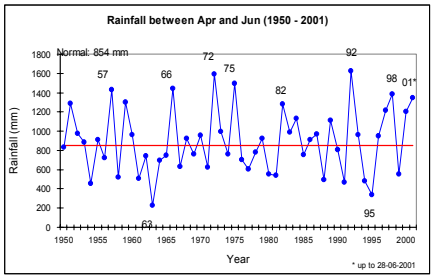


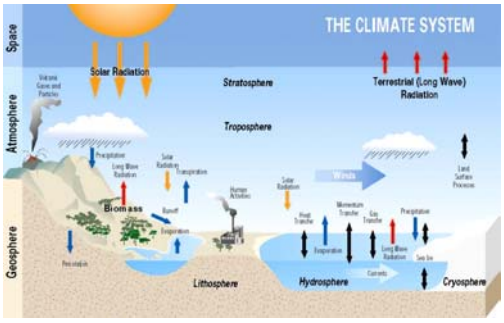
Diagram Feigenbauma i zbiór Mandelbrota



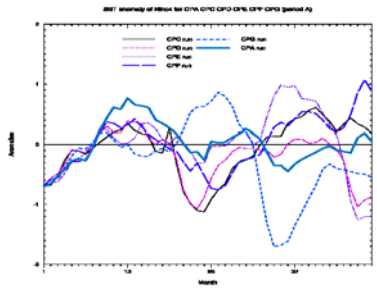
Opady deszczu



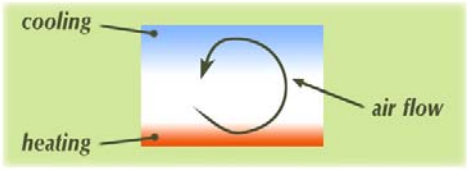
Jak skomplikowany musi być model?



Wrażliwość na warunki początkowe



Konwekcja



Gorące powietrze unosi się do góry – chmury burzowe powstają w wyniku konwekcji.
1962, Saltzman – równania dla prostej konwekcji

Model pogody wg. Lorenza

- Edward Lorenz, MIT w 1961 (w wieku 44 lat)
- Przypadek a może lenistwo?
- Odkrycie – małe zmiany warunków początkowych prowadzą do zupełnie innych prognoz pogody.
- Punkt wyjścia – uproszczone równania konwekcji

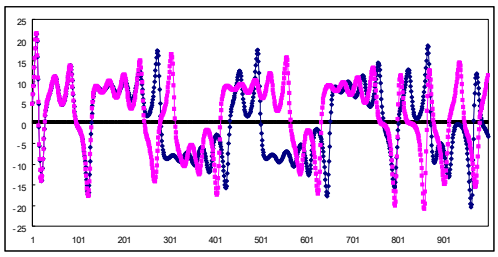
Układ Równań Lorenza – jeszcze więcej uproszczeń

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = \alpha x - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

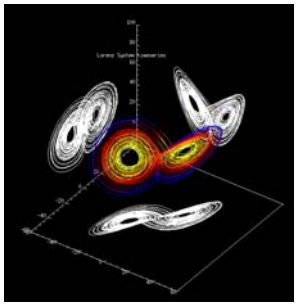
$$\sigma = 10$$
$$\alpha = 28$$
$$\beta = \frac{8}{3}$$

Wielkości wybrane przez Saltzmana

Lenistwo Lorenza i jego „Królewska Pszczoła”



Narysujmy to w przestrzeni …



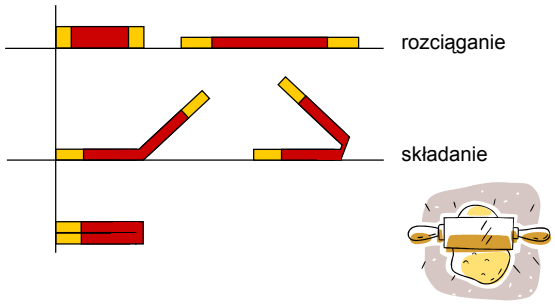
Cechy atraktora Lorenza

- Trajektorie są przyciągane przez ograniczony obszar przestrzeni fazowej
- Ruch jest nieregularny
- Wrażliwość na warunki początkowe (sekwencja pętli)
- Ten atraktor jest dziwny!

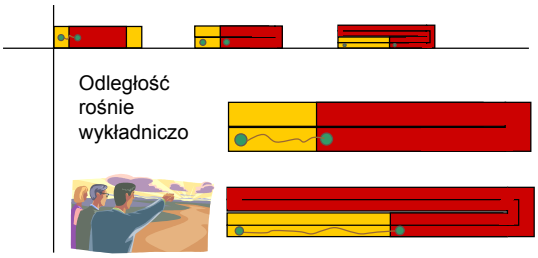
atraktor Roesslera (1976)

$$x' = -(y+z)$$
$$y' = x + ay$$
$$z' = b + xz - cz$$
$$a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$$

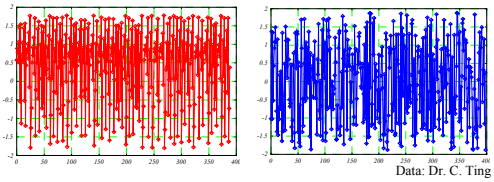
Wzorzec chaosu - wyrabianie ciasta



Gdzie są rodzynki?

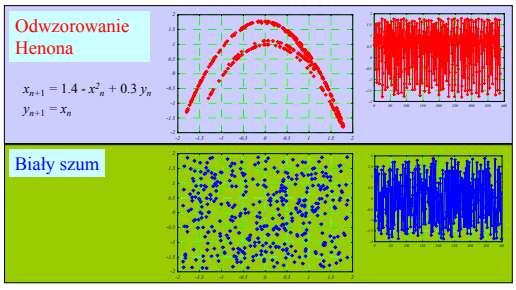
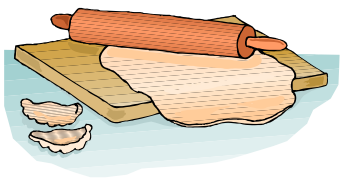


Chaos i losowość



Który z tych szeregów czasowych jest chaotyczny, a który losowy?

Mapa powrotów prawdę ci powie: x(t+1)od x(t)



Pomyśl o tym