Metoda Rungego-Kutty - zastosowanie

Bartosz Dobrzycki

22 marca 2004

Uogólniając metodę Rungego-Kutty czwartego rzędu na przypadek wielu zmiennych, otrzymujemy

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \tag{1}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \tau \mathbf{g}(\mathbf{y}_n, t_n), \\ \mathbf{k}_2 &= \tau \mathbf{g}(\mathbf{y}_n + \frac{\mathbf{k}_1}{2}, t_n + \frac{\tau}{2}), \\ \mathbf{k}_3 &= \tau \mathbf{g}(\mathbf{y}_n + \frac{\mathbf{k}_2}{2}, t_n + \frac{\tau}{2}), \\ \mathbf{k}_4 &= \tau \mathbf{g}(\mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3, t_n + \tau), \end{aligned} \tag{2}$$

a $\mathbf{y}_n$ dla dowolnego n i $\mathbf{k}_l$ dla $l = 1, 2, 3, 4$ są teraz wektorami o wielu składowych [1].

PRZYKŁAD 1:
Ruch planety w polu grawitacyjnym opisuje następujący układ równań różniczkowych (po przekształceniu równania ruchu do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x \\ \frac{dy}{dt} &= v_y \\ \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{x}{r^3} \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{y}{r^3} \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Przepiszmy równania (3) w postaci

$$\dot{x} = g_x(x, y, v_x, v_y, t), \tag{4}$$
$$\dot{y} = g_y(x, y, v_x, v_y, t),$$
$$\dot{v_x} = g_{v_x}(x, y, v_x, v_y, t),$$
$$\dot{v_y} = g_{v_y}(x, y, v_x, v_y, t),$$

gdzie

$$g_x(x, y, v_x, v_y, t) = v_x, \tag{5}$$
$$g_y(x, y, v_x, v_y, t) = v_y,$$
$$g_{v_x}(x, y, v_x, v_y, t) = -\frac{x}{r^3},$$
$$g_{v_y}(x, y, v_x, v_y, t) = -\frac{y}{r^3}.$$

Zapisujemy współczynniki z grupy k_1 pamiętając, że $r_{k_1} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$k_{1x} = \tau g_x(x, y, v_x, v_y, t) = \tau v_x, \tag{6}$$
$$k_{1y} = \tau g_y(x, y, v_x, v_y, t) = \tau v_y,$$
$$k_{1v_x} = \tau g_{v_x}(x, y, v_x, v_y, t) = \tau(-\frac{x}{{r_{k_1}}^3}),$$
$$k_{1v_y} = \tau g_{v_y}(x, y, v_x, v_y, t) = \tau(-\frac{y}{{r_{k_1}}^3}).$$

Zapisujemy współczynniki z grupy k_2 pamiętając, że $r_{k_2} = \sqrt{\left(x + \frac{k_{1x}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{k_{1y}}{2}\right)^2}$

$$k_{2x} = \tau g_x(x + \frac{k_{1x}}{2}, y + \frac{k_{1y}}{2}, v_x + \frac{k_{1v_x}}{2}, v_y + \frac{k_{1v_y}}{2}, t + \frac{\tau}{2}) = \tau(v_x + \frac{k_{1v_x}}{2}), \tag{7}$$
$$k_{2y} = \tau g_y(x + \frac{k_{1x}}{2}, y + \frac{k_{1y}}{2}, v_x + \frac{k_{1v_x}}{2}, v_y + \frac{k_{1v_y}}{2}, t + \frac{\tau}{2}) = \tau(v_y + \frac{k_{1v_y}}{2}),$$
$$k_{2v_x} = \tau g_{v_x}(x + \frac{k_{1x}}{2}, y + \frac{k_{1y}}{2}, v_x + \frac{k_{1v_x}}{2}, v_y + \frac{k_{1v_y}}{2}, t + \frac{\tau}{2}) = \tau(-\frac{x + \frac{k_{1x}}{2}}{{r_{k_2}}^3}),$$
$$k_{2v_y} = \tau g_{v_y}(x + \frac{k_{1x}}{2}, y + \frac{k_{1y}}{2}, v_x + \frac{k_{1v_x}}{2}, v_y + \frac{k_{1v_y}}{2}, t + \frac{\tau}{2}) = \tau(-\frac{y + \frac{k_{1y}}{2}}{{r_{k_2}}^3}).$$

Zapisujemy współczynniki z grupy k_3 pamiętając, że $r_{k_3} = \sqrt{\left(x + \frac{k_{2x}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{k_{2y}}{2}\right)^2}$

$$k_{3x} = \tau g_x(x + \frac{k_{2x}}{2}, y + \frac{k_{2y}}{2}, v_x + \frac{k_{2v_x}}{2}, v_y + \frac{k_{2v_y}}{2}, t + \frac{\tau}{2}) = \tau(v_x + \frac{k_{2v_x}}{2}), \tag{8}$$

$$k_{3y} = \tau g_y(x + \frac{k_{2x}}{2}, y + \frac{k_{2y}}{2}, v_x + \frac{k_{2v_x}}{2}, v_y + \frac{k_{2v_y}}{2}, t + \frac{\tau}{2}) = \tau(v_y + \frac{k_{2v_y}}{2}),$$

$$k_{3v_x} = \tau g_{v_x}(x + \frac{k_{2x}}{2}, y + \frac{k_{2y}}{2}, v_x + \frac{k_{2v_x}}{2}, v_y + \frac{k_{2v_y}}{2}, t + \frac{\tau}{2}) = \tau(-\frac{x + \frac{k_{2x}}{2}}{{r_{k_3}}^3}),$$

$$k_{3v_y} = \tau g_{v_y}(x + \frac{k_{2x}}{2}, y + \frac{k_{2y}}{2}, v_x + \frac{k_{2v_x}}{2}, v_y + \frac{k_{2v_y}}{2}, t + \frac{\tau}{2}) = \tau(-\frac{y + \frac{k_{2y}}{2}}{{r_{k_3}}^3}).$$

Zapisujemy współczynniki z grupy k_4 pamiętając, że $r_{k_4} = \sqrt{(x + k_{3x})^2 + (y + k_{3y})^2}$

$$k_{4x} = \tau g_x(x + k_{3x}, y + k_{3y}, v_x + k_{3v_x}, v_y + k_{3v_y}, t + \tau) = \tau(v_x + k_{3v_x}), \quad (9)$$

$$k_{4y} = \tau g_y(x + k_{3x}, y + k_{3y}, v_x + k_{3v_x}, v_y + k_{3v_y}, t + \tau) = \tau(v_y + k_{3v_y}),$$

$$k_{4v_x} = \tau g_{v_x}(x + k_{3x}, y + k_{3y}, v_x + k_{3v_x}, v_y + k_{3v_y}, t + \tau) = \tau(-\frac{x + k_{3x}}{{r_{k_4}}^3}),$$

$$k_{4v_y} = \tau g_{v_y}(x + k_{3x}, y + k_{3y}, v_x + k_{3v_x}, v_y + k_{3v_y}, t + \tau) = \tau(-\frac{y + k_{3y}}{{r_{k_4}}^3}).$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$x(t + \tau) = \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}), \quad (10)$$

$$y(t + \tau) = \frac{1}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y}),$$

$$v_x(t + \tau) = \frac{1}{6}(k_{1v_x} + 2k_{2v_x} + 2k_{3v_x} + k_{4v_x}),$$

$$v_y(t + \tau) = \frac{1}{6}(k_{1v_y} + 2k_{2v_y} + 2k_{3v_y} + k_{4v_y}).$$

PRZYKŁAD 2:
Równania ruchu Oscylatora Nosego mają postać

$$\frac{dq}{dt} = p \quad (11)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{p^2 - 1}{Q}$$

$$\frac{dp}{dt} = -q - zp$$

Równania (11) przepisujemy jako

$$\dot{q} = g_q(p, q, z, t), \quad (12)$$

$$\dot{z} = g_z(p, q, z, t),$$
$$\dot{p} = g_p(p, q, z, t).$$

gdzie

$$g_q(p, q, z, t) = p, \tag{13}$$
$$g_z(p, q, z, t) = \frac{p^2 - 1}{Q},$$
$$g_p(p, q, z, t) = -q - zp.$$

Zapisujemy współczynniki z grupy k_1

$$k_{1q} = \tau g_q(p, q, z, t) = \tau p, \tag{14}$$
$$k_{1z} = \tau g_z(p, q, z, t) = \tau \frac{p^2 - 1}{Q},$$
$$k_{1p} = \tau g_p(p, q, z, t) = \tau(-q - zp).$$

Zapisujemy współczynniki z grupy k_2

$$k_{2q} = \tau g_q(p + \frac{k_{1p}}{2}, q + \frac{k_{1q}}{2}, z + \frac{k_{1z}}{2}, t + \frac{\tau}{2}) = \tau(p + \frac{k_{1p}}{2}), \tag{15}$$
$$k_{2z} = \tau g_z(p + \frac{k_{1p}}{2}, q + \frac{k_{1q}}{2}, z + \frac{k_{1z}}{2}, t + \frac{\tau}{2}) = \tau \frac{\left(p + \frac{k_{1p}}{2}\right)^2 - 1}{Q},$$
$$k_{2p} = \tau g_p(p+\frac{k_{1p}}{2}, q+\frac{k_{1q}}{2}, z+\frac{k_{1z}}{2}, t+\frac{\tau}{2}) = \tau \left(-\left(q + \frac{k_{1q}}{2}\right) - \left(z + \frac{k_{1z}}{2}\right)\left(p + \frac{k_{1p}}{2}\right)\right).$$

Zapisujemy współczynniki z grupy k_3

$$k_{3q} = \tau g_q(p + \frac{k_{2p}}{2}, q + \frac{k_{2q}}{2}, z + \frac{k_{2z}}{2}, t + \frac{\tau}{2}) = \tau(p + \frac{k_{2p}}{2}), \tag{16}$$
$$k_{3z} = \tau g_z(p + \frac{k_{2p}}{2}, q + \frac{k_{2q}}{2}, z + \frac{k_{2z}}{2}, t + \frac{\tau}{2}) = \tau \frac{\left(p + \frac{k_{2p}}{2}\right)^2 - 1}{Q},$$
$$k_{3p} = \tau g_p(p+\frac{k_{2p}}{2}, q+\frac{k_{2q}}{2}, z+\frac{k_{2z}}{2}, t+\frac{\tau}{2}) = \tau \left(-\left(q + \frac{k_{2q}}{2}\right) - \left(z + \frac{k_{2z}}{2}\right)\left(p + \frac{k_{2p}}{2}\right)\right).$$

Zapisujemy współczynniki z grupy k_4

$$k_{4q} = \tau g_q(p + k_{3p}, q + k_{3q}, z + k_{3z}, t + \tau) = \tau(p + k_{3p}), \tag{17}$$
$$k_{4z} = \tau g_z(p + k_{3p}, q + k_{3q}, z + k_{3z}, t + \tau) = \tau \frac{(p + k_{3p})^2 - 1}{Q},$$

$k_{4p} = \tau g_p(p+k_{3p}, q+k_{3q}, z+k_{3z}, t+\tau) = \tau\left((-q+k_{3q}) - (z+k_{3z})(p+k_{3p})\right).$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$q(t+\tau) = \frac{1}{6}(k_{1q} + 2k_{2q} + 2k_{3q} + k_{4q}), \tag{18}$$

$$z(t+\tau) = \frac{1}{6}(k_{1z} + 2k_{2z} + 2k_{3z} + k_{4z}),$$

$$p(t+\tau) = \frac{1}{6}(k_{1p} + 2k_{2p} + 2k_{3p} + k_{4p}).$$

PRZYKŁAD 3:

Równanie ruchu wahadła matematycznego z tłumieniem oraz okresową siłą wymuszającą można przedstawić w postaci

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{1}{Q}\frac{d\theta}{d\tau} + sin\theta = \hat{A}cos\left(\hat{\omega}\tau\right) \tag{19}$$

gdzie

$$Q = \frac{mg}{\omega_0 \nu}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\tau = \omega_0 t$$

$$\hat{A} = \frac{A}{mg}$$

Równanie (19) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu. Aby rozbić je na dwa równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu dokonujemy podstawienia:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = V \tag{20}$$

W wyniku tej operacji dostajemy

$$\frac{dV}{d\tau} + \frac{1}{Q}V + sin\theta = \hat{A}cos\left(\hat{\omega}\tau\right) \tag{21}$$

Otrzymaliśmy dwa równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu

$$\dot{\theta} = V, \tag{22}$$

$$\dot{V} = -\frac{1}{Q}V - sin\theta + \hat{A}cos\left(\hat{\omega}\tau\right).$$

Przepiszmy równania (22) w postaci

$$\dot{\theta} = g_\theta(\theta, V, \tau), \tag{23}$$

$$\dot{V} = g_V(\theta, V, \tau),$$

gdzie

$$g_\theta(\theta, V, \tau) = V, \tag{24}$$

$$g_V(\theta, V, \tau) = -\frac{1}{Q}V - sin\theta + \hat{A}cos\left(\hat{\omega}\tau\right).$$

Zapisujemy współczynniki z grupy k_1 (τ - ma sens fizyczny czasu, natomiast $\hat{\tau}$ - krok czasowy w metodzie RK-4)

$$k_{1\theta} = \hat{\tau} g_\theta(\theta, V, \tau) = \hat{\tau} V, \tag{25}$$

$$k_{1V} = \hat{\tau} g_V(\theta, V, \tau) = \hat{\tau}\left(-\frac{1}{Q}V - sin\theta + \hat{A}cos\left(\hat{\omega}\tau\right)\right).$$

Zapisujemy współczynniki z grupy k_2

$$k_{2\theta} = \hat{\tau} g_\theta(\theta + \frac{k_{1\theta}}{2}, V + \frac{k_{1V}}{2}, \tau + \frac{\hat{\tau}}{2}) = \hat{\tau}\left(V + \frac{k_{1V}}{2}\right), \tag{26}$$

$$k_{2V} = \hat{\tau} g_V(\theta + \frac{k_{1\theta}}{2}, V + \frac{k_{1V}}{2}, \tau + \frac{\hat{\tau}}{2}) = \hat{\tau}\left(-\frac{1}{Q}\left(V + \frac{k_{1V}}{2}\right) - sin\left(\theta + \frac{k_{1\theta}}{2}\right) + \hat{A}cos\left(\hat{\omega}\left(\tau + \frac{\hat{\tau}}{2}\right)\right)\right).$$

Zapisujemy współczynniki z grupy k_3

$$k_{3\theta} = \hat{\tau} g_\theta(\theta + \frac{k_{2\theta}}{2}, V + \frac{k_{2V}}{2}, \tau + \frac{\hat{\tau}}{2}) = \hat{\tau}\left(V + \frac{k_{2V}}{2}\right), \tag{27}$$

$$k_{3V} = \hat{\tau} g_V(\theta + \frac{k_{2\theta}}{2}, V + \frac{k_{2V}}{2}, \tau + \frac{\hat{\tau}}{2}) = \hat{\tau}\left(-\frac{1}{Q}\left(V + \frac{k_{2V}}{2}\right) - sin\left(\theta + \frac{k_{2\theta}}{2}\right) + \hat{A}cos\left(\hat{\omega}\left(\tau + \frac{\hat{\tau}}{2}\right)\right)\right).$$

Zapisujemy współczynniki z grupy k_4

$$k_{4\theta} = \hat{\tau} g_\theta(\theta + k_{3\theta}, V + k_{3V}, \tau + \hat{\tau}) = \hat{\tau}\left(V + k_{3V}\right), \tag{28}$$

$$k_{4V} = \hat{\tau} g_\tau(\theta + k_{3\theta}, V + k_{3V}, \tau + \hat{\tau}) = \hat{\tau}\left(-\frac{1}{Q}\left(V + k_{3V}\right) - sin\left(\theta + k_{3\theta}\right) + \hat{A}cos\left(\hat{\omega}\left(\tau + \hat{\tau}\right)\right)\right).$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\theta(\tau + \hat{\tau}) = \frac{1}{6}\left(k_{1\theta} + 2k_{2\theta} + 2k_{3\theta} + k_{4\theta}\right), \tag{29}$$

$$V(\tau+\hat{\tau}) = \frac{1}{6}\left(k_{1V} + 2k_{2V} + 2k_{3V} + k_{4V}\right).$$

PRZYKŁAD 4:
Znajdź trajektorię piłki rzuconej ukośnie do powierzchni Ziemi uwzględniając opory powietrza. Siła oporu powietrza jest postaci

$$\vec{F_o} = -\frac{1}{2}c_\omega \rho A|V|\vec{V} \tag{30}$$

gdzie $c_\omega \simeq 0,35$ - współczynnik oporu powietrza, $\rho \simeq 1,2\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ - gęstość powietrza, $A\,[m^2]$ - pole przekroju poprzecznego pocisku, $\vec{V}$ - wektor prędkości pocisku, $|V| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$.

Równanie ruchu piłki, na którą działa siła oporu powietrza $\vec{F_o}$ oraz siła grawitacji $\vec{V}$ ma następującą postać

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \vec{F_o} + \vec{V} \tag{31}$$

Zapisując równanie wektorowe (31) w postaci składowych, otrzymujemy

$$m\frac{d^2x}{dt} = -\frac{1}{2}c_\omega \rho A\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}v_x, \tag{32}$$

$$m\frac{d^2y}{dt} = -\frac{1}{2}c_\omega \rho A\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}v_y - mg. \tag{33}$$

Otrzymane dwa równania (32) i (33) są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi rzędu drugiego. Rozbijamy te dwa równania na cztery równania różniczkowe zwyczjane pierwszego rzędu stosując następujące podstawienia

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \tag{34}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y. \tag{35}$$

Po podstawieniu (34) do (32) i (35) do (33) otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu na prędkości i przyspieszenia

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \tag{36}$$
$$\frac{dy}{dt} = v_y,$$
$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{c_\omega \rho A \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} v_x}{2m},$$
$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{c_\omega \rho A \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} v_y}{2m} - g.$$

Przepiszmy równania (36) w postaci

$$\dot{x} = g_x(x, y, v_x, v_y, t), \tag{37}$$
$$\dot{y} = g_y(x, y, v_x, v_y, t),$$
$$\dot{v_x} = g_{v_x}(x, y, v_x, v_y, t),$$
$$\dot{v_y} = g_{v_y}(x, y, v_x, v_y, t),$$

gdzie

$$g_x(x, y, v_x, v_y, t) = v_x, \tag{38}$$
$$g_y(x, y, v_x, v_y, t) = v_y,$$
$$g_{v_x}(x, y, v_x, v_y, t) = -\frac{c_\omega \rho A \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} v_x}{2m},$$
$$g_{v_y}(x, y, v_x, v_y, t) = -\frac{c_\omega \rho A \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} v_y}{2m} - g.$$

Zapisujemy współczynniki z grupy k_1

$$k_{1x} = \tau g_x(x, y, v_x, v_y, t) = \tau v_x, \tag{39}$$
$$k_{1y} = \tau g_y(x, y, v_x, v_y, t) = \tau v_y,$$
$$k_{1v_x} = \tau g_{v_x}(x, y, v_x, v_y, t) = \tau \left(-\frac{c_\omega \rho A \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} v_x}{2m} \right),$$
$$k_{1v_y} = \tau g_{v_y}(x, y, v_x, v_y, t) = \tau \left(-\frac{c_\omega \rho A \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} v_y}{2m} - g \right).$$

Zapisujemy współczynniki z grupy k_2

$$
\begin{aligned}
k_{2x} &= \tau g_x\left(x+\frac{k_{1x}}{2}, y+\frac{k_{1y}}{2}, v_x+\frac{k_{1v_x}}{2}, v_y+\frac{k_{1v_y}}{2}, t+\frac{\tau}{2}\right) = \tau\left(v_x+\frac{k_{1v_x}}{2}\right),\\
k_{2y} &= \tau g_y\left(x+\frac{k_{1x}}{2}, y+\frac{k_{1y}}{2}, v_x+\frac{k_{1v_x}}{2}, v_y+\frac{k_{1v_y}}{2}, t+\frac{\tau}{2}\right) = \tau\left(v_y+\frac{k_{1v_y}}{2}\right),
\end{aligned}
\tag{40}
$$

$$
\begin{aligned}
k_{2v_x} &= \tau g_{v_x}\left(x+\frac{k_{1x}}{2}, y+\frac{k_{1y}}{2}, v_x+\frac{k_{1v_x}}{2}, v_y+\frac{k_{1v_y}}{2}, t+\frac{\tau}{2}\right) =\\
&= \tau\left(-\frac{c_\omega \rho A\sqrt{\left(v_x+\frac{k_{1v_x}}{2}\right)^2+\left(v_y+\frac{k_{1v_y}}{2}\right)^2}\left(v_x+\frac{k_{1v_x}}{2}\right)}{2m}\right),\\
k_{2v_y} &= \tau g_{v_y}\left(x+\frac{k_{1x}}{2}, y+\frac{k_{1y}}{2}, v_x+\frac{k_{1v_x}}{2}, v_y+\frac{k_{1v_y}}{2}, t+\frac{\tau}{2}\right) =\\
&= \tau\left(-\frac{c_\omega \rho A\sqrt{\left(v_x+\frac{k_{1v_x}}{2}\right)^2+\left(v_y+\frac{k_{1v_y}}{2}\right)^2}\left(v_y+\frac{k_{1v_y}}{2}\right)}{2m}-g\right).
\end{aligned}
$$

Zapisujemy współczynniki z grupy k_3

$$
\begin{aligned}
k_{3x} &= \tau g_x\left(x+\frac{k_{2x}}{2}, y+\frac{k_{2y}}{2}, v_x+\frac{k_{2v_x}}{2}, v_y+\frac{k_{2v_y}}{2}, t+\frac{\tau}{2}\right) = \tau\left(v_x+\frac{k_{2v_x}}{2}\right),\\
k_{3y} &= \tau g_y\left(x+\frac{k_{2x}}{2}, y+\frac{k_{2y}}{2}, v_x+\frac{k_{2v_x}}{2}, v_y+\frac{k_{2v_y}}{2}, t+\frac{\tau}{2}\right) = \tau\left(v_y+\frac{k_{2v_y}}{2}\right),
\end{aligned}
\tag{41}
$$

$$
\begin{aligned}
k_{3v_x} &= \tau g_{v_x}\left(x+\frac{k_{2x}}{2}, y+\frac{k_{2y}}{2}, v_x+\frac{k_{2v_x}}{2}, v_y+\frac{k_{2v_y}}{2}, t+\frac{\tau}{2}\right) =\\
&= \tau\left(-\frac{c_\omega \rho A\sqrt{\left(v_x+\frac{k_{2v_x}}{2}\right)^2+\left(v_y+\frac{k_{2v_y}}{2}\right)^2}\left(v_x+\frac{k_{2v_x}}{2}\right)}{2m}\right),\\
k_{3v_y} &= \tau g_{v_y}\left(x+\frac{k_{2x}}{2}, y+\frac{k_{2y}}{2}, v_x+\frac{k_{2v_x}}{2}, v_y+\frac{k_{2v_y}}{2}, t+\frac{\tau}{2}\right) =\\
&= \tau\left(-\frac{c_\omega \rho A\sqrt{\left(v_x+\frac{k_{2v_x}}{2}\right)^2+\left(v_y+\frac{k_{2v_y}}{2}\right)^2}\left(v_y+\frac{k_{2v_y}}{2}\right)}{2m}-g\right).
\end{aligned}
$$

Zapisujemy współczynniki z grupy k_4

$$k_{4x} = \tau g_x(x + k_{3x}, y + k_{3y}, v_x + k_{3_{v_x}}, v_y + k_{3v_y}, t + \tau) = \tau \left(v_x + k_{3_{v_x}}\right), \quad (42)$$

$$k_{4y} = \tau g_y(x + k_{3x}, y + k_{3y}, v_x + k_{3_{v_x}}, v_y + k_{3v_y}, t + \tau) = \tau \left(v_y + k_{3_{v_y}}\right),$$

$$k_{4v_x} = \tau g_{v_x}(x + k_{3x}, y + k_{3y}, v_x + k_{3_{v_x}}, v_y + k_{3v_y}, t + \tau) =$$

$$= \tau \left(-\frac{c_\omega \rho A \sqrt{\left(v_x + k_{3_{v_x}}\right)^2 + \left(v_y + k_{3v_y}\right)^2} \left(v_x + k_{3_{v_x}}\right)}{2m} \right),$$

$$k_{4v_y} = \tau g_{v_x}(x + k_{3x}, y + k_{3y}, v_x + k_{3_{v_x}}, v_y + k_{3v_y}, t + \tau) =$$

$$= \tau \left(-\frac{c_\omega \rho A \sqrt{\left(v_x + k_{3_{v_x}}\right)^2 + \left(v_y + k_{3v_y}\right)^2} \left(v_y + k_{3_{v_y}}\right)}{2m} - g \right).$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$x(t + \tau) = \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}), \quad (43)$$

$$y(t + \tau) = \frac{1}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y}),$$

$$v_x(t + \tau) = \frac{1}{6}(k_{1v_x} + 2k_{2v_x} + 2k_{3v_x} + k_{4v_x}),$$

$$v_y(t + \tau) = \frac{1}{6}(k_{1v_y} + 2k_{2v_y} + 2k_{3v_y} + k_{4v_y}).$$

Literatura

[1] Tao Pang: *Metody obliczeniowe w fizyce*, PWN, 2001.